KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

70. évfolyam 7. szám Budapest, 2020. október

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76.; Telefon: 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten: `www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft
Kéziratokat nem őrzünk meg és nem küldünk vissza. Minden jog a KöMaL tulajdonosaié.
E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office: Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76., 1117–Budapest, Hungary telephone: +36 (1) 372-2850 or on the Postal address H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary, or on the Internet: `www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.
A Lapban megjelenő hirdetések tartalmáért felelősséget nem vállalunk.

Az elfeledett közép

Bevezetés

„Kezdetben vala a számtani, a mértani és a harmonikus közép. . . ” Némi módosítással idéztünk egy tanulmányból, amely a matematikai középértékekkel foglalkozik [13]. Valóban, ezeket a közepeket – az ókori görög matematika arányelméletének keretein belül, arányokkal kifejezve – már *Püthagorasz* is ismerte, sőt a történeti források szerint babilóniai tanulmányútja során tett szert erre a tudásra. Matematikai vonatkozású régészeti leletek is arra utalnak, hogy ezeket a közepeket már a babilóniai tudósok is használták, Krisztus előtt csaknem kétezer évvel [9]. *Püthagorasz* egyik későbbi követője, *Arkhütasz* olyan megfogalmazást adott ezekre a közepekre, amelyből kiindulva további középértékekhez vezető eljárást dolgoztak ki a pitagoreusok. Az így kapott közepeket ezért pitagoraszi vagy „görög” közepeknek nevezzük [2], [4], [7], [9], [10], [16], [21], [22]. Ezek közé tartozik a *kontraharmonikus* közép is, amely azonban – egyszerűsége ellenére – mára sajnos méltatlanul elfeledetté és mellőzötté vált, legalábbis középiskolai szinten. Tanulmányunkban a kontraharmonikus közép tulajdonságaival, összefüggéseivel, előfordulásával foglalkozunk, néhány saját eredménnyel is gazdagítva a témát. A dolgozatban szereplő állítások nagy részét – terjedelmi okok miatt – nem bizonyítjuk; a bizonyítások feladatát **F**-fel jelölve gyakorlásként az Olvasóra bízzuk.

A legismertebb közepek és a kontraharmonikus közép

Mit is értünk két pozitív valós szám középértéke alatt? Azt az értéket, amely a két szám közé esik. Pontosabban: matematikai középnek nevezünk egy, a pozitív valós számpárok halmazán értelmezett kétváltozós, folytonos függvényt, melynek bármely helyettesítési értéke az adott számpár tagjai közé esik (megengedve a valamelyik taggal való esetleges egyenlőséget is). A középérték fogalma sok esetben könnyen kiterjeszthető több számra is, továbbá súlyozásra is van lehetőség. A középiskolában tárgyalt legismertebb közepeket az alábbi *táblázatban* tüntettük fel.

Közép neve	**Képlet**	**Jelölés**
számtani (aritmetikai)	$\dfrac{a+b}{2}$	A
mértani (geometriai)	$\sqrt{a\cdot b}$	G
harmonikus	$\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\dfrac{2ab}{a+b}$	H
négyzetes (kvadratikus)*	$\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$	Q

*A négyzetes közép valójában nem tartozik a pitagoraszi közepek családjába, csak az ismertsége miatt szerepel a táblázatban.

Fordítsuk figyelmünket most arra a bizonyos elfeledett középre. Két pozitív valós szám (a és b) kontraharmonikus közepe:

$$C(a,b)=\frac{a^2+b^2}{a+b}$$

Ez valójában egy a-val, illetve b-vel súlyozott számtani közép („önsúlyozott" közép) [12], de úgy is tekinthetjük, hogy a^2 és b^2 számtani közepének, illetve a és b számtani közepének a hányadosa. A definícióból könnyen levezethető a kontraharmonikus közép néhány alapvető tulajdonsága. (**F**)

a) $C(a,b)$ jogosult a középérték névre, mivel minden $a\leqslant b$ esetén:

$$a\leqslant C(a,b)\leqslant b.$$

b) $C(a,b)$ *szigorú* (vagy *diagonális*) közép, ami azt jelenti, hogy az előbbi egyenlőtlenségek szigorúakká válnak, ha a különbözik b-től, de ha a és b megegyezik, akkor $C(a,b)$ is egyenlő ezekkel.

c) $C(a,b)$ *szimmetrikus* közép, azaz a képletében a és b szerepe felcserélhető:

$$C(a,b)=C(b,a).$$

d) $C(a,b)$ *homogén* közép, ami alatt azt értjük, hogy tetszőleges pozitív valós λ esetén:

$$C(\lambda a,\lambda b)=\lambda\cdot C(a,b).$$

A homogenitás jelentősége többek között abban áll, hogy a két szám közös tényezője „kiemelhető" a közép elé.

A következőkben egy olyan módszert mutatunk be, amely hatékonyan alkalmazható a közepek tulajdonságainak, illetve kapcsolatainak a vizsgálatára, ennek ellenére ritkán találkozunk ezzel a szakirodalomban [5], [11].

Felhasználva a kontraharmonikus közép homogenitását, végezzük el az alábbi átalakítást:

$$C(a,b)=b\cdot C\left(\frac{a}{b},1\right)=b\cdot C(x,1),\quad \text{ahol}\quad x=\frac{a}{b};\ x>0.$$

Ennek alapján b lerögzítésével a kontraharmonikus középhez hozzárendelhetünk egy egyváltozós függvényt, amit *karakterisztikus függvénynek* nevezünk. Tehát:

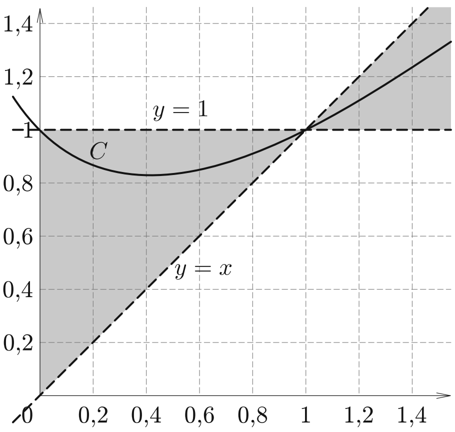
$$f_C(x)=C(x,1)=\frac{x^2+1}{x+1}.$$

A karakterisztikus függvény segítségével úgy igazolhatjuk a középérték-tulajdonságot, hogy belátjuk:

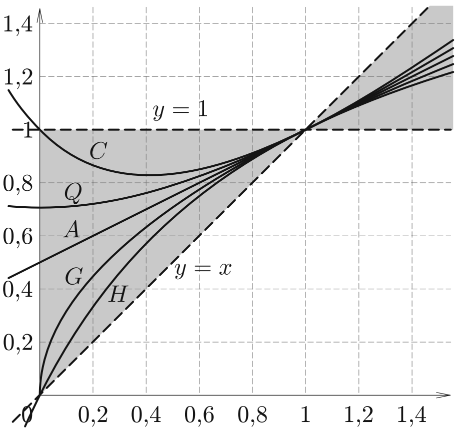
$$\begin{aligned} &x\leqslant f_C(x)\leqslant 1, &&\text{ha}\ \ a\leqslant b, &&\text{azaz ha}\ \ 0<x\leqslant 1,\\ &1\leqslant f_C(x)\leqslant x, &&\text{ha}\ \ a\geqslant b, &&\text{azaz ha}\ \ x\geqslant 1.\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy $f_C(x)$ grafikonjának az $y = 1$ és az $y = x$ egyenletű egyenesek által határolt tartományban kell húzódnia. Amint az az *1. ábrán* látható (és természetesen számításokkal is egyszerűen alátámasztható), $f_C(x)$ grafikonja valóban a „megengedett" tartományban van.

A grafikonon az is megfigyelhető, hogy a kontraharmonikus közép karakterisztikus függvénye a $]0; 1]$ intervallumban nem monoton, hanem szélsőértéke, mégpedig minimuma van. A többféleképpen is elvégezhető pontos elemzés szerint a minimum helye: $x = \sqrt{2} - 1$. (**F**) A karakterisztikus függvény nem kölcsönösen egyértelmű voltából a kontraharmonikus közép különleges tulajdonsága következik: ha rögzítjük egy számpár nagyobbik tagját, akkor a kisebbik tag két különböző értéke esetén is ugyanazt a kontraharmonikus közepet kaphatjuk. Pl.: $C(2, 6) = C(3, 6) = 5$.



1. ábra



2. ábra

A jól ismert közepek karakterisztikus függvényét hasonlóképpen határozhatjuk meg (*2. ábra*). (**F**) A grafikonok tanúsága és az elemzés szerint a számtani, mértani, harmonikus és négyzetes közép karakterisztikus függvénye szigorúan monoton növő, tehát ezeknél a közepeknél nem tapasztalható az a „kettősség", amelyet a kontraharmonikus középnél láttunk. Az ilyen középértékeket *izotonnak* nevezzük [2]. A kontraharmonikus középnek a többi középétől eltérő tulajdonsága tehát az, hogy nem izoton, hiszen a karakterisztikus függvénye nem monoton.

Az ábráról ugyanakkor a közepek sorrendje is leolvasható, és így adódik a nevezetes egyenlőtlenség-láncolat, amelybe most már a kontraharmonikus közép is beilleszthető:

$$H \leqslant G \leqslant A \leqslant Q \leqslant C,$$

ahol az egyenlőségek akkor és csak akkor teljesülnek, ha $a = b$. (**F**)

A derékszögű érintőtrapéz

A következőkben bemutatjuk a kontraharmonikus közép egy geometriai előfordulását, miközben rávilágítunk más közepekkel való összefüggéseire és a pitagoraszi számhármasokkal való kapcsolatára. Mindezt egy tétel kimondásának és bizonyításának keretén belül tesszük.

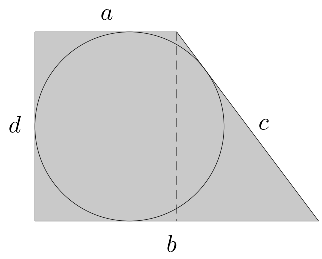
Tétel. I. *Ha a és b különböző pozitív egész számok, és $C(a,b)$ (vagyis a kontraharmonikus közepük) is egész, akkor $C(a,b)$ előáll egy pitagoraszi számhármas legnagyobb tagjaként.*

II. *Ha (x,y,z) pitagoraszi számhármas, akkor létezik két különböző pozitív egész szám, melyeknek kontraharmonikus közepe éppen a számhármas legnagyobb tagja (azaz z, amely szintén egész).*

Bizonyítás. Tekintsünk egy derékszögű érintőtrapézt (*3. ábra*), melynek alapjai a, illetve b hosszúak ($a<b$). Hogy a és b ismeretében kifejezhessük a szárak hosszát (c-t és d-t), írjuk fel az érintőnégyszögek tételét és a Pitagorasz-tételt:

$$c+d=a+b,$$

$$d^2+(b-a)^2=c^2.$$



3. ábra

Az egyenletrendszer megoldásával az alábbi eredményre jutunk:

$$c=\frac{a^2+b^2}{a+b},\quad d=\frac{2ab}{a+b}$$

A merőleges szár hosszára tehát az alapok hosszának a harmonikus közepét, a másik szár hosszára pedig a kontraharmonikus közepét kapjuk.

Ezen a ponton tegyünk egy kis kitérőt. Azonnal láthatjuk, hogy két különböző számnak a kontraharmonikus közepe nagyobb, mint a harmonikus közepe, amit algebrai úton is igazolhatunk. Írjuk fel újra az érintőnégyszögek tételét, most már a kapott eredményekkel.

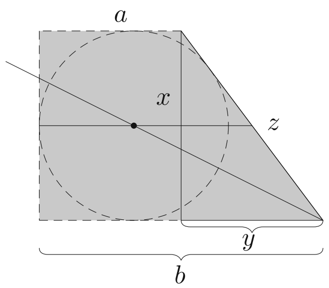
$$H+C=a+b.$$

2-vel való osztás után kapjuk a számtani közép definíciója alapján:

$$A(H,C)=A(a,b).$$

Vagyis mindegy, hogy két szám harmonikus és kontraharmonikus közepének vesszük a számtani közepét, vagy magának az eredeti két számnak a számtani közepét. Erre azt mondjuk, hogy a számtani közép *invariáns* a harmonikus és a kontraharmonikus középre nézve. Szokás úgy is fogalmazni, hogy a harmonikus és a kontraharmonikus közép egymásnak a *komplementere* a számtani középre vonatkozóan [20]. Középiskolai szóhasználattal: két tetszőleges pozitív valós szám harmonikus, számtani és kontraharmonikus közepe egy számtani sorozat egymást követő tagjai. Az ábra tehát magában rejt egy közepek közötti, invariancia jellegű összefüggést, amely egyúttal magyarázatot ad a kontraharmonikus elnevezésre is.

Térjünk vissza a tétel bizonyítására. Tegyük fel, hogy a és b egész számok, és a kontraharmonikus közepük is egész. Válasszunk le a derékszögű érintőtrapézból egy derékszögű háromszöget. Ennek oldalhosszai: $b-a$, d, c. Ezek azonban a feltételek miatt mind egész számok (hiszen $c=C(a,b)$, illetve $d=a+b-c$ az érintőnégyszögek tételéből). Tehát kaptunk egy pitagoraszi számhármast, melynek legnagyobb tagja éppen $C(a,b)$. Ezzel bebizonyítottuk a tétel I. részét.



4. ábra

Induljunk ki most egy (x, y, z) pitagoraszi számhármasból, azaz három olyan pozitív egész számból, melyek egy derékszögű háromszög oldalhosszai. Egészítsük ki ezt a háromszöget derékszögű érintőtrapézzá (*4. ábra*). (A szerkesztés nem bonyolult: az egyik hegyesszögű csúcsból kiinduló szögfelezőnek, illetve a csúccsal szemközti befogó és az átfogó felezőpontját összekötő középvonalnak a metszéspontjaként kapjuk a szerkesztendő trapézba írható kör középpontját; a kör megrajzolása után pedig már könnyű megszerkeszteni a trapézt.) A kapott derékszögű érintőtrapéz hosszabbik száráról tudjuk, hogy annak hossza egyrészt az alapok hosszának (a-nak és b-nek) a kontraharmonikus közepe, másrészt egész szám, hiszen a pitagoraszi számhármas legnagyobb tagja (a derékszögű háromszög átfogójának a hossza). Már csak azt kell belátni, hogy az alapok hossza is egész szám. Az ábra alapján írjunk fel két összefüggést a és b között:

$$a + b = x + z,$$

$$b - a = y.$$

Ebből kapjuk:

$$a = \frac{x - y + z}{2}, \quad b = \frac{x + y + z}{2}.$$

i) Foglalkozzunk először egy ún. primitív pitagoraszi számhármassal, amelyben a tagoknak nincs 1-nél nagyobb közös osztója. Ismeretes, hogy ebben az esetben a tagok a következő módon fejezhetők ki az m és n pozitív egész számokkal [17]:

$$x = 2mn, \quad y = m^2 - n^2, \quad z = m^2 + n^2$$

($m > n$, továbbá m és n relatív prímek és különböző paritásúak; x jelöli a számhármas egyetlen páros tagját.) Behelyettesítés és rendezés után adódik:

$$a = n \cdot (m + n), \quad b = m \cdot (m + n).$$

Tehát az alapok hossza valóban egész szám.

ii) Ha a pitagoraszi számhármas nem primitív, akkor a tagok legnagyobb közös osztója nagyobb 1-nél. Jelöljük ezt az egész számot k-val. Ha mindhárom tagot k-val osztjuk, akkor primitív pitagoraszi számhármashoz jutunk, így az előzőek szerint egész számokat kapunk az alapok hosszára. Ezeket k-val megszorozva adódnak az eredeti számhármashoz tartozó alaphosszúságok, amelyek természetesen szintén egész számok. Ez teszi teljessé a tétel II. részének a bizonyítását.

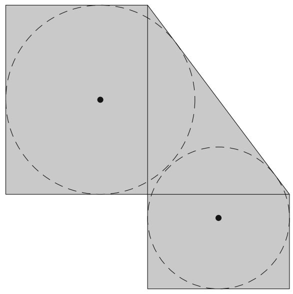
A tétel kimondása *Pahikkala* nevéhez fűződik, aki az iménti, geometriai hátterű bizonyítás helyett tisztán algebrai módszert alkalmazott [18].

Megjegyzés. A szerkesztésből kitűnik, hogy a derékszögű háromszöget a másik befogójának az irányában is kiegészíthetjük derékszögű érintőtrapézzá (*5. ábra*). Ez annak felel meg, hogy az alapok hosszának a képletében x és y szerepe felcserélődik:

$$a' = \frac{y - x + z}{2}, \quad b' = \frac{x + y + z}{2}.$$

Mint látható, a hosszabbik alap hosszára ugyanazt az értéket kapjuk, a rövidebbik alapéra azonban nem:

$$a' = z - a, \quad b' = b.$$



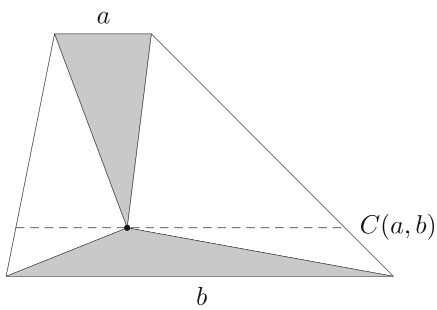
5. ábra

Eközben a trapéz hosszabbik szára – azaz a kiindulási derékszögű háromszög átfogója – nem változik. Mindez összhangban van a kontraharmonikus közép nem izoton voltával, azaz azzal a korábban megállapított ténnyel, hogy ha rögzítjük egy számpár nagyobbik tagját, akkor a kisebbik tag két különböző értéke esetén is ugyanaz a kontraharmonikus közép adódik [18]:

$$C(a, b) = C(a', b), \quad a + a' = C.$$

A kontraharmonikus közép előfordulásai

a) Bizonyára sokan tudják, hogy a trapéz alapjaival párhuzamos szakaszok (az ún. húrok) némelyikének a hossza mögött a legismertebb közepek rejtőznek [4], [6], [20]. Kevésbé közismert azonban, hogy a kontraharmonikus közép is fellelhető a trapézban. Például ha találunk egy olyan pontot a trapézon belül, amelyet egy-egy alap végpontjaival összekötve a kapott háromszögek területe megegyezik, akkor az ezen a ponton áthaladó húr hossza az alapok hosszának a kontraharmonikus közepével lesz egyenlő (*6. ábra*) [23]. (Könnyen belátható, hogy a szóban forgó húr összes pontja rendelkezik az elsőként megtalált pontéhoz hasonló tulajdonsággal.) (**F**)

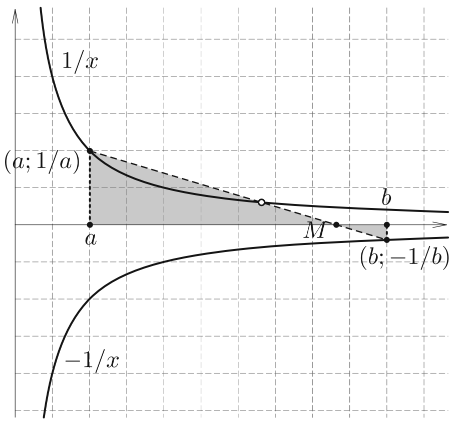


6. ábra

b) Keressük meg egy *érintőtrapéznak* azt a húrját, amely két egyenlő kerületű kisebb trapézra bontja az eredeti trapézt (azaz amely megfelezi az eredeti trapéz kerületét). Ennek a húrnak a hossza egyenlő az alapok hosszának a kontraharmonikus közepével. (**F**)

c) A derékszögű háromszög átfogójához, illetve az egyik befogóhoz írt kör sugarának kontraharmonikus közepére éppen az átfogó hosszát kapjuk. Az a tény, hogy az állításban bármelyik befogó szerepelhet, a kontraharmonikus közép nem izoton voltára utal. (Az átfogóhoz, illetve az egyik befogóhoz írt kör sugarának harmonikus közepe pedig az adott befogó hosszával egyenlő.) (**F**)

d) Tekintsünk egy egyenes csonka kúpot, amelyről tudjuk, hogy az alaplap és a fedőlap területének az összege egyenlő a palást területével. Ekkor az alkotó hossza megegyezik az alaplap és a fedőlap sugarának a kontraharmonikus közepével. (A csonka kúp magassága pedig a sugarak harmonikus közepével egyenlő.) (**F**)



7. ábra

e) Tekintsük a $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, $g(x)=1/x$ függvényt (*7. ábra*). Tükrözzük a függvény grafikonját az x-tengelyre, és jelöljünk ki a tengelyen egy tetszőleges a-t és b-t ($a<b$). Kössük össze az $(a;1/a)$ és a $(b;-1/b)$ pontokat (*Moskovitz–Mays*-féle eljárás [14], [15]). Az összekötő egyenes egy a és b közötti M pontban metszi az x-tengelyt. M meghatározásához vegyük észre, hogy az ábrán látható derékszögű háromszögek hasonlók, és írjuk fel az egymásnak megfeleltethető befogóhosszak arányának egyenlőségét:

$$\frac{M-a}{b-M}=\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}}=\frac{b}{a}.$$

Rendezés után kapjuk:

$$M(a,b)=\frac{a^2+b^2}{a+b}.$$

Vagyis ezzel az eljárással a és b kontraharmonikus közepéhez jutottunk. Megfigyelhetjük, hogy a két szélső pontot összekötő egyenes még egy helyen metszi a függvény grafikonját. Ez azt jelenti, hogy a nagyobbik szám (b) rögzítésével a kisebbik szám (a) két különböző értéke mellett is ugyanazt a kontraharmonikus közepet kapjuk, ami ismét a kontraharmonikus közép nem izoton voltát jelzi.

f) Számadatok átlagáról legtöbbször a számtani közép jut az eszünkbe, pedig az átlag meghatározása erősen függ attól, hogy mit tartunk szem előtt az adathalmaz és az azt „képviselő" átlagérték viszonyában. A számtani közepet akkor kapjuk átlagul, ha arra törekszünk, hogy az adatoknak az átlagtól való négyzetes eltérése összességében a lehető legkisebb legyen (ekkor a szórás is minimális).

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\min. \iff \bar{x}=A(x_1,\ldots,x_n).$$

Ha azonban azt akarjuk, hogy az adatoknak az átlagtól való *relatív* (tehát az átlaghoz viszonyított) négyzetes eltérése legyen összességében minimális, akkor a kontraharmonikus közép adódik átlagnak [1].

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\bar{x}}{\bar{x}}\right)^2=\min. \iff \bar{x}=C(x_1,\ldots,x_n).$$

g) Érdekes, hogy a kontraharmonikus közép (és nemcsak az) még a zenében is felbukkan. Két hang magasságbeli különbségét a hangközzel jellemezzük, ez pedig a két hang frekvenciájának aránya. Tekintsünk egy alaphangot (pl. C), ennek oktávját (C'), továbbá a következő hangközöket: kvart (F), kvint (G), nagy szext (A). Ha az alaphang frekvenciáját egységnyinek vesszük, akkor az oktáv frekvenciája 2, a kvarté 4/3, a kvinté 3/2, a nagy szexté pedig 5/3 egység, legalábbis az ún. természetes (vagy diatonikus) dúr skálán [3]. Látható, hogy az alaphang és az oktáv frekvenciájának számtani közepe a kvint frekvenciájával, harmonikus közepe pedig a kvart frekvenciájával egyezik meg, amint az már a pitagoreusok számára is ismert volt (persze nem a frekvenciákkal megfogalmazva, hanem a rezgésbe hozott, és így a megfelelő hangot kibocsátó húr hosszának a felhasználásával) [8], [9], [19], [22]. Ha azonban a kontraharmonikus közép is szerepel az eszköztárunkban, észrevehetjük, hogy a nagy szext frekvenciája éppen ennek a középnek felel meg.

Kitekintés

A cikkbeli táblázatban szereplő, legismertebb közepek valójában egy nagyobb családnak, az ún. hatványközepek családjának a tagjai [2], [4], [20]. A kontraharmonikus közép nem tartozik ebbe a családba. Az viszont mind a hatványközepekről, mind a kontraharmonikus középről elmondható, hogy a számtani középre vezethetők vissza. Jogosan vetődhet fel a kérdés a kontraharmonikus közép tényleges hovatartozását illetően. A választ jelen tanulmányunk folytatása foglalja majd magába.

Felhasznált és ajánlott szakirodalom

[1] Beckenbach, E. F.: A class of mean value functions. *The American Mathematical Monthly,* **57.** No. 1. (1950), 1–6.

[2] Borwein, J. M. & Borwein, P. B.: Pi and the AGM. A study in analytic number theory and computational complexity. John Wiley, New York, 1987.

[3] Budó Ágoston: Kísérleti fizika I. Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.

[4] Bullen, P. S.: Handbook of means and their inequalities. Springer Science + Business Media, Dordrecht, 2003.

[5] Chen, H.: Means generated by an integral. *Mathematics Magazine,* **78.** No. 5. (2005), 397–399.

[6] Eves, H.: Means appearing in geometric figures. *Mathematics Magazine,* **76.** No. 4. (2003), 292–294.

[7] Faradj, M. K.: Which mean do you mean? An exposition on means. `http://digitalcommons.lsu.edu/gradschool_theses` (Letöltés ideje: 2017. 11. 15.).

[8] Hámori Miklós: Arányok és talányok. Typotex Kft., Budapest, 1994.

[9] Hischer, H.: Viertausend Jahre Mittelwertbildung. *mathematica didactica,* **25.** No. 2. (2002), 3–51.

[10] Kovács Veronika & Petz Dénes: Számtani közép, mértani közép, meg ilyenek. *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok,* **56.** No. 3. (2006), 130–136.

[11] Lambert, A. & Herget, W.: Mächtig viel Mittelmaß in Mittelwert-Familien. *Der Mathematikunterricht,* **50.** No. 5. (2004), 55–66.

[12] Lann, A. & Falk, R.: Ein etwas vernachlässigter Mittelwert. *Stochastik in der Schule,* **27.** No. 1. (2007), 2–4.

[13] Leach, E. B. & Sholander, M. C.: Extended mean values. *The American Mathematical Monthly,* **85.** No. 2. (1978), 84–90.

[14] Mays, M. E.: Functions which parametrize means. *The American Mathematical Monthly,* **90.** No. 10. (1983), 677–683.

[15] Moskovitz, D.: An alignment chart for various means. *The American Mathematical Monthly,* **40.** No. 10. (1933), 592–596.

[16] ifj. Orbán György: A püthagoraszi középarányosok jelentős tulajdonságai és szerepük az építészetben. XV. Műszaki Tudományos Ülésszak, Kolozsvár, 2014, 161–172.

[17] Ore, O.: Bevezetés a számelmélet világába. Gondolat, Budapest, 1977.

[18] Pahikkala, J.: On contraharmonic mean and Pythagorean triples. *Elemente der Mathematik,* **65.** No. 2. (2010), 62–67.

[19] Sain Márton: Nincs királyi út! Gondolat, Budapest, 1986.

[20] Szikszai József: A hatványközepek. Tankönyvkiadó, Budapest, 1987.

[21] Toader, Gh. & Toader, S.: Greek means and the arithmetic-geometric mean. RGMIA Monographs, Victoria University, 2005.

[22] Wassell, S. R.: Rediscovering a family of means. *The Mathematical Intelligencer,* **24.** No. 2. (2002), 58–65.

[23] Witkowski, A.: Gini and Stolarsky means in geometric problems. Conference on Inequalities and Applications, Hajdúszoboszló, 2010.

Hargitai Sára, Unyi Tamás
Gödöllői Református Líceum

A legutóbb Gödöllőn megtartott Rátz László Vándorgyűlésen hallottam a gödöllői diákkörösök előadását, melyből a fenti cikk született. Mivel az előadás és így a cikk is a diákköri tevékenység eredménye, így örömmel tesszük közzé felhívásukat.

R. É.

Felhívás matematikai diákkonferencián való részvételre

Iskolánkban, a Gödöllői Református Líceumban egy évvel ezelőtt megalapítottuk a Tudományos és Innovációs Diákkört, amelynek keretén belül egy matematikai kutatócsoport is működik. Itt egyrészt a tananyagon túlmutató, kevésbé ismert témákat tanulmányozunk, másrészt középiskolai szinten még valóban feldolgozatlan területeket tárunk fel. A közös kutatás igazi szellemi élményt nyújt diáknak és tanárnak egyaránt, ha pedig valami újdonságra is fény derül, akkor az külön örömet jelent. Kutatási eredményeinket iskolánkon kívül a budapesti Eötvös József Gimnáziumban, az ELTE Matematikai Intézetében, a matematikatanárok Rátz László Vándorgyűlésén, valamint az Ifjúsági Tudományos és Innovációs Tehetségkutató Versenyen is volt lehetőségünk bemutatni.

Biztosak vagyunk abban, hogy más iskolákban is tanulnak olyan diákok, akik szívesen mélyednek el matematikai témákban, és élvezettel tanulmányozzák azokat akár hosszabb ideig is. Ebből kiindulva az a szándék fogalmazódott meg bennünk, hogy egymás megismerésének a céljából matematikai diákkonferenciát szerveznénk iskolánk matematikatanári munkaközösségének a közreműködésével. A konferencián bemutatnánk egymásnak kutatásaink témáját, tevékenységünket és elért eredményeinket. Az előadások témáját illetően nem lennének különösebb megkötések: szóba kerülhetnek a tananyag szempontjából periférikus témák és középiskolai szinten ismeretlen területek egyaránt. A konferenciának nem kell okvetlenül versenyjellegűnek lennie, a cél inkább valóban az lenne, hogy megismerjük egymás kutatásait, illetve véleményünkkel, tanácsainkkal, ötleteinkkel segítsük egymás további munkáját. A rendezvény egyfajta gyakorlási lehetőséget is jelentene azok részére, akik országos megmérettetésekre készülnek.

Ha sikerült valakinek az érdeklődését felkelteni, és szívesen jelentkezne a diákkonferenciára, akkor kérjük, hogy töltse ki a KöMal főoldaláról elérhető google űrlapot. Örömmel fogadjuk mindenkinek a jelentkezését: azét is, aki már részt vett versenyszerű diákkonferencián (pl. TUDOK), de azét is, aki még nem mérte össze magát másokkal ezen a téren, ám szívesen beszámolna a saját tevékenységéről. A konferencia időpontjáról, helyszínéről és lebonyolításának körülményeiről a visszajelzések alapján döntenek a szervezők. A személyes találkozás reményében kívánunk mindenkinek jó tanévet és örömteli, eredményes kutatást.

Hargitai Sára, Unyi Tamás

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Melyek azok az x, y egész számok, amelyekre egyszerre teljesül, hogy:

a) $x^2+y^2\leqslant 25$;

b) $|x|+|y|\geqslant 5$;

c) $\log_2(y+1-x^2)\geqslant 0$? (*12 pont*)

2. *a*) Az egyszerű hétpontú gráf csúcsainak foka rendre $3,2,4,1,2$; a másik kettőt nem ismerjük. Állapítsuk meg ezeket, ha a gráfnak 11 éle van, valamint a gráf megrajzolható egy folytonos vonallal úgy, hogy mindegyik élén pontosan egyszer haladtunk át.

b) Adjunk meg három különböző irracionális számot úgy, hogy a három szám összege és bármelyik kettő szorzata is racionális szám legyen.

c) Mutassuk meg, hogy az A és B kijelentések tetszőleges logikai értékére igaz a $\neg(A\to B)=A\wedge\neg B$ egyenlőség. (*12 pont*)

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$\sin x + \cos x = \frac{1 - \sin(2x)}{\cos(2x)}$$

egyenletet. (*13 pont*)

4. Két horgászegyesület, az Aligai Pecások és a Bélatelepi Horgászok közös edzőtáborozást tartottak 47 fő részvételével. A csapatokban felnőtt és junior korosztályú csoportok voltak. Tudjuk, hogy:

a) minden csoport létszáma prímszám;

b) legkevesebben a junior Bélatelepi Horgászok, legtöbben a felnőtt Aligai Pecások vannak a táborban;

c) a felnőtt versenyzők összlétszáma osztható tízzel;

d) a két csapat felnőtt tagjainak létszáma között 10-nél kisebb a különbség.

Hányan vannak az egyes csoportokban? (*14 pont*)

II. rész

5. Egy húrnégyszög egyúttal érintőnégyszög is (bicentrikus négyszög). Két szomszédos oldala 9, 10 egység, az általuk bezárt szög 60°. Jelöljük O-val a körülírt, K-val a beírt kör középpontját.

a) Adjuk meg a másik két oldal hosszát.

b) Határozzuk mega a beírt- és a köréírt kör sugarát.

c) Milyen hosszú a KO távolság? (*16 pont*)

6. *a*) Vizsgáljuk meg az $a_n = n^3 - n^2$ sorozatot monotonitás és korlátosság szempontjából. Állításainkat igazoljuk.

b) Mutassuk meg, hogy a sorozat első n tagjának összege

$$\frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{12}.$$ (*16 pont*)

7. Anna és Bálint szabályos dobókockával játszik. Felváltva dobnak, ha a dobott szám prímszám, akkor a számegyenesen álló bábuval egyet jobbra, ha összetett szám, akkor egyet balra lépnek. Ha egyik sem, akkor a bábu helyben marad. A bábu kezdetben a nullán áll, összesen hatszor fognak dobni. Előtte fogadnak arra, hogy a játék végén melyik számon áll majd a bábu. Anna az egyesre, Bálint a kettesre fogad.

a) Kinek mekkora esélye van a nyerésre?

Tegyük fel, hogy Anna nyerte a fogadást.

b) Mennyi a valószínűsége, hogy a játék során egyszer dobtak egyest? (*16 pont*)

8. A 2 egység élű kocka egyik csúcsát jelöljük A-val, majd állítsunk egyenlő hosszú szakaszokat a kocka A-val érintkező lapjainak középpontjába, az adott lapokra merőlegesen kifelé.

A szakaszok lapra nem illeszkedő végpontjait jelöljük P, Q, R-rel.

a) Milyen hosszúak a szakaszok, ha az A, P, Q, R pontok egy síkban vannak?

A 2 egység élű kocka lapjaira kifelé egyenlő magasságú, 2 egység oldalú négyzet alapú egyenes gúlákat helyezünk úgy, hogy a gúla alapja egybeesik a kocka adott lapjával.

b) Mekkora a gúla magassága, ha az így kapott testnek van körülírt és beírt gömbje?

c) Mekkora a gúla magassága abban az esetben, ha az így keletkezett poliédernek 14 csúcsa, 12 lapja és 24 éle lett? (*16 pont*)

9. Legyen $f(x)=2x^2-x^3$; $x\in[0;2]$. Az $f(x)$ függvény grafikonjához illesztettünk jobbról egy y tengellyel párhuzamos tengelyű parabolát, amelyre az alábbiak egyszerre teljesülnek:

a) a két görbe törésmentesen csatlakozik egymáshoz a 2 abszcisszájú pontban;

b) a parabola és az x tengely által közrefogott síkidom területe egyenlő az $f(x)$ grafikonja és az x tengely által bezárt síkidom területével.

Adjuk meg a parabola egyenletét. (*16 pont*)

Németh László
Fonyód

Megoldásvázlatok a 2020/6. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a*) *Adott két függvény:*

$$f(x)=\frac{2x+9}{3};\qquad g(x)=\sqrt{x^2+4x+4}\,.$$

Van-e olyan $x\in\mathbb{R}$, ahol a két függvény helyettesítési értéke megegyezik? (*6 pont*)

b) *Van-e olyan p valós szám, amelyre az alábbi két kifejezés értéke egyenlő:*

$$A=\log_2(p+2)+\log_2(p-2);\qquad B=1+\log_2(p+10)?\qquad (6\ pont)$$

Megoldás. *a*) *1. megoldás.* $g(x)=\sqrt{(x+2)}^2=|x+2|$,

$$2x+9=3\cdot|x+2|.$$

Ha $x<-2$, akkor

$$2x+9=-3x-6,$$

$$x=-3.$$

Ha $x \geqslant -2$, akkor

$$2x + 9 = 3x + 6,$$
$$x = 3.$$

Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy az ekvivalenciára való jogos hivatkozással.

2. megoldás. $2x + 9 = 3\sqrt{x^2 + 4x + 4}$, ha $x \geqslant \frac{-9}{2}$, akkor négyzetre emelhetünk:

$$4x^2 + 36x + 81 = 9x^2 + 36x + 36,$$
$$9 = x^2,$$
$$x = \pm 3.$$

Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy az ekvivalenciára való jogos hivatkozással.

b) $$\log_2(p+2) + \log_2(p-2) = 1 + \log_2(p+10).$$

Kikötés: $p > 2$,

$$\log_2(p^2 - 4) = \log_2(2p + 20).$$

Mivel a $\log_2 x$ függvény szigorúan monoton:

$$p^2 - 4 = 2p + 20$$
$$p^2 - 2p - 24 = 0,$$
$$p_1 = -4; \;\; p_2 = 6.$$

Csak a $p = 6$ megoldás tesz eleget a feltételeknek. Az alaphalmazon ekvivalens átalakításokat végeztünk.

2. *Solymász tanár úr biológia órájára* 26 *végzős jár, és valamennyien részt vesznek imádott biológia tanáruk humánetológia óráján is. Félévkor a tanár úr (nevelő célzattal) meglehetősen szigorú volt, ezért* 21*-en nem kaptak ötöst biológiából és* 19*-en nem kaptak ötöst humánetológiából. Ugyanakkor* 8*-an kaptak ötöst legalább az egyik tárgyból.*

a) Hány végzős kapott ötöst mindkét tárgyból? (*4 pont*)

A biológia próbaérettségit mind a 26 *diák megírta. A tanár úr korábbi szigorúsága elérte célját, mert a próbaérettségi már sokkal jobban sikerült. Senki sem kapott elégtelen, vagy elégséges osztályzatot. A közepes, jó és jeles osztályzatok száma ebben a sorrendben egy mértani sorozat három egymást követő eleme lett. A csoport átlaga* $\frac{60}{13}$ *lett.*

b) Számoljuk ki a próbaérettségi osztályzatainak szórását. Az eredményt két tizedesjegy pontossággal adjuk meg. (*8 pont*)

Megoldás. *a)* *1. megoldás.* 5 tanulónak van ötöse biológiából, 7 tanulónak van ötöse humánetológiából; $5+7=12$, de csak 8 tanulónak van legalább az egyik tárgyból ötöse, ezért mindkét tárgyból 4 tanulónak van ötöse.

2. megoldás. Ha mindkét tárgyból x tanulónak van ötöse, akkor csak biológiából $5-x$ tanulónak van ötöse. Csak humánetológiából $7-x$ tanulónak van ötöse.

$$5-x+x+7-x=8.$$

Tehát mindkét tárgyból 4 tanulónak van ötöse.

b) *1. megoldás.* A hármas, négyes és ötös osztályzatok száma: a, $a\cdot q$, $a\cdot q^2$.

$$a+aq+aq^2=26,$$

$$\frac{3a+4aq+5aq^2}{26}=\frac{60}{13}.$$

Mindkét egyenletből a-t kifejezve:

$$\frac{26}{1+q+q^2}=\frac{120}{3+4q+5q^2}.$$

Rendezés után:

$$5q^2-8q-21=0,\quad q_1=-\frac{7}{5};\ q_2=3.$$

Csak a $q=3$ felel meg a feladat feltételeinek, tehát 2 db hármas, 6 darab négyes és 18 darab ötös osztályzat született.

Az osztályzatok szórása: $0{,}6249\approx 0{,}62$.

2. megoldás. Legyen a hármasok száma a, a négyesek száma b, az ötösök száma c. Ekkor az alábbi egyenleteket kapjuk:

I. $$a+b+c=26,$$

II. $$\frac{3a+4b+5c}{26}=\frac{60}{13},$$

III. $$b^2=ac.$$

Az első egyenletből: $a=26-b-c$. A második egyenletet átalakítva: $3a+4b+5c=120$. Az előző összefüggést beírva: $3(26-b-c)+4b+5c=120$. Ebből: $b=42-2c$ és $a=c-16$.

Így a harmadik egyenlet: $(42-2c)^2=(c-16)\cdot c$. Az egyenletet rendezve: $3c^2-152c+1764=0$, ennek megoldásai: $c_1=18$ és $c_2=\frac{98}{3}$.

Csak a $c=18$ felel meg a feladat feltételeinek, tehát 2 db hármas, 6 darab négyes és 18 darab ötös osztályzat született.

Az osztályzatok szórása: $0{,}6249\approx 0{,}62$.

3. *a) Határozzuk meg az* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x^2-24x+2$ *függvény lokális maximumhelyét.* (*5 pont*)

b) Mekkora területet zár be a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3x^2-6x-24$ *függvény grafikonja és az x tengely?* (*6 pont*)

c) Mennyi az $a_n=\frac{11n-5}{3n+8}$ *sorozat határértéke?* (*3 pont*)

Megoldás. *a)* A deriváltfüggvény: $f'(x)=3x^2-6x-24$. A függvénynek ott lehet lokális szélsőértéke, ahol a derivált nulla.

$$3x^2-6x-24=0,\quad x_1=-2;\ x_2=4.$$

x	$x<-2$	$x=-2$	$-2<x<4$	$x=4$	$4<x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\uparrow$	lok. max. h.	$\downarrow$	lok. min. h.	$\uparrow$

Vagy a táblázat helyett: A második derivált, $f''(x)=6x-6$, $f''(-2)=-18<0$ és $f''(4)=18>0$.

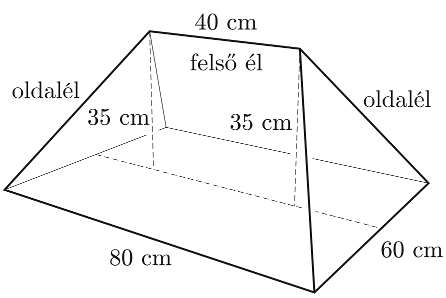
Tehát a függvénynek az $x=-2$ helyen van lokális maximuma.

b)
$$3x^2-6x-24=0,\quad x_1=-2;\ x_2=4,$$

$$T=\left|\int_{-2}^{4}(3x^2-6x-24)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\left[x^3-3x^2-24x\right]_{-2}^{4}\right|=$$

$$=\left|(64-48-96)-(-8-12+48)\right|=108.$$

c)
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{11n-5}{3n+8}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{11-\frac{5}{n}}{3+\frac{8}{n}}=\frac{11-0}{3+0}=\frac{11}{3}.$$



4. *Peti bá' egy téglalap alapú babaházat készített a lányainak. A téglalap oldalai* 60 cm *és* 80 cm. *A babaházra egy levehető „sátortetőt" készített. A tető felső éle* 40 cm *hosszú, és a babaház téglalap alakú mennyezetének hosszabbik középvonala felett, attól* 35 cm *távolságra van. A tető oldalélei egyenlő hosszúak.*

a) Számítsuk ki az oldalélek hosszát és a vízszintes síkkal bezárt szögüket. (*7 pont*)

Zsófi a tető trapéz alakú részére egy téglalap alakú díszt szeretne felragasztani. A téglalap egyik oldala illeszkedik a trapéz alapvonalára, két csúcsa pedig a trapéz száraira.

b) Mekkora a legnagyobb területű téglalap területe, amelyet a megadott módon el lehet helyezni a tetőn? A választ négyzetcentiméterben, egész számra kerekítve adjuk meg. (*6 pont*)

Megoldás. *a*) (Az *4.a. ábra* jelölései alapján.) Az oldalél hosszának kiszámítása:

1. lehetőség. Az AT_1F_1 derékszögű háromszögben $F_1T_1 = 20$ és $AF_1 = 30$. A Pitagorasz-tétel az AF_1T_1 derékszögű háromszögben: $AT_1 = \sqrt{20^2+30^2} = 10\sqrt{13} \approx 36{,}06$. Pitagorasz-tétel az AT_1E derékszögű háromszögben: $AE^2 = AT_1^2 + ET_1^2$.

$$AE = \sqrt{35^2 + \left(10\sqrt{13}\right)^2} = \left(\sqrt{30^2 + \left(5\sqrt{65}\right)^2}\right) = 5\sqrt{101} \approx 50{,}25 \text{ cm}$$

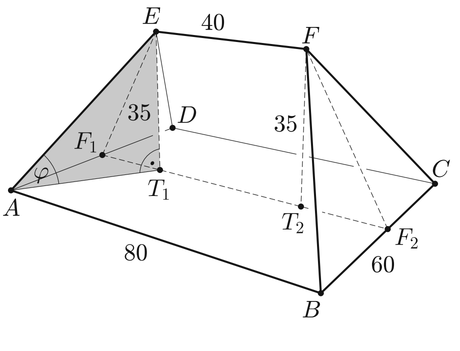
az oldalél hossza.

2. lehetőség. Pitagorasz-tétel az EF_1T_1 derékszögű háromszögben: $EF_1 = \sqrt{20^2+35^2} = 5\sqrt{65} \approx 40{,}31$. Pitagorasz-tétel az AF_1E derékszögű háromszögben: $AE^2 = AF_1^2 + EF_1^2$.

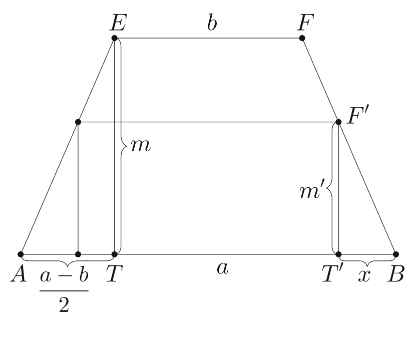
$$AE = \sqrt{35^2 + \left(10\sqrt{13}\right)^2} = \left(\sqrt{30^2 + \left(5\sqrt{65}\right)^2}\right) = 5\sqrt{101} \approx 50{,}25 \text{ cm}$$

az oldalél hossza.

Az oldalél vízszintes síkkal bezárt szöge a 4.a. ábrán φ-vel jelölt EAT_1 szög, amelyre $\sin\varphi = \frac{35}{5\sqrt{101}} \approx 0{,}6965$, ahonnan: $\varphi = 44{,}15°$.



4.a. ábra



4.b. ábra

b) A *4.b. ábra* jelöléseit használva: $ATE\triangle \sim BT'F'\triangle$, mert szögeik egyenlők.

$$\frac{m'}{x} = \frac{2m}{a-b} \;\Leftrightarrow\; m' = \frac{2m}{a-b}\cdot x.$$

Ebből a téglalap területe:

$$T(x)=(a-2x)\cdot\frac{2m}{a-b}\cdot x=\frac{2m}{a-b}\cdot(-2x^2+ax)=-\frac{4m}{a-b}\cdot\left(x^2-\frac{a}{2}\cdot x\right)=$$

$$=-\frac{4m}{a-b}\cdot\left(\left(x-\frac{a}{4}\right)^2-\frac{a^2}{16}\right)=-\frac{4m}{a-b}\cdot\left(x-\frac{a}{4}\right)^2+\frac{ma^2}{4(a-b)}.$$

Tehát a terület maximális, ha $x=\frac{a}{4}=20$ cm.

II. rész

5. *A DÖ* 900 *pólót rendelt E5vös Napra. A pólókat két géppel nyomtatták. A gépeket kezdetben rosszul állították be, ezért az első gép (Horribile dictu!) a rajta nyomtatott* 400 *póló* 2%*-ára tévesen, az E5vös helyett az Eötvös feliratot nyomtatta, és a másik gép ugyanezt a hibát követte el a rajta nyomtatott pólók* 3,4%*-ával. A minőségellenőrzéskor Bocó a* 900 *alaposan összekevert pólóból véletlenszerűen kiválasztott egyet, és azon hibás volt a felirat. (Ezen persze kellőképpen elkeseredett …)*

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a hibás pólót a második gépen nyomtatták? (*5 pont*)

A DÖ úgy döntött, hogy a hibásan nyomtatott póló árából először 500 Ft *árengedményt ad, de a kereslet nagyon minimális volt, ezért az új árat még tovább kellett csökkenteni, annak p%-ával. Így a póló* 50 Ft*-tal drágább lett, mintha először engedték volna le az árát p%-kal és utána* 500 Ft*-tal, viszont* 90 Ft*-tal olcsóbb lett, mint ha mindkétszer az aktuális ár p%-ával csökkentették volna az árát.*

b) Mennyi volt a póló eredeti ára, és hány százalékos volt a csökkentés? (*11 pont*)

Megoldás. *a) 1. megoldás.* Az első gépen 8, a második gépen 17 hibás pólót nyomtattak. Tehát 25 hibás póló van, ez az összes esetek száma. A kedvező esetek száma a második gépen készült pólók száma, azaz 17.

Így a kérdéses valószínűség: $\frac{17}{25}=0{,}68$.

2. megoldás. Az első gépen 8, a második gépen 17 hibás pólót nyomtattak. Legyen A az az esemény, hogy a pólót a második gépen nyomtatták, B pedig az az esemény, hogy a kiválasztott póló hibás. A keresett valószínűség: $p(A\mid B)=$ $=\frac{p(AB)}{p(B)}$.

$$p(AB)=\frac{17}{900},\qquad p(B)=\frac{25}{900},\qquad p(A\mid B)=\frac{\frac{17}{900}}{\frac{25}{900}}=\frac{17}{25}=0{,}68.$$

3. megoldás. Annak valószínűsége, hogy egy póló az első gépen készült: $p(1.)=\frac{4}{9}$.

Annak valószínűsége, hogy egy póló a második gépen készült: $p(2.)=\frac{5}{9}$.

Annak valószínűsége, hogy egy póló hibás, ha az első gépen készült: $p(H\mid 1.)=$ $=0{,}02$.

Annak valószínűsége, hogy egy póló hibás, ha a második gépen készült: $p(H \mid 2.) = 0{,}034$.

Bayes tétele alapján annak valószínűsége, hogy egy póló a második gépen készült, feltéve, hogy hibás:

$$p(2. \mid H) = \frac{p(H \mid 2.) \cdot p(2.)}{p(H \mid 1.) \cdot p(1) + p(H \mid 2.) \cdot p(2.)}.$$

Tehát a keresett valószínűség:

$$\frac{0{,}034 \cdot \frac{5}{9}}{0{,}02 \cdot \frac{4}{9} + 0{,}034 \cdot \frac{5}{9}} = 0{,}68.$$

b) Legyen x a póló árleszállítás előtti ára forintban, és legyen $q = 1 - \frac{p}{100}$. Ha a két árleszállítás fordított sorrendben történt volna, akkor a póló kétszeres árleszállítás utáni ára $xq - 500$ forint, tehát

$$(xq - 500) + 50 = (x - 500) \cdot q.$$

Ha mindkét alkalommal $p\%$ a csökkentés, akkor az új ár xq^2 forint, tehát

$$(x - 500) \cdot q + 90 = xq^2.$$

Az első egyenletből $q = 0{,}9$, azaz $p = 10$. A q értékét a második egyenletbe behelyettesítve:

$$(x - 500) \cdot 0{,}9 + 90 = x \cdot 0{,}81,$$

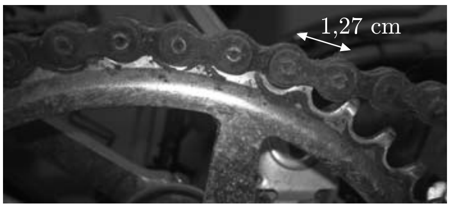
$x = 4000$. A póló eredeti ára 4000 Ft, p értéke pedig 10.

Ellenőrzés: $4000 - 500 = 3500$, 10%-kal csökkentve 3150;
4000 csökkentve 10%-kal 3600, $3600 - 500 = 3100$;
4000 csökkentve 10%-kal 3600, újabb 10%-kal csökkentve 3240.

$3150 = 3100 + 50$ és $3150 = 3240 - 90$, tehát a kapott eredmények helyesek.

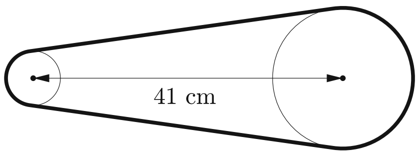
6. *Fixi kerékpárunkon az első lánctányéron* 46 *fog található, a hátsó fogaskeréken pedig* 18 *fog van. (Az első lánctányérhoz rögzítik a pedált, a hátsó fogaskerék pedig a hátsó keréken van.) Az* 1. ábrán *a lánc felülnézeti képe látható, a második ábrán pedig az, hogy miként illeszkedik a lánc a fogaskerékre. Két láncszem tengelye* 1,27 cm *távolságra van egymástól* (*lásd* 2. ábra).

1. ábra



2. ábra

a) *Milyen hosszú lánc férne az első lánctányérra, ha teljesen körbetekernénk lánccal?* (*3 pont*)



3. ábra

A két fogaskerék (a pedál és a hátsó tengely) középpontja 41 cm *van egymástól* (3. ábra) *és a lánc teljesen feszes.*

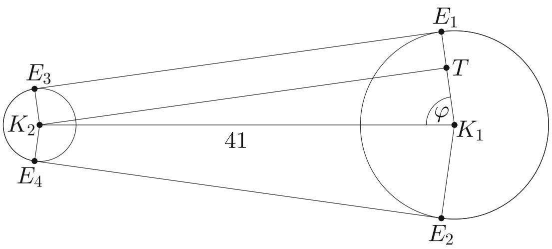
b) Milyen hosszú lánc van a kerékpáron? (Válaszunkat centiméterben, két tizedesjegy pontossággal adjuk meg.) (*10 pont*)

A láncokat gyártó üzemben 160 *láncszemből álló láncdarabokat készítenek. A mérések alapján a láncdarabok* 2%*-ában egy szemmel kevesebb van, mint az előírás. A láncszemek számát egy számítógép ellenőrzi egy futószalagon. A futószalag különböző pontjain véletlenszerűen kiválaszt egy láncdarabot és meghatározza, hány láncszemből áll, de a futószalag folyamatosan mozog, ezért nem lehet kiemelni a hibás láncdarabot. Ennek megfelelően akár az az extrém eset is előfordulhat, hogy ugyanazt a láncdarabot ellenőrzi csak, akár többször is. Egy félórás időintervallumban* 5000 *láncdarab kering a futószalagon.*

c) Határozzuk meg a fél óra alatt hibásnak talált láncdarabok várható értékét. (*3 pont*)

Megoldás. *a*) Az első lánctányérra annyi láncszem fér, ahány fog található rajta, tehát 46. Így a lánctányérra tekert lánc hossza $46 \cdot 1{,}27 = 58{,}42$ cm.

b) A lánc az *ábrának* megfelelően két kör közös külső érintőszakaszaiból és két körívből áll. Az első kör kerülete az előbbiek alapján 58,42 cm, így a kör sugara: $r_1 = 9{,}298$ cm. A hátsó fogaskeréken 18 fog van, így a kerülete: $18 \cdot 1{,}27 = 22{,}86$. A kör sugara: $r_2 = 3{,}638$ cm.



Az ábra jelöléseit használva: K_2T párhuzamos E_3E_1-gyel. Ekkor $K_1T = r_1 - r_2 = 5{,}66$. Az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra, tehát a K_2K_1T háromszög derékszögű. Felírva Pitagorasz tételét:

$$E_3E_1 = K_2T = \sqrt{K_2K_1^2 - (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{41^2 - 5{,}66^2} = 40{,}61 \text{ cm}.$$

Ugyanebben a háromszögben: $\cos\varphi = \frac{5{,}66}{41} \approx 0{,}138$, ebből $\varphi = 82{,}065°$. Az első lánctányéron lévő ív hossza:

$$i_1 = \frac{360° - 2\varphi}{180°} \cdot r_1 \cdot \pi \approx 31{,}786 \text{ cm}.$$

A hátsó fogaskeréken lévő ív hossza:

$$i_2 = \frac{2\varphi}{180^\circ} \cdot r_2 \cdot \pi \approx 10{,}421 \text{ cm.}$$

Tehát a lánc hossza: 123,43 cm.

c) A hibás láncdarabok binomiális eloszlású valószínűségi változót alkotnak, melynek paraméterei $n = 5000$ és $p = 0{,}02$. Így a várható érték: $n \cdot p = 5000 \cdot 0{,}02 = 100$.

7. *Ábel elkésett a matematika óráról. Amikor tanára kérdőre vonta, a következőképpen mentegetőzött: „Tanár úr! Fáj a lábam, ezért nem tudtam lépcsőn feljönni a harmadik emeletre. Lifttel kellett jönnöm, de a liftre ki van írva, hogy* 13 *fő használhatja, és sokáig tartott, amíg összejött a* 13 *ember.” (Ezzel persze kitűnő lehetőséget biztosított matematika tanárának, hogy elmagyarázza a „legfeljebb” és „legalább” szavak matematikai lényegét ...)*

Az E5vös Napokon az Igazgató Úr úgy döntött, hogy a tizenkettedikesek szabadon használhatják a liftet. A végzősök úgy gondolták, hogy ezt a lehetőséget maximálisan kihasználják, ezért minden esetben 13*-an szálltak be az üres liftbe.*

a) Bizonyítsuk be, hogy minden ilyen alkalommal biztosan utazott a liftben legalább három olyan diák, akik osztálytársak voltak. (Az iskolában hat végzős osztály van.) (*3 pont*)

Az E5vös Napokon a Ki Mit Tud?-ra 12 *fős diákzsűri is alakult, amelyet a végzős évfolyamból véletlenszerűen választottak ki.*

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy minden osztályt pontosan két fő képviselt, ha az osztálylétszámok: 12.*A:* 32 *fő,* 12.*B:* 33 *fő,* 12.*C:* 31 *fő,* 12.*D:* 30 *fő,* 12.*E:* 29 *fő,* 12.*F:* 28 *fő?* (*6 pont*)

A streetball döntője után a hat résztvevő kezet fogott egymással. Mivel a meccs kissé elfajult, ezért voltak, akik nem fogtak kezet. Flóra megkérdezte a résztvevőket, hogy hány emberrel fogtak kezet, és a következő válaszokat kapta: 5; 4; 3; 3; 2; 2. *Flóra ezek után a következőt mondta: „Biztos, hogy van közöttetek legalább egy ember, aki nem tud számolni.”*

c) Mire alapozta állítását? (*3 pont*)

Az E5vös Napok végén Főző úr, a technikus visszapakolta a kiadott eszközöket kis kuckójába. Lelkes segítői is akadtak, akik a kuckó elé odapakoltak két létrát, három fekete dobozt, négy projektort és öt vetítővásznat, meglehetősen nagy összevisszaságban. Főző úr, ezeket véletlenszerű sorrendben, egyesével bepakolta a helyére.

d) Hányféle módon történhetett ez, ha az azonos típusú eszközöket nem lehet megkülönböztetni egymástól? (*4 pont*)

Megoldás. *a*) Alkalmazzuk a skatulya elvet, legyenek az osztályok a skatulyák. A liftben $6 \cdot 2 + 1$ diák utazott. Így a skatulya elv általános alakja alapján van legalább egy olyan osztály, amelyből legalább három diák utazott a liftben.

b) A végzős évfolyamon összesen 183 diák van. Közülük választunk ki 12 diákot, így az összes esetek száma: $\binom{183}{12}$.

Az egyes osztályokból 2-2 főt rendre $\binom{32}{2}$, $\binom{33}{2}$, $\binom{31}{2}$, $\binom{30}{2}$, $\binom{29}{2}$, $\binom{28}{2}$ módon választhatjuk ki. Mivel ezeket egymástól függetlenül választhatjuk, ezért a kedvező esetek száma:

$$\binom{32}{2}\cdot\binom{33}{2}\cdot\binom{31}{2}\cdot\binom{30}{2}\cdot\binom{29}{2}\cdot\binom{28}{2}.$$

A keresett valószínűség:

$$\frac{\binom{32}{2}\cdot\binom{33}{2}\cdot\binom{31}{2}\cdot\binom{30}{2}\cdot\binom{29}{2}\cdot\binom{28}{2}}{\binom{183}{12}}=0{,}00399\approx 0{,}004.$$

c) Tekintsük a résztvevőket egy hatpontú egyszerű gráf csúcsainak. Két csúcs akkor van összekötve, ha a résztvevők kezet fogtak. Az egyes csúcsok fokszámainak összege: $5+4+3+3+2+2=19$. Mivel a csúcsok fokszámainak összege az élek számának kétszerese, így ez nem lehet páratlan szám.

d) A sorrendek száma az ismétléses permutáció segítségével számolható ki:

$$P_{14}^{\{2;3;4;5\}}=\frac{14!}{2!\cdot 3!\cdot 4!\cdot 5!}=2\,522\,520.$$

Tehát $2\,522\,520$-féle sorrendben pakolhatta be a dolgokat.

8. *Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben az alábbi ponthalmazokat:*

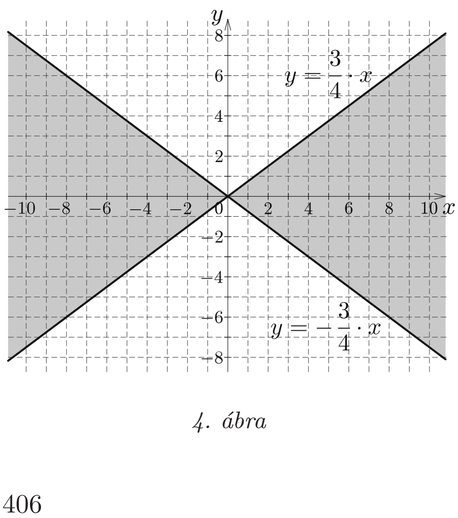
a) $A:=\{P(x;y)\mid 9x^2-16y^2\geqslant 0\}$. (*5 pont*)

b) $B:=\{Q(x;y)\mid x^2+y^2\leqslant 25\}$. (*3 pont*)

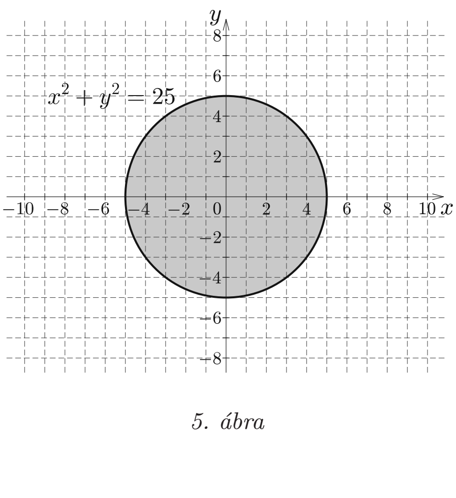
c) *Mekkora az $A\cap B$ halmaz területe?* (*8 pont*)

Megoldás. *a*) $\qquad 9x^2-16y^2=(3x-4y)\cdot(3x+4y)\geqslant 0,$

$3x-4y\leqslant 0$ és $3x+4y\leqslant 0$, vagy $3x-4y\geqslant 0$ és $3x+4y\geqslant 0$ (*4. ábra*).



4. ábra



5. ábra

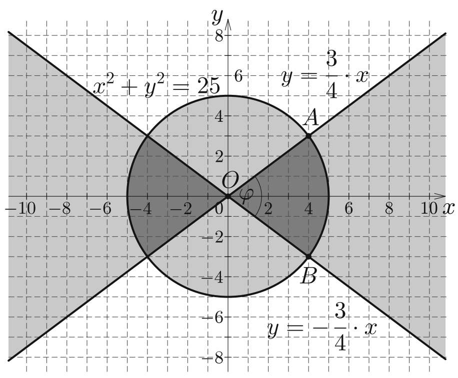
b) A keresett pontok az origó középpontú, 5 egység sugarú kör belseje és a körvonal (*5. ábra*).

c) A metszet két körcikk, amelyeket az egyenesek és az 5 egység sugarú kör határolnak (*6. ábra*). A körcikkekhez tartozó φ középponti szögre:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{3}{4},\quad \text{ebből} \quad =73{,}74^\circ.$$

A metszet területe a két egybevágó körcikk területének összege:

$$T=2\cdot\frac{73{,}74^\circ}{360^\circ}\cdot 5^2\pi=32{,}18.$$



6. ábra

A terület határozott integrál segítségével is kiszámítható. Az egyik körcikk felének területe:

$$\frac{T}{2}=\left|\int_0^4\frac{3}{4}x\,\mathrm{d}x\right|+\left|\int_4^5\sqrt{25-x^2}\,\mathrm{d}x\right|,$$

$$\int_0^4\frac{3}{4}x\,\mathrm{d}x=\left[\frac{3}{8}x^2\right]_0^4=6,$$

$$\int_4^5\sqrt{25-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_{\arcsin\frac{4}{5}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{25-25\sin^2 t}\cdot 5\cos t\,\mathrm{d}t=\int_{\arcsin\frac{4}{5}}^{\frac{\pi}{2}}25\cos^2 t\,\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{25}{2}\cdot\int_{\arcsin\frac{4}{5}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2t+1)\,\mathrm{d}t=\frac{25}{2}\cdot\left[\frac{1}{2}\sin 2t+t\right]_{\arcsin\frac{4}{5}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{25}{2}\left(\left(0+\frac{\pi}{2}\right)-\left(\frac{12}{25}+\arcsin\frac{4}{5}\right)\right)=\frac{25}{4}\pi-6-\frac{25}{2}\arcsin\frac{4}{5}.$$

Tehát a keresett terület:

$$2T=4\cdot\left(6+\frac{25}{4}\pi-6-\frac{25}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right)=25\pi-50\cdot\arcsin\frac{4}{5}=32{,}18.$$

9. *Egy piramisjáték elindítója az első héten öt embert szervezett be. A szervezés jól folytatódott, ezért a második héttől kezdődően a hetente beszervezettek száma a következő sorozat szerint alakult:*

$$a_n=3\cdot a_{n-1}-8.$$

a) Összesen hányan vettek már részt az ötödik héten a játékban? (*3 pont*)

b) Igazoljuk, hogy a sorozat utolsó számjegyei periodikusan ismétlődő sorozatot alkotnak. (*5 pont*)

c) Bizonyítsuk be, hogy a sorozat n-edik eleme a másodiktól kezdve: $a_n = 3^{n-1} + 4$. (*8 pont*)

Megoldás. *a*)

$$a_1 = 5,$$
$$a_2 = 3 \cdot 5 - 8 = 7,$$
$$a_3 = 3 \cdot 7 - 8 = 13,$$
$$a_4 = 3 \cdot 13 - 8 = 31,$$
$$a_5 = 3 \cdot 31 - 8 = 85.$$

Tehát az ötödik héten $5 + 7 + 13 + 31 + 85 = 141$ fő vett részt a játékban.

b) *1. megoldás.* A sorozat elemeinek utolsó számjegyei az elemek 10-zel való osztási maradékai. Az osztási maradékokkal ugyanazt a műveletet kell végrehajtani, mint az eredeti számokkal.

Az osztási maradékokból képzett (b_n) sorozat elemei rendre:

	$b_1 = 5,$
$3 \cdot 5 - 8 = 7$, ennek 10-zel való osztási maradéka:	$b_2 = 7,$
$3 \cdot 7 - 8 = 13$, ennek 10-zel való osztási maradéka:	$b_3 = 3,$
$3 \cdot 3 - 8 = 1$, ennek 10-zel való osztási maradéka:	$b_4 = 1,$
$3 \cdot 1 - 8 = -5$, ennek 10-zel való osztási maradéka:	$b_5 = 5.$

És ettől kezdve minden ismétlődik, hiszen ugyanazokkal a számokkal végezzük ugyanazokat a műveleteket.

2. megoldás. Használjuk fel a feladat *c*) részében megadott $a_n = 3^{n-1} + 4$ képletet. Vizsgáljuk a három hatványainak 10-zel való osztási maradékait, ezekkel ugyanazokat a műveleteket kell végrehajtani, mint az eredeti számokkal:

$3^0 = 1$, ennek 10-zel való osztási maradéka:	1,
$3^1 = 3 \cdot 3^0$, ennek 10-zel való osztási maradéka:	$3 \cdot 1 = 3$,
$3^2 = 3 \cdot 3^1$, ennek 10-zel való osztási maradéka:	$3 \cdot 3 = 9$,
$3^3 = 3 \cdot 3^2$, ennek 10-zel való osztási maradéka:	$3 \cdot 9 = 27$, azaz 7,
$3^4 = 3 \cdot 3^3$, ennek 10-zel való osztási maradéka:	$3 \cdot 7 = 21$, azaz 1.

Ettől kezdve az osztási maradékokban ismétlődik az $1; 3; 9; 7$ sorozat. Ekkor az eredeti sorozat utolsó számjegyei az $5; 7; 3; 1$ ismétlődő sorozatot alkotják.

c) *1. megoldás.* A bizonyítást teljes indukcióval végezzük: $a_1 = 5 = 3^0 + 4$, az állítás igaz.

Tegyük fel, hogy $n = k$-ra igaz, hogy $a_k = 3^{k-1} + 4$. Állítás: $n = k + 1$-ra igaz, hogy $a_{k+1} = 3^k + 4$.

Bizonyítás: A rekurziós megadással: $a_{k+1} = 3 \cdot a_k - 8$. Az indukciós feltételt felhasználva: $a_{k+1} = 3 \cdot (3^{k-1} + 4) - 8 = 3^k + 4$.

Beláttuk, hogy ha az állítás igaz a k természetes számra, akkor a $k+1$ természetes számra is igaz. Mivel az állítás igaz az $n=1$-re, ezért minden természetes számra igaz.

2. megoldás. Írjuk fel a sorozat elemeit az első elem és a rekurziós képlet segítségével:

$$a_1 = 5 = 3^0 + 4,$$

$$a_2 = 3 \cdot 5 - 8,$$

$$a_3 = 3 \cdot (3 \cdot 5 - 8) - 8 = 3^2 \cdot 5 - 3 \cdot 8 - 8 = 3^2 \cdot 5 - (3+1) \cdot 8,$$

$$a_4 = 3 \cdot (3^2 \cdot 5 - 3 \cdot 8 - 8) - 8 = 3^3 \cdot 5 - 3^2 \cdot 8 - 3 \cdot 8 - 8 = 3^3 \cdot 5 - (3^2 + 3 + 1) \cdot 8.$$

Ezek alapján: $a_n = 3^{n-1} \cdot 5 - (3^{n-2} + 3^{n-3} + \ldots + 1) \cdot 8$. A mértani sorozat összegképletével:

$$a_n = 3^{n-1} \cdot 5 - \frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1} \cdot 8 = 3^{n-1} \cdot 5 - 4 \cdot 3^{n-1} + 4 = 3^{n-1} + 4.$$

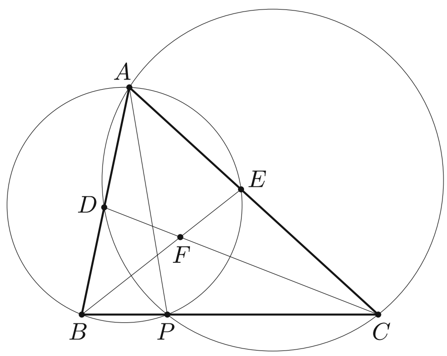
Balga Attila, Székely Péter
Budapest V. Kerületi Eötvös József Gimnázium

Matematika feladatok megoldása

B. 4979. *Az ABC hegyesszögű háromszögben D és E rendre az AB, illetve az AC oldalnak belső pontja. A BE és CD szakaszok metszéspontja F. Bizonyítsuk be, hogy ha $BC^2 = BD \cdot BA + CE \cdot CA$, akkor $ADFE$ húrnégyszög.*

(*5 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

I. megoldás. Legyen a BC egyenes és az $AEB\triangle$ köréírt körének B-től különböző metszéspontja P. A C pontnak erre a körre vonatkozó hatványa $CP \cdot BC = CE \cdot CA$.



Tudjuk, hogy $BC^2 = BD \cdot BA + CE \cdot CA$. Utóbbi egyenletből kivonva előbbit, azt kapjuk, hogy

$$BC \cdot (BC - CP) = BD \cdot BA.$$

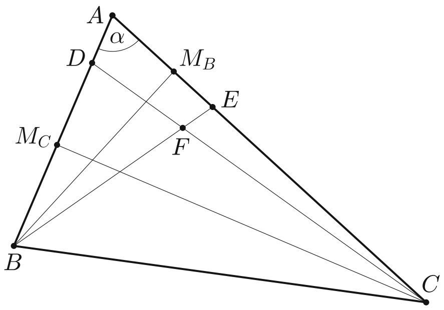
Viszont $BC - CP = BP$, így $BP \cdot BC = BD \cdot BA$.

Az egyenlet jobb oldala a B pontnak az $ADC\triangle$ köréírt körére vonatkozó hatványa. Ezek szerint az egyenlőség miatt P rajta van az $ADC\triangle$ köréírt körén is.

Legyen $APC\sphericalangle = \varphi$. Ekkor kerületi szögek egyenlősége miatt az $ADPC$ körön $ADC\sphericalangle = APC\sphericalangle = \varphi$. Tudjuk, hogy $APB\sphericalangle = 180° - \varphi$. Az $ABPE$ körön a kerületi szögek miatt $AEB\sphericalangle = APB\sphericalangle = 180° - \varphi$. Így $ADF\sphericalangle = ADC\sphericalangle = \varphi$ és $AEF\sphericalangle = AEB\sphericalangle = 180° - \varphi$, mivel D, F, C, illetve E, F, B egy egyenesen vannak. Ezek szerint $ADF\sphericalangle + AEF\sphericalangle = 180°$, tehát $ADFE$ valóban húrnégyszög, hiszen két szemközti szögének összege $180°$.

Diszkusszió: Akkor lehetne probléma az ábrával – és így a bizonyítással is –, hogyha az $AEB\triangle$ köréírt köre érinti BC-t, vagy pedig a BC szakaszon kívül metszi másodszor. A C-ből felírt hatvány a körre ekkor is helyes lesz, így $CE \cdot CA = CP \cdot BC$ teljesülni fog. Hogyha a BC szakaszon kívül metszi a kör az egyenest, az csak B-n túl lehet, így ha P „rossz" helyen van, akkor $CP \geqslant BC$ teljesülni fog. Ennek alapján $CP \cdot BC \geqslant BC^2$, így a $BC^2 = BD \cdot BA + CE \cdot CA$ egyenletben $BD \cdot BA \leqslant 0$, ami nyilvánvalóan nem lehetséges, mert ekkor D nem belső pontja lenne az AB oldalnak. Ezek szerint a feltétel alapján a P pont a BC szakasz belső pontja, az ábra mindig megfelelő, és a bizonyítás helyes.

Tóth Balázs (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján



II. megoldás. Legyen az ABC háromszög A-nál fekvő belső szöge α, a B-ből, illetve C-ből induló magasságvonalak talppontjai pedig M_B és M_C.

A BC oldalra felírt koszinusztételből:

$$BC^2 = BA^2 + CA^2 - 2 \cdot BA \cdot CA \cdot \cos\alpha, \tag{1}$$

valamint a feltétel szerint:

$$BC^2 = CA \cdot CE + BD \cdot BA. \tag{2}$$

(1) és (2) különbségéből:

$$0 = CA(CA - CE) + BA(BA - BD) - 2 \cdot BA \cdot CA \cdot \cos\alpha,$$
$$0 = AE \cdot CA + AD \cdot BA - 2 \cdot BA \cdot CA \cdot \cos\alpha.$$

Rendezés után:

$$2\cos\alpha = \frac{AE}{BA} + \frac{AD}{CA}. \tag{3}$$

Másrészt az ACM_C és ABM_B derékszögű háromszögekből $\cos\alpha$-t kifejezve:

$$2\cos\alpha = \frac{M_CA}{CA} + \frac{M_BA}{BA}. \tag{4}$$

(3) és (4) különbsége alapján:

$$\frac{AE-M_BA}{AB}=\frac{M_CA-AD}{AC},$$

$$\frac{EM_B}{AB}=\frac{DM_C}{AC}. \tag{5}$$

Átrendezés után $\sin\alpha$-val bővítve:

$$\frac{DM_C}{EM_B}=\frac{AC}{AB}=\frac{AC\cdot\sin\alpha}{AB\cdot\sin\alpha}=\frac{CM_C}{BM_B}.$$

Ez azt jelenti, hogy a DM_CC és EM_BB derékszögű háromszögek hasonlóak, a megfelelő szögek egyenlők: $M_CDC\sphericalangle=M_BEB\sphericalangle$. Mivel $M_BEB\sphericalangle=AEF\sphericalangle$, és az $M_CDC\sphericalangle$ mellékszöge $FDA\sphericalangle$, így

$$AEF\sphericalangle+FDA\sphericalangle=180^\circ,$$

azaz $AEFD$ valóban húrnégyszög.

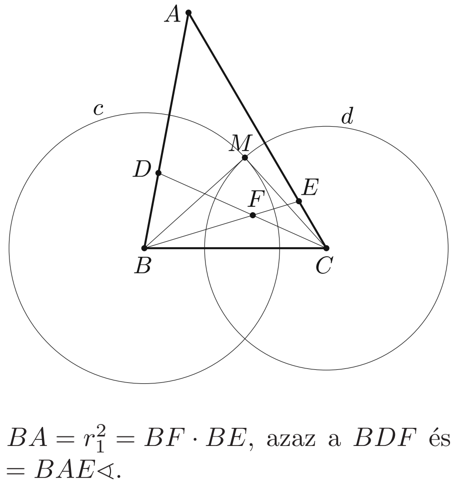
Ha a D és M_C pontok egybeesnek, akkor (5) miatt az E és M_B pontok is egybeesnek, az $ADFE$ négyszög két szemközti szöge derékszög, tehát ekkor is húrnégyszöget kapunk.

Kocsis Anett (Győr, Révai Miklós Gimn., 11. évf.)

III. megoldás. Tekintsük a B középpontú, $\sqrt{BD\cdot BA}=r_1$ sugarú c; és a C középpontú, $\sqrt{CE\cdot CA}=r_2$ sugarú d köröket. Ezekre a körökre invertálva az A pontot kapjuk a D és az E pontot, mivel úgy választottuk meg a sugarakat, hogy ez teljesüljön.

A feladatban szereplő feltétel szerint

$$BC^2=BD\cdot BA+CE\cdot CA=r_1^2+r_2^2,$$



tehát a Pitagorasz–tétel megfordítása értelmében a BCM háromszög derékszögű, vagyis a két kör bezárt szöge (ami a metszéspontjukba húzott érintők bezárt szöge) 90°. Ebben az esetben, ha valamelyik körre invertáljuk a másik kört, akkor annak a képe önmaga lesz, tehát invariáns alakzat. Ezeket felhasználva láthatjuk, hogy ha D-t invertáljuk a d, valamint E-t a c körre, akkor képeiknek egybe kell esniük, ez pedig csak a két egyenes metszéspontjában lehetséges, amit az *ábrán* F-fel jelöltünk.

Látható, hogy ebben az esetben $BD\cdot BA=r_1^2=BF\cdot BE$, azaz a BDF és BAE háromszögek hasonlók, tehát $DFB\sphericalangle=BAE\sphericalangle$.

Ekkor az $ADFE$ négyszög valóban húrnégyszög lesz, hiszen a szemközti szögeinek összege 180°. Ezzel állításunkat beláttuk.

Tubak Dániel (Szegedi Radnóti M. Kísérleti Gimn., 11. évf.)

Megjegyzés. A megoldás csak a következő tétel alkalmazásával teljes: Két inverzió sorrendje pontosan akkor cserélhető fel, ha az alapkörök merőlegesen metszik egymást.

Esetünkben az A pont c körre vonatkozó inverze a D pont, majd ennek a d-re vonatkozó inverze rajta van a CD egyenesen. Másrészt az A pont d-re vonatkozó inverze az E pont, majd ennek inverze a c-re a BE egyenesen van. Ha a két inverzió felcserélhető, akkor valóban csak a két egyenes metszéspontja, az F pont lehet a közös kétszeres inverz.

Vázoljuk az inverziók sorrendjére vonatkozó tétel bizonyítását.

Az inverzió szögtartó. Ebből következően az inverzió inverziótartó: ha P és Q egymás képei az i körre való inverziónál, és P', Q', i' ezek képei a j körre való inverziónál, akkor P' és Q' egymás képei az i'-re való inverziónál. Valóban, P és Q pontosan akkor egymás képei i-nél, ha a P-n is és Q-n is átmenő körök valamennyien merőlegesek i-re – ez a tulajdonság pedig megmarad, ha j-re invertálunk.

Tehát ha az i_1, i_2 körökre való inverziók kommutativitását vizsgáljuk, akkor áttranszformálhatjuk őket egy inverzióval, a transzformációk megmaradnak, kommutativitásuk ott is vizsgálható.

Két metsző körre vonatkozó inverzió két metsző egyenesre vonatkozó tükrözéssé változik, ha a két kör metszéspontja körüli inverziót alkalmazunk.

A szögtartás miatt akkor és csak akkor cserélhető fel a tükrözések sorrendje, ha a két egyenes merőleges egymásra.

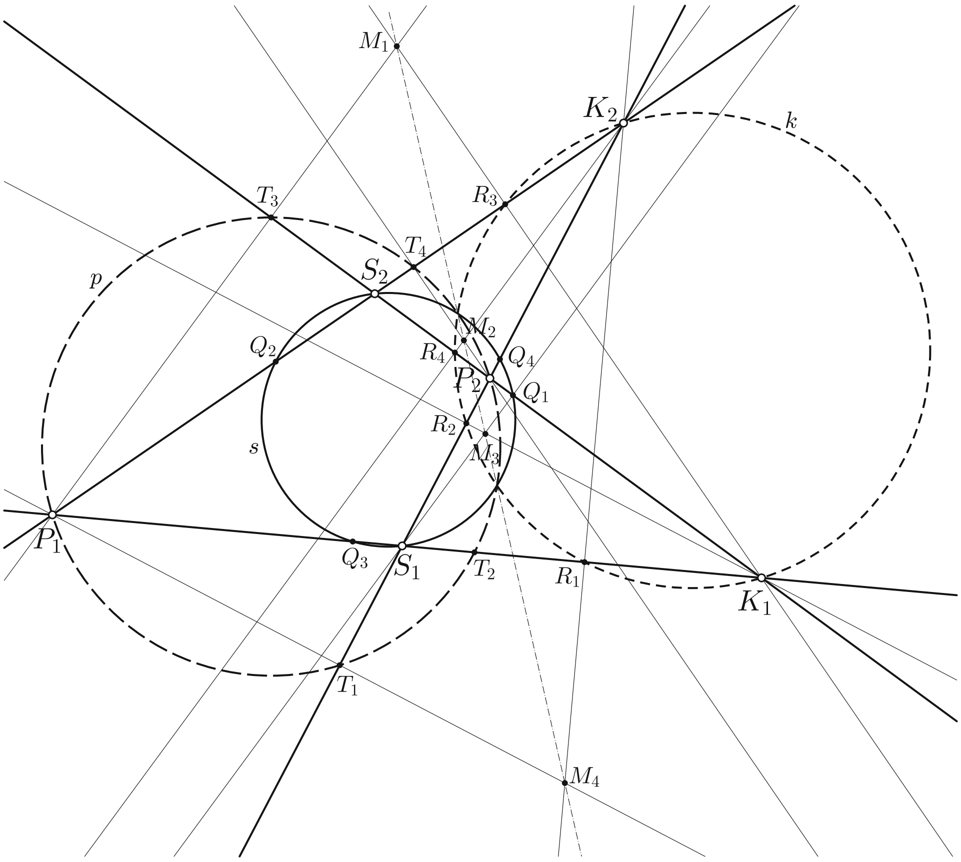
Összesen 36 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 30, 4 pontot 2, 3 pontot 1 tanuló. 2 pontos 2 tanuló, 1 pontos 1 tanuló dolgozata.

B. 4985. *Adott négy egyenes úgy, hogy közülük bármelyik három meghatároz egy háromszöget. Bizonyítsuk be, hogy ennek a négy háromszögnek a magasságpontja egy egyenesre illeszkedik.*

(*5 pont*)

Megoldás. A négy egyenes metszéspontjait betűzzük meg az ábrán látható módon P_1, P_2, K_1, K_2, S_1, S_2-vel. Az eredeti megoldás szerint ezek színeket is jelentenek. A betűzést úgy választottuk, hogy mindegyik egyenesen a K_i, P_j, S_k pontok közül pontosan egy helyezkedjen el, vagy más szóval bármely három egyenes által meghatározott háromszögnek mindhárom csúcsa különböző „színű”. A Thalész-tétel megfordításából látható, hogy az összes háromszög magasság-talppontjai rajta vannak az azonos nevű/színű pontok által meghatározott szakaszra mint átmérőre emelt körökön. A P_1P_2 Thalész-köre által kimetszett talppontokat T_i-vel, a K_1K_2 Thalész-köre által kimetszetteket R_j-vel, míg az S_1S_2 Thalész-köre által kimetszett magasság-talppontokat Q_k-val jelöltük. Legyenek továbbá a Thalész-körök ebben a sorrendben a p, k, s körök. A háromszögek magasságpontjai M_1, M_2, M_3 és M_4. Azt fogjuk belátni, hogy a magasságpontoknak a három körre vett hatványai egyenlők, ezért csak egy egyenesen lehetnek (már akkor is egy egyenesen kell legyenek, ha két körre egyenlő a hatványuk.)

Ha például a $P_1K_1S_2$ háromszög M_1 magasságpontjának vizsgáljuk a p körre (az ábrán szaggatott vonallal jelzett) vonatkozó hatványát és a k körre (az ábrán a pontokkal jelölt kör) vonatkozó hatványát, akkor ehhez a két körhöz érdemes hozzávennünk még a P_1K_1 Thalész-körét is, legyen ez a c kör. Ezen a körön is



rajta vannak a P_1, K_1, R_3, T_3 pontok. Így a p és c körök hatványvonala a P_1T_3 egyenes, továbbá a k és c körök hatványvonala a K_1R_3 egyenes. Látjuk tehát, hogy az M_1 pont a p, k és c körök hatványpontja, tehát a p-re és k-ra vonatkozó hatványa is megegyezik. Ugyanígy bizonyítható a hatványok egyenlősége bármely másik két körre és magasságpontra. Az állítást ezzel beláttuk.

Beke Csongor (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

Összesen 29 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 24, 4 pontot 1, 3 pontot és 2 pontot szintén 1-1 tanuló. 1 pontos 1, 0 pontos 1 tanuló dolgozata.

B. 5052. *Kezdő és Második egy kezdetben üres* 19×19*-es táblázat mezőibe ír felváltva egy-egy számot, 0-t vagy 1-et. Amikor már az összes mező ki van töltve, kiszámolják a sorösszegeket és az oszlopösszegeket. A legnagyobb sorösszeg legyen* A*, a legnagyobb oszlopösszeg pedig* B*. Ha* $A>B$*, akkor Kezdő nyer; ha* $A<B$*, akkor Második; ha pedig* $A=B$*, akkor döntetlen a játék eredménye. Van-e valakinek nyerő stratégiája?*

(*6 pont*)

Megoldás. Megmutatjuk, hogy Kezdő számára létezik nem vesztő stratégia.

Legyen Kezdő első száma 0, mindegy, hogy hol. Ezt követően Kezdő minden további lépésében a Második által előtte beírt számtól különböző számot ír be: ha van hely abban az oszlopban, ahová Második utoljára írt számot, akkor abba az oszlopba, különben pedig egy olyan oszlopba, amibe hasonló esetben még nem tett számot. Ilyen biztos, hogy van, mert Második ezen stratégia mellett pontosan 9 oszlopot fejez be, a többi 9 oszlop pedig (a kezdőoszlopot nem számolva, hiszen ott mindenképpen Kezdő rakja az utolsó számot) csak akkor telhet meg, ha Kezdő egy ilyen esetben oda rakja a számát, tehát marad bennük addig hely.

Így $B \leqslant 10$, hiszen minden oszlopban legfeljebb eggyel nagyobb az 1-esek száma, mint a 0-áké, mivel az utolsó lépés kivételével az oszlopban bármely játékos minden egyeséhez tartozik a másik játékosnak egy-egy különböző 0-ja. Másrészt összesen $(19 \cdot 19 - 1)/2 = 180$ darab 1-es van a táblázatban, mivel a legelső lépésen kívül minden lépéspár (Második, majd Kezdő lépése) során a beírt számok összege 1. Ebből a skatulyaelv miatt következik, hogy a 19 sor egyikében legalább 10 az 1-esek száma, tehát $A \geqslant 10 \geqslant B$, vagyis Második nem nyerhet.

Ezután azt mutatjuk meg, hogy Második számára is létezik nem vesztő stratégia (lényegében ugyanaz, mint Kezdőé, csak sorokra alkalmazva).

Második írjon Kezdő utolsó leírt számának sorába másmilyen számot; amikor pedig nem tud, akkor egy olyan sorba írja a másmilyen számot, ahová még nem írt számot ilyen helyzetben. Ez lehetséges, hiszen a stratégia szerint Kezdő pontosan 10 sort fejez be, ekkor kell Másodiknak önállóan lépnie, és ahová lép, ott onnantól Kezdő lépése után páros sok szám lesz, tehát azokat Kezdő nem tudja befejezni. Így 10 sort Kezdő fejez be, 9 sorba pedig Második rak önállóan egy-egy számot, ezeken a számokon kívül pedig minden sorban ugyanannyi 1 és 0 van. Tehát minden sorban legfeljebb 10 darab 1-es van. Összesen 180 vagy 181 darab 1-es van a táblázatban (Kezdő utolsó számától függően), tehát a skatulya-elv szerint kell lennie olyan oszlopnak, ahol legalább 10 darab 1-es van. $A \leqslant 10 \leqslant B$, vagyis Kezdő nem nyerhet.

Mivel mindkét félnek van olyan stratégiája, melyet használva a másik fél nem nyerhet, egyik fél számára sem létezik nyerő stratégia.

Czett Mátyás (Zalaegerszegi Zrínyi M. Gimn., 12. évf.)

58 dolgozat érkezett. 6 pontos 29, 5 pontos 8, 4 pontos 5, 3 pontos 1, 2 pontos 8, 0 pontos 7 dolgozat.

B. 5059. *Legyen valamely pozitív egész c-re* $\{a_n\}$ *a következő, rekurzív módon definiált sorozat:* $a_0 = c$ *és* $a_{n+1} = \left[a_n + \sqrt{a_n}\,\right]$, *ha* $n \geqslant 0$. *Bizonyítsuk be, hogy ha a sorozat tagja a* 2019, *akkor a korábbi tagok között nincs négyzetszám, de a későbbi tagok között végtelen sok négyzetszám fordul elő.*

(*5 pont*)

Megoldás. Belátjuk, hogy ha $\left[x + \sqrt{x}\,\right] = a_i$, akkor $a_{i-1} = x$. Az x -re igaz a rekurzív feltétel, továbbá $y > x$-re $\left[y + \sqrt{y}\,\right] > \left[x + \sqrt{x}\,\right]$ (a lineáris rész 1-gyel nő, a gyökös rész szigorúan monoton nő), $y < x$-re $\left[y + \sqrt{y}\,\right] < \left[x + \sqrt{x}\,\right]$, tehát x

az egyetlen lehetőség: a sorozat bármelyik eleme tehát egyértelműen meghatározza a korábbiakat.

Így megkeresve a számokat, a sorozat korábbi, 2019 előtti elemei sorrendben: 1805, 1847, 1889, 1932, 1975, 2019, melyek egyike sem négyzetszám (gyökeik megközelítő értéke rendre: 42,4853; 42,9767; 43,4626; 43,9545; 44,441; 44,9333). Mivel $1764+\sqrt{1764}>1805$, $1763+\sqrt{1763}<1805$, valóban nincs korábbi eleme a sorozatnak. Így a korábbi tagok között nincs négyzetszám.

Megmutatjuk, hogy ha van egy négyzetszám a sorozatban, akkor a sorozat egy alkalmas későbbi eleme is négyzetszám, tehát végtelen sok négyzetszám van a sorozatban. Pontosabban: Ha $a_i=b^2$, akkor $a_{i+2b+1}=(2b)^2$. Ugyanis a sorozat következő három eleme rendre $a_{i+1}=b^2+b$, $a_{i+2}=b^2+2b$, $a_{i+3}=b^2+3b$ lesz (hiszen $b^2+\sqrt{b^2}=b^2+b$, $b^2<b^2+b<b^2+2b<b^2+2b+1=(b+1)^2$, és így b^2+b és b^2+2b gyökének egész része is b). Azaz $a_{i+3}=(b+1)^2+b-1$. A c-re vonatkozó indukcióval belátjuk, hogy $a_{i+1+2c}=(b+c)^2+b-c$, ha $0<c<b+1$. Ez $c=1$-re igaz; tegyük fel, hogy $a_{i+1+2c}=(b+c)^2+b-c$. Ekkor

$$a_{i+1+2c+1}=(b+c)^2+b-c+b+c=(b+c)^2+2b$$

és

$$a_{i+1+2c+2}=a_{i+1+2(c+1)}=(b+c)^2+2b+b+c=(b+c+1)^2+b-(c+1)$$

(hiszen $(b+c)^2+b-c<(b+c)^2+2b<(b+c)^2+2b+2c+1=(b+c+1)^2$). Tehát az állítás teljesül $(c+1)$-re is. Helyettesítsünk be $c=b$-t, ezzel megkapjuk a fenti állítást.

A sorozat elemei 2019 után: 2019, 2063, 2108, 2153, 2199, 2245, 2292, 2339, 2387, 2435, 2484, 2533, 2583, 2633, 2684, 2735, 2787, 2839, 2892, 2945, 2999, 3053, 3108, 3163, 3219, 3275, 3332, 3389, 3447, 3505, 3564, 3623, 3683, 3743, 3804, 3865, 3927, 3989, 4052, 4115, 4179, 4243, 4308, 4373, 4439, 4505, 4572, 4639, 4707, 4775, 4844, 4913, 4983, 5053, 5124, 5195, 5267, 5339, 5412, 5485, 5559, 5633, 5708, 5783, 5859, 5935, 6012, 6089, 6167, 6245, 6324, 6403, 6483, 6563, 6644, 6725, 6807, 6889.

Mivel $6889=83^2$, a fentiek szerint végtelen sok négyzetszám van a sorozatban.

Németh Márton (Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn., 9. évf.)

57 dolgozat érkezett. 5 pontos 41, 4 pontos 9, 3 pontos 2, 2 pontos 2, 1 pontos 3 dolgozat.

B. 5083. *Van-e olyan* 100*-adfokú valós együtthatós* $p(x)$ *polinom, melyre a* $p\big(p(x)\big)$ *polinomnak* 10 000 *különböző valós gyöke van?*

(*5 pont*)

Megoldás. Van ilyen polinom. Legyen $p(x)=\prod_{i=1}^{100}(x-i)$. Ekkor $p\big(p(x)\big)$ gyökei a $p(x)-i$ $(i=1,2,\ldots 100)$ polinomok gyökei. Két ilyen különböző polinomnak nem lehet közös x_0 gyöke, hiszen $p(x_0)-i=p(x_0)-j$ nem teljesülhet különböző i, j esetén. Ezért elég azt belátni, hogy mind a száz polinomnak van száz különböző gyöke. Mivel a polinomok folytonos függvények, ezért ha $a < b$ és $f(a)$ és $f(b)$ előjele különböző, akkor az f polinomnak a és b között van gyöke. Azt fogjuk belátni, hogy ha n páros, és $0 \leqslant n \leqslant 100$, akkor $p(n + 0,5) > 100$, ha pedig n páratlan, akkor $p(n + 0{,}5) < -100$. Az $S = \prod_{i=1}^{100} (n + 0,5 - i)$ szorzatban $100 - n$ darab negatív tényező van, és a $100 - n$ az n-nel megegyező paritású. Ezért elég azt belátni, hogy $|S| > 100$. A szorzatban legfeljebb két olyan tényező szerepel, amelynek az abszolút értéke legfeljebb 0,5, és legalább 96 olyan van, aminek legalább 2. Ezért a szorzat abszolút értéke legalább $0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 2^{96} = 2^{94} > 2^7 > 128 > 100$. Így páros n-re $p(n + 0{,}5) - i > 0$, páratlanra pedig $p(n + 0{,}5 - i) - i < 0$. Ebből következik, hogy ha $0 \leqslant n \leqslant 99$, akkor $n + 0{,}5$ és $n + 0{,}5 + 1$ között van gyöke $p(x) - i$-nek, és így van 100 különböző gyöke.

Beke Csongor (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 12. évf.)

38 dolgozat érkezett. 5 pontos 25, 4 pontos 11, 3 pontos 2 dolgozat.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (664–668.)

K. 664. Van hat érménk, melyek közül négy darab 100 grammos, kettő pedig 99 grammos. Rendelkezésünkre áll egy kétkarú mérleg. Legalább hány mérésre van szükségünk ahhoz, hogy megtaláljuk az egyik könnyebb érmét?

K. 665. Egy utca egyik oldalán áll valahány játékrobot. Egy lépésben pontosan három robotnak tudjuk azt a parancsot adni, hogy menjen át az út túloldalára. Hány robot esetén lehet elérni, hogy a robotok az utca túloldalára kerüljenek át?

K. 666. Hány olyan hatjegyű szám van a 182 többszörösei között, melyben az első három számjegyből álló háromjegyű szám megegyezik az utolsó három számjegyből álló háromjegyű számmal?

K. 667. Induljunk ki egy pozitív egész számból. Egy lépésben, ha az aktuális számunk páros, akkor vegyük a felét, ha pedig páratlan, adjunk hozzá 1-et. A lépéseknek akkor van vége, ha el tudunk jutni az 1-hez.

a) Igaz-e, hogy bármelyik számból kiindulva előbb-utóbb (véges sok lépésben) az 1-hez jutunk?

b) Igaz-e, hogy legfeljebb 30 lépésben jutunk az 1-hez, ha egy négyjegyű számból indulunk ki?

K. 668. *a*) Hány olyan egyenlőszárú háromszög van, amelynek szárai 13 cm-esek és a területe 60 cm^2?

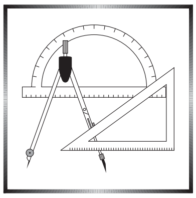
b) Hány olyan derékszögű háromszög van, amelynek befogói páros egész számok, és területe 60 cm^2?

❄

Beküldési határidő: 2020. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1623–1629.)



Feladatok 10. évfolyamig

C. 1623. Legyen m pozitív egész szám. Mutassuk meg, hogy

a) létezik 3 olyan 2-hatvány, amely m-jegyű;

b) legfeljebb 4 olyan 2-hatvány létezik, amelyik m-jegyű.

(*Brazil feladat*)

C. 1624. Az $ABCD$ négyzet AB oldalának P pontját kössük össze D-vel, BC oldalának Q pontját pedig A-val, az így kapott szakaszok metszéspontját jelöljük R-rel. Az ARD háromszög területe 1200, az APR háromszög területe 600, a $PBQR$ négyszög területe pedig $3380-240\sqrt{95}$ egység. Mekkora az $RQCD$ négyszög területe?

Javasolta: *Németh László* (Fonyód)

Feladatok mindenkinek

C. 1625. Igazoljuk, hogy az egyjegyű pozitív egész számok közül bármelyik ötöt kiválasztva akad közöttük néhány, amelyek összege osztható 10-zel.

C. 1626. Az ABC hegyesszögű háromszög BC oldalának felezőpontja legyen F, a B-ből induló magasságvonal talppontja pedig T. Bizonyítsuk be, hogy ha $FAC\sphericalangle=30^\circ$, akkor $AF=BT$.

Róka Sándor (Nyíregyháza) javaslata alapján

C. 1627. Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b, c valós számokra teljesül, hogy $a+b+c>0$, $ab+bc+ca>0$ és $abc>0$, akkor $a>0$, $b>0$ és $c>0$.

Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

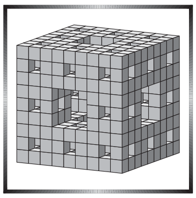
Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1628. Adjunk meg két olyan különböző pozitív egész n számot, amelyre $4^n + 4^9 + 4^{100}$ négyzetszám.

C. 1629. Egy gömb átmegy egy 8 egység élű kocka egyik lapjának négy csúcsán és érinti a szemközti lapot. Határozzuk meg a gömb sugarát.

(*Horvát feladat*)

Beküldési határidő: 2020. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5118–5125.)

B. 5118. Lehet-e x, $\dfrac{14x+5}{9}$ és $\dfrac{17x-5}{12}$ egyszerre egész szám?
(*3 pont*)

B. 5119. A hegyesszögű ABC háromszögben a beírt kör BC-vel párhuzamos érintője az AC oldalt a D pontban metszi. A D pont merőleges vetülete a BC oldalon az F pont. Mutassuk meg, hogy $AB = AD + BF$.

(*3 pont*)

B. 5120. Kiszíneztük a pozitív egész számokat úgy, hogy $a+b$ színét mindig egyértelműen meghatározza a és b színe; azaz, ha a és a' azonos színűek, valamint b és b' azonos színűek, akkor $a+b$ és $a'+b'$ is azonos színűek. Igazoljuk, hogy ha van olyan szín, amit többször is használtunk, akkor a színezés valahonnan kezdve periodikus.

(*4 pont*)

B. 5121. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert, ahol $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitív valós számok, n pedig pozitív egész szám:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 9,$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} = 1.$$

(*4 pont*)

B. 5122. Zicc ErWin a Bergengóc Kosárliga valaha volt legbiztosabb kezű büntetődobója. Bár karrierje során a legelső büntetőjét kihagyta, az összesen 222 222 büntetődobásából csupán 2020 maradt ki.

A bergengóc statisztikusok szerint egy kosaras egy büntetődobása *érdekes,* ha a dobást közvetlenül követően teljesül az, hogy a sikeres dobások (az összes dobáshoz mért) százalékos aránya pozitív egész szám. (Például ha valaki az addigi összesen 40 kísérletéből 12-t bedobott, akkor az utolsó dobása érdekes volt, mert $\frac{12}{40} \cdot 100 = 30 \in \mathbb{N}^+$, viszont az ezt követő 41-edik dobás – akár sikeres, akár nem – semmiféleképpen nem lesz érdekes.)

Legalább hány érdekes büntetője volt Zicc ErWinnek?

(*5 pont*)

B. 5123. Andi és Bori elosztotta egymás között a SET játék* 81 kártyalapját; Andihoz 40, Borihoz 41 lap került. Mindketten megszámolják, hogy a náluk lévő kártyák között hány olyan hármas van, ami SET-et alkot. Mennyi lehet az így kapott darabszámok összege?

(*6 pont*)

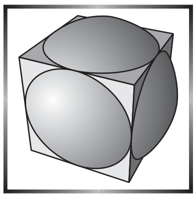
B. 5124. A szabályos négyoldalú gúla alaplapja az $ABCD$ négyzet, E a gúla csúcsa. Az AB és CE kitérő élek normáltranszverzálisának talppontjai az AB szakaszon P, a CE szakaszon pedig Q. Tudjuk, hogy Q felezi a CE élt. Határozzuk meg az $AP:PB$ arányt, és számítsuk ki az alaplapnak az oldallapokkal bezárt szögét.

(*5 pont*)

B. 5125. Az $ABCD$ húrnégyszög köré írt kör középpontja O, az AB és DC félegyenesek az E pontban metszik egymást. A BCE körben az E-vel átellenes pont F. Mutassuk meg, hogy az AC, BD és OF egyenesek egy ponton mennek át.

(*6 pont*)

Beküldési határidő: 2020. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (783–785.)

A. 783. *Poliminónak* nevezünk egy összefüggő alakzatot, ha azt egységnégyzetek oldalaik mentén történő összeillesztésével kapjuk. Legyen $n \geqslant 3$ egész szám. Keressük meg n függvényében a legnagyobb pozitív egész C-t, melyre teljesül a következő feltétel: ha egy végtelen négyzetrács minden mezőjét kiszínezzük n szín valamelyikével, akkor található egy legalább c területű polimínó, mely legfeljebb $n-1$ színt tartalmaz.

Javasolta: *Nikolai Beluhov* (Stara Zagora) és *Stefan Gerdjikov* (Szófia)

*`https://www.komal.hu/cikkek/2008-02/SET.h.shtml`.

A. 784. Legyenek n, s, t pozitív egész számok és $0<\lambda<1$. Adott egy n csúccsal és legalább λn^2 éllel rendelkező egyszerű gráf. Azt mondjuk, hogy az $(x_1,\ldots,x_s,y_1,\ldots y_t)$ egy *jó beillesztés,* ha az x_i és y_j betűk nem feltétlenül különböző csúcsokat jelölnek, és mindegyik x_iy_j éle a gráfnak ($1 \leqslant i \leqslant s$, $1 \leqslant j \leqslant t$). Bizonyítsuk be, hogy a jó beillesztések száma legalább $\lambda^{st}n^{s+t}$.

Javasolta: *Williams Kada* (Cambridge)

A. 785. Legyenek $k \geqslant t \geqslant 2$ pozitív egészek. Ha $n \geqslant k$ egész, akkor legyen p_n annak a valószínűsége, hogy az első n pozitív egész közül véletlenszerűen választva k-t teljesül, hogy a választott k szám közül bármely t-nek a legnagyobb közös osztója 1, q_n pedig annak a valószínűsége, hogy az első n pozitív egész közül véletlenszerűen választva $(k-t+1)$-et a választott számok szorzata t-edik hatványmentes.

Bizonyítsuk be, hogy a p_n és q_n sorozat határértéke megegyezik.

Javasolta: *Matolcsi Dávid* (Budapest)

❄

Beküldési határidő: 2020. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Informatikából kitűzött feladatok

11	99	50	4	96	95	7	10	92	41
1	12	88	14	86	85	17	83	19	100
98	49	33	77	48	28	74	43	52	3
21	22	23	64	36	35	67	78	79	80
70	69	76	57	45	46	54	25	32	31
30	39	75	47	55	56	44	26	62	71
81	72	38	34	66	65	37	63	29	20
93	59	58	24	53	73	27	68	42	8
40	82	13	87	15	16	84	18	89	61
60	2	51	97	5	6	94	91	9	90

3 mélységű ördögkeret

I. 517. Bűvös négyzetnek nevezzük az $N\times N$ darab szám négyzetes elrendezését, amelyben minden sor, minden oszlop és mind a két átló összege ugyanaz a szám. Az ördögkeret olyan bűvös négyzet, amelynek a legkülső keretét elhagyva is bűvös négyzetet kapunk. Lehetséges, hogy egy ördögkeretben több koncentrikus bűvös négyzet van egymásba ágyazva, ilyenkor a bűvös négyzet külső kereteit elhagyva végül egy olyan belső elrendezéshez jutunk, amely már nem bűvös négyzet.

Készítsünk programot `i517` néven, amely egy $N\times N$ számból álló négyzetről meghatározza, hogy milyen mélységben tartalmaz bűvös négyzeteket egymásba ágyazva. Ha ez a szám 0, akkor már a kiinduló elrendezés sem volt bűvös négyzet.

A program standard bemenetének első sorában az N ($N \leqslant 30$) található, amely a sorok és oszlopok száma. A következő N sorban N darab nemnegatív szám szerepel.

A program standard kimenetén egy szám szerepeljen, az ördögkeret egymásba ágyazott bűvös négyzeteinek mélysége. Ha a kiindulási állapot nem bűvös négyzet, akkor `0`-t írjunk ki.

Bemenet	**Kimenet**
6 22 41 34 27 17 5 29 1 35 6 42 11 31 49 38 10 24 4 47 40 12 37 18 48 25 2 32 13 36 43 3 46 26 7 14 20 19 44 8 39 15 30 21 9 16 23 33 45 28	1

Beküldendő egy tömörített `i517.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 518. Az egész számok számrendszerek közötti átváltására létezik algoritmus, így nem nehéz programot készíteni egy R alapú számrendszerben felírt A pozitív egész szám Q alapú számrendszerbe való átírására. Nehézséget talán csak a 10-nél nagyobb alapú számrendszerek jelentenek, ahol a 10-nél nagyobb számjegyeket pl. betűkkel kell jelölnünk. Az informatikában használt hexadecimális számrendszerben a 10 = A, 11 = B, …, 15 = F jelölést alkalmazzuk. Használjuk ennek megfelelően az angol ABC nagybetűit rendre a 9-nél nagyobb számjegyek jelölésére. Így a legnagyobb számjegy, amit felírhatunk, a Z = 35.

Készítsünk táblázatkezelő alkalmazást, amely átvált egy pozitív egész számot az R alapú számrendszerből a Q alapú számrendszerbe ($2 \leqslant R, Q \leqslant 36$). A munkalapon egy cellában lehessen megadni az átváltandó számot (számjegyekkel és az angol ABC betűivel), és két másik cellában az R és Q értékét. A táblázatkezelő adja meg egy negyedik cellában a szám alakját a Q alapú számrendszerben.

A munkafüzet tetszőleges további cellái használhatók segédszámításokra, de a megoldás során csak a táblázatkezelő beépített függvényeivel dolgozzunk, tehát makró és saját program a megoldás során nem használható. A beírt számok minden esetben helyesek, azok ellenőrzéséről nem kell gondoskodni.

Beküldendő egy tömörített `i518.zip` állományban a megoldást tartalmazó táblázatkezelő munkafüzet és egy rövid dokumentáció, amely megadja az alkalmazott táblázatkezelő nevét és verzióját.

I. 519 (É). A `www.balatonihajok.hu` portálról sok olyan balatoni hajózásra jellemző adatot ismerhetünk meg, amely történetileg és a jelenben is érdekes lehet. Most a nagy hajós kikötőkkel foglalkozunk. Az adatok a `kikoto.txt`, a `kapcsolo.txt` és a `tipus.txt` állományokban állnak rendelkezésünkre. Az állományok tabulátorral tagolt, UTF-8 kódolású szövegfájlok, az első sorok a mezőneveket tartalmazzák.

Készítsünk új adatbázist `balaton` néven. A mellékelt adatállományokat importáljuk az adatbázisba a fájlnévvel azonos táblanéven (**kikoto**, **kapcsolo**, **tipus**). Beolvasáskor állítsuk be a megfelelő adatformátumokat és kulcsokat. A táblákba ne vegyünk fel új mezőt.

Táblák:

hajo (id, nev, terulet, ev, bejarat, szelesseg, hosszusag, megjegyzes)

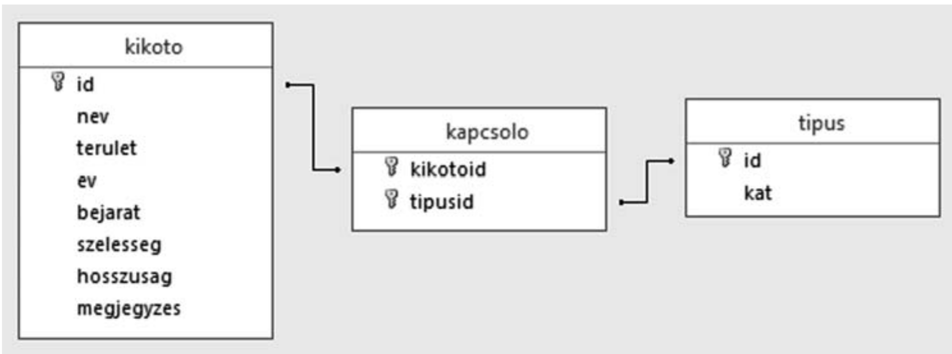
id	a kikötő azonosítója (szám), ez a kulcs;
nev	a kikötő, illetve a településének a neve (szöveg);
terulet	a kikötő területe, ha zárt, körülhatárolt, különben nincs adat (szám);
ev	a kikötő építésének éve, ha ismert (szám);
bejarat	a kikötő bejáratának égtája (szöveg), például: ÉK, DNY-DK;
szelesseg	a kikötő bejárat szélességi koordinátája szögperc mértékegységben (három tizedes pontosságú valós szám);
hosszusag	a kikötő bejárat hosszúsági koordinátája szögperc mértékegységben (három tizedes pontosságú valós szám);
megjegyzes	megjegyzés a kikötő használatáról (szöveg).

kapcsolo (kikotoid, tipusid)

kikotoid	a kikötő azonosítója (szám), az összetett kulcs része;
tipusid	a műszaki jellemző, típus azonosítója (szám), az összetett kulcs része.

tipus (id, kat)

id	a típus azonosítója (szám), ez a kulcs;
kat	a műszaki felépítés, típus kategóriája (szöveg).



Készítsük el a következő feladatok megoldásait. Az egyes lekérdezéseknél ügyeljünk arra, hogy mindig csak a kért értékek jelenjenek meg és más adatok viszont ne. A megoldásainkat a zárójelben lévő néven mentsük el.

1. A Balatonon a legnagyobb sebességű szelek északi irányból érkeznek. A déli parton úgy építették a kikötőket, hogy tisztán északról védve legyenek, a bejáratok északnyugatra, vagy északkeletre nézzenek. Készítsünk lekérdezést, amely az „É" szórészletet tartalmazó bejáratú kikötők nevét és bejáratának irányát megjeleníti nyugatról keletre sorrendben. (1eszak)
2. Készítsünk lekérdezést, amely történetileg az első három kiépített kikötő nevét sorolja fel. (2regiek)
3. Adjuk meg lekérdezés segítségével az egymólós, a kétmólós és karolómólós (kőszórás a kikötő körül védelmi célból) kikötők számát. (3molok)
4. Lekérdezés segítségével soroljuk fel a Balaton nyugati medencéjének kikötőit, azaz a Tihanyi kikötőtől nyugatra lévőket. (4nyugat)
5. Lekérdezés segítségével soroljuk fel a mólóval nem rendelkező, azaz nem védett kikötők nevét. A listában minden név egyszer jelenjen meg. (5vedtelen)
6. A nyílt vízi kikötőknél nincs értelme a terület megadásának, de a többinél jellemző adat. Adjuk meg lekérdezés segítségével azon kétmólós és medencés kikötők nevét, ahol mégsem ismert a terület. (6adathiany)
7. Lekérdezés segítségével adjuk meg az egymástól legtávolabbi két kikötőt. Távolságon a feladatban a Manhattan-távolságot értjük. A távolság meghatározásához használjuk a kikötők szélességi és hosszúsáig GPS-koordinátáit. (7tavolsag)

Beküldendő egy tömörített állományban (`i519.zip`) az adatbázis, valamint egy rövid dokumentáció, amelyből kiderül az alkalmazott adatbázis-kezelő neve és verziószáma.

Letölthető állományok: a `kikoto.txt`, a `kapcsolo.txt` és a `tipus.txt`.

I/S. 47. Adél és Bence a következő játékot játsszák: Adél rajzol egy N szélességű és N magasságú egységoldalú négyzetekből álló négyzethálót, majd minden mezőbe beír egy egész számot. Ezután Bence választ egy K pozitív egész számot, és rajzol egy $3\cdot 3$ db, K oldalhosszú négyzetekből álló hálót úgy, hogy $3K \leqslant N$ legyen. Ezután a saját K oldalú négyzetei közül kiszínez tetszőlegesen X darabot ($1 \leqslant X \leqslant 9$), majd a saját mintáját ráilleszti a számozott négyzetrácsra úgy, hogy szélei a rácsvonalakra illeszkedjenek és a minta ne lógjon le a négyzetrácsról. Bence pontszáma a színezett terület által lefedett mezőkben lévő számok összege. Adjuk meg, hogy legföljebb hány pontot szerezhet Bence.

Bemenet: az első sor tartalmazza az N számot. A következő N sor mindegyike N számot tartalmaz, a mezőkbe írt számokat. Az i-edik sor j-edik eleme $A_{i,j}$.

Kimenet: az elérhető legnagyobb pontszám.

Példa:

Bemenet (a / jel sortörést helyettesíti)	**Kimenet**

`6`
`1 0 2 3 -3 0 / 2 1 4 -1 1 1 / 1 2 -4 1 -3 5`
`2 2 5 -9 1 -6 / -1 0 1 1 -1 0 / 1 -1 -3 1 3 -7`
	`19`

Korlátok: $3 \leqslant N \leqslant 100$, $-1000 \leqslant A_{i,j} \leqslant 1000$, Adél biztosan írt nemnegatív számot. Időkorlát: 0,5 mp.

Értékelés: a pontok 50%-a kapható, ha $N \leqslant 10$.

Beküldendő egy `is47.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

S. 146. Adott egy N elemű T tömb 1-től indexelve, amely nemnegatív egész számokat tartalmaz. Kétféle műveletet végzünk a T tömb elemeivel. Az egyik műveletben hozzáadunk a tömb néhány egymást követő eleméhez egy p értéket, vagyis adott a és b mellett minden $i \in [a, b]$ indexű $T[i]$ elem ezután $T[i] + p$ lesz. Definiáljuk adott c és d esetén (ahol $d - c + 1$ páros) a következő szorzatösszeget: $T[c] \cdot T[c + 1] + T[c + 2] \cdot T[c + 3] + \ldots + T[d - 1] \cdot T[d]$, amely a $[c, d]$ intervallum értéke a T tömbön. A második műveletben adjuk meg a c és d számok által meghatározott intervallum értékét. Mivel egy intervallum értéke nagyon nagy is lehet, ezért a lekérdezés eredményének $10^9 + 7$-tel vett osztási maradékát kell megadni.

Bemenet: az első sor tartalmazza az N és Q számokat. A következő sor N számot tartalmaz, T elemeit. A következő Q sor mindegyike vagy 1 a b p alakú, ami azt jelenti, hogy az $[a; b]$ intervallumon minden tömbértéket megváltoztatunk p-vel; vagy 2 c d alakú, ami azt jelenti, hogy lekérdezzük a $[c, d]$ intervallum értékét.

Kimenet: minden 2-es típusú kérdésre adjuk meg az intervallum értékét modulo $10^9 + 7$.

Példa:

Bemenet (a / jel sortörést helyettesíti)	**Kimenet** (a / jel sortörést helyettesíti)
`5 3 / 1 0 2 3 1 / 2 1 4 / 1 2 4 1 / 2 2 5`	`6 / 7`

Korlátok: $1 \leqslant N, Q \leqslant 10^5$, $0 \leqslant T[i], p \leqslant 10^9$, $1 \leqslant a, b, c, d \leqslant N$, $a \leqslant b$, $c < d$. Időkorlát: 0,3 mp.

Értékelés: a pontok 50%-a kapható, ha $N \leqslant 100$.

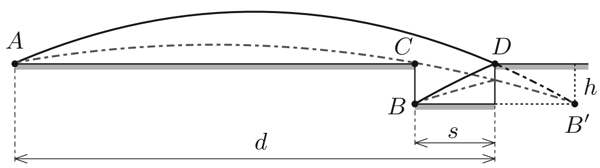
Beküldendő egy `s146.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2020. november 15.

A 2020. évi Kunfalvi Rezső Olimpiai Válogatóverseny elméleti feladatainak megoldása*

F1. *a*) A golyó csak úgy érkezhet a gödör B sarkába, ha előtte a gödör függőleges oldalain páratlan számszor visszapattan. Minden visszaverődésnél a kis test sebességének vízszintes komponense előjelet vált, függőleges komponense pedig változatlan marad. A pattogó golyó pályáját a függőleges falakra való tükrözéssel „ki lehet hajtogatni”, és így töréspontok nélküli parabolát kapunk. Nyilvánvaló, hogy közelebbi pontba kisebb kezdősebességgel eljuttatható a golyó, tehát az optimális (kihajtogatott) pálya esetén a golyó csak egyszer pattan meg. Most már csak az a kérdés, hogy az eldobás helyétől távolabbi falon hol legyen a pattanási pont.

Paraméterezzük a feladatot. Legyen $d = 12$ m a gödör távolabbi falának távolsága az A ponttól, $s = 2$ m a gödör szélessége, $h = 1$ m a gödör mélysége. Ezeken kívül használni fogjuk még az $L = d + s = 14$ m távolságot is. Jelölje C és D a gödör A ponthoz közelebbi, illetve távolabbi felső sarkát, B' pedig a B pontnak a gödör távolabbi falára vonatkozó tükörképét (*1. ábra*). A kihajtogatott pálya tehát egy olyan parabola, amely átmegy az A és B' pontokon.



1. ábra

Az A és B' pontokat összekötő lehetséges parabolák közül csak azokat választhatjuk, amelyek „beesnek” a gödörbe, azaz a talaj szintjét a CD szakaszon metszik. Szemléletesen látható, hogy ezek közül a pályák közül a legmagasabb, ADB' parabolához tartozik a legkisebb kezdősebesség, míg a leglaposabb, ACB parabolához a legnagyobb kezdősebesség. (Itt figyelembe vettük azt a tényt is, hogy a feladat adatai alapján lapos, 45°-nál jóval kisebb szögben induló hajításokról van szó.)

Megjegyzés. Az intuíciónkat számolással is igazolhatjuk. Ha a hajítás kezdősebessége v, az indítás hajlásszöge α, akkor az A és B' pontok közötti vízszintes ($L = d + s$) és függőleges ($-h$) elmozdulásokra a következőket írhatjuk fel:

$$L = vt\cos\alpha, \qquad -h = vt\sin\alpha - \frac{g}{2}t^2,$$

amiből a mozgás t idejének kiküszöbölése után az alábbi kifejezést kapjuk v-re:

$$v^2 = \frac{gL^2}{2\cos^2\alpha(L\tan\alpha + h)}. \tag{1}$$

*A feladatok szövege a KöMaL múlt havi számában olvasható.

Ahhoz, hogy kiderüljön, hogyan változik v nagysága az α szög kis megváltoztatásakor, vizsgáljuk meg a tört nevezőjének szög szerinti deriváltját:

$$\left[2\cos^2\alpha(L\tan\alpha+h)\right]'=2L-2(h+L\tan\alpha)\sin 2\alpha.$$

A távolságadatok behelyettesítésével könnyen ellenőrizhető, hogy ez a derivált $\alpha\approx 40^\circ$ és annál kisebb szögekre biztosan pozitív, azaz „lapos" hajítási szögek esetén a B' pont eltalálásához szükséges v sebesség annál kisebb, minél nagyobb az α szög értéke. A gödörbe beleeső golyó lehetséges pályái közül az 1. ábrán látható C ponton átmenő parabolához tartozik a legkisebb α szög, míg α értéke a D ponton átmenő pálya esetén a legnagyobb. Tehát az optimális pálya a gödör távolabbi függőleges falát a legfelső, D pontban találja el, majd egy pattanás után a kis test a B pontba érkezik.

b) A kinematikai egyenletekből kiindulva felírhatjuk az optimális pálya AD szakaszán a golyó vízszintes elmozdulását az α szög és a v kezdősebesség segítségével:

$$d=\frac{2v^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}. \qquad (2)$$

A megjegyzésben szereplő (1) egyenletből beírva ide v^2-et megkapjuk a hajítási szöget:

$$\tan\alpha=\frac{hd}{L(L-d)}=\frac{3}{7}\quad\longrightarrow\quad\alpha=23{,}2^\circ.$$

Ezt az eredményt visszaírva a (2) egyenletbe a következő kifejezéshez jutunk:

$$v^2=\frac{gd}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{gd(1+\tan^2\alpha)}{2\tan\alpha}.$$

Az adatokat behelyettesítve végül megkapjuk a sebesség számszerű értékét:

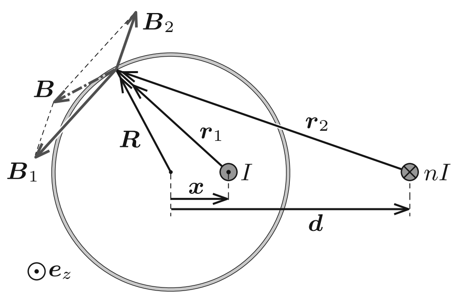
$$v=\sqrt{\frac{29}{21}gd}=12{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

F2. Mivel a szupravezető belsejébe a mágneses tér nem hatolhat be, az indukcióvonalak folytonosságából következően a mágneses indukcióvektornak mindenhol érintőirányúnak kell lennie a cső külső és belső felülete mentén. A feladatunk az, hogy a határfeltételt kielégítő (felületi) árameloszlást megtaláljuk.

Az ilyen, ún. peremérték-problémákat középiskolás szinten a tükrözés módszerével szoktuk megoldani. Ennek lényege, hogy egy zárt tartomány peremén elhelyezkedő áram- vagy töltéseloszlás hatását a tartományon kívül található, megfelelően megválasztott erősségű és helyzetű „tüköráramokkal" vagy „tükörtöltésekkel" helyettesítjük. Ez az eljárás csak néhány speciális geometriájú felület (pl. síkok, gömb vagy henger) esetén működik, de most éppen ilyennel van dolgunk. Próbáljuk hát a szupravezető cső falában folyó áramok hatását egy, a csövön kívül elhelyezkedő, képzeletbeli, áramjárta egyenes vezetővel leírni!

Könnyen látható, hogy a „tükőráram" a cső belsejében lévő vezetékben folyó valódi árammal ellentétes irányú, ellenkező esetben a mágneses indukcióvektor sugárirányú komponense nem tűnhetne el a cső fala mentén. A szimmetria miatt a tüköráram a cső tengelye és a valódi áramvezető által meghatározott síkban helyezkedik el. Jelöljük (általánosan) a valódi vezetőnek, illetve a tükööráramnak a cső tengelyétől mért távolságát rendre d-vel és x-szel (az ennek megfelelő vektorok pedig legyenek $\boldsymbol{d}$ és $\boldsymbol{x}$). A tüköráram egyelőre ismeretlen erősségét jelöljük nI-vel ($n > 0$).

Vizsgáljuk a szupravezető cső szimmetriatengelyre merőleges síkmetszetét, és írjuk fel belül a mágneses indukcióvektort a *2. ábra* jelöléseivel a cső tengelyéhez képest $\boldsymbol{R}$ vektorral jellemezhető pontban ($|\boldsymbol{R}| = R$)! A valódi áramvezető és a tüköráram által keltett indukciójárulékok vektoros alakban:



2. ábra

$$\boldsymbol{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\boldsymbol{e}_z \times \frac{\boldsymbol{r}_1}{r_1^2},$$

$$\boldsymbol{B}_2 = -\frac{\mu_0 nI}{2\pi}\boldsymbol{e}_z \times \frac{\boldsymbol{r}_2}{r_2^2},$$

ahol $\boldsymbol{r}_1$ és $\boldsymbol{r}_2$ a vezetékektől a vizsgált pontba mutató vektorok, $\boldsymbol{e}_z$ pedig a valódi vezetékben folyó árammal azonos irányú egységvektor. Azt szeretnénk elérni, hogy az eredő indukcióvektor (ami $\boldsymbol{B}_1$ és $\boldsymbol{B}_2$ vektori összege) érintőirányú legyen, amit matematikailag így fejezhetünk ki:

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2) = 0.$$

Ebbe behelyettesítve $\boldsymbol{B}_1$ és $\boldsymbol{B}_2$ korábbi kifejezését, majd egyszerűsítés után:

$$\frac{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{r}_1)}{r_1^2} - \frac{n\boldsymbol{R}(\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{r}_2)}{r_2^2} = 0.$$

A vegyes szorzatra vonatkozó $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a})$ azonosságot felhasználva:

$$\boldsymbol{e}_z \underbrace{\left[\frac{\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{R}}{r_1^2} - \frac{n\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{R}}{r_2^2}\right]}_{=\boldsymbol{0}} = 0.$$

A szögletes zárójelben álló mindkét tag párhuzamos az $\boldsymbol{e}_z$ vektorral, ezért a skaláris szorzat csak úgy lehet zérus, ha a zárójeles mennyiség eltűnik. Fejezzük ki az $\boldsymbol{r}_1$ és $\boldsymbol{r}_2$ vektorokat $\boldsymbol{x}$-szel és $\boldsymbol{d}$-vel!

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{d}.$$

Ezzel a következő feltételt kapjuk:

$$\frac{(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R} - \boldsymbol{x}|^2} - \frac{n(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{d}) \times \boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R} - \boldsymbol{d}|^2} = \boldsymbol{0}.$$

A zárójeleket felbontva, majd $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} = \boldsymbol{0}$ felhasználásával:

$$\boldsymbol{R} \times \left[\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{x}|^2} - \frac{n\boldsymbol{d}}{|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{d}|^2} \right] = \boldsymbol{0}.$$

Az $\boldsymbol{R}$ vektor minden értékére ez csak úgy lehetséges, ha a szögletes zárójelben álló vektor nullvektor. Mivel $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{d}$ egyirányú vektorok, ezért ennek feltétele:

$$\frac{x}{|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{x}|^2} = \frac{nd}{|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{d}|^2}.$$

Szorozzunk be a nevezőkkel, és fejtsük ki az abszolútérték-négyzeteket:

$$x\big(R^2 - 2\boldsymbol{Rd} + d^2\big) = nd\big(R^2 - 2\boldsymbol{Rx} + x^2\big).$$

Átrendezve:

$$xR^2 - ndR^2 + xd^2 - ndx^2 = 2(1-n)(\boldsymbol{Rd})x.$$

Az egyenlet bal oldala nem függ az $\boldsymbol{R}$ vektor irányától, míg a jobb oldal igen. Ez az egyenlőség csak úgy állhat fenn $\boldsymbol{R}$ tetszőleges iránya esetén, ha $n = 1$, azaz az egyenlet mindkét oldala nulla. Ez azt jelenti, hogy a „tükörvezetékben" folyó áram ugyanakkora nagyságú, de ellentétes irányú, mint a valódi vezetőben folyó áram.

Az $n = 1$ helyettesítéssel rövid számolás után végül a következő eredményt kapjuk a tükörvezeték helyzetére:

$$d = \frac{R^2}{x},$$

azaz $x = R/2$ esetén $d = 2R$.

a) A cső belsejében a mágneses mezőt a valódi és a „tükörvezeték" által keltett terek szuperpozíciójaként számolhatjuk. Az egyenes áramjárta vezetékre hosszegységenként ható f Lorentz-erő kiszámításakor tehát a tükörvezeték által a valódi vezeték helyén keltett mágneses teret kell figyelembe vennünk:

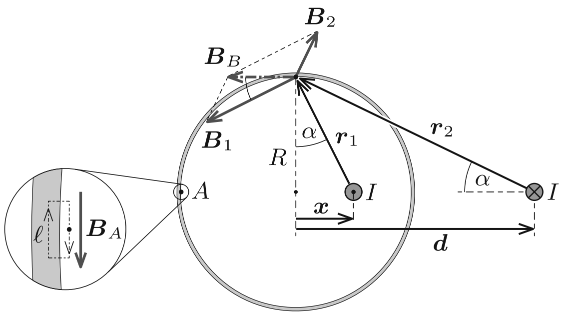
$$f = IB_2 = I \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-x)} = \frac{\mu_0 I^2}{3\pi R}.$$

Az erő taszító jellegű, a vezeték „igyekezne" a szupravezető cső közepén elhelyezkedni.

b) A feladat síkbelisége miatt a cső belső és külső falán egyaránt tengelyirányú áram folyik. A belső felületen folyó áram vonalmenti sűrűségét az Ampère-féle gerjesztési törvénnyel határozhatjuk meg. Ehhez tekintsük az A pont környékén a *3. ábrán* látható, téglalap alakú zárt hurkot!

Ha a téglalap fallal párhuzamos oldala ℓ hosszúságú, akkor a gerjesztési törvény:

$$\ell B_A = \mu_0 J_A \ell,$$



3. ábra

hiszen a szupravezető anyagban a mágneses indukció értéke nulla. Ebből a J_A vonalmenti áramsűrűség:

$$J_A = \frac{1}{\mu_0} B_A,$$

és hasonló összefüggés igaz a cső belső falának bármely pontjára. Az A pontbeli indukcióvektor nagysága szuperpozícióval könnyen számolható a tükröráram segítségével:

$$B_A = \frac{\mu_0 I}{2\pi(R+x)} - \frac{\mu_0 I}{2\pi(R+d)} = \frac{\mu_0 I}{6\pi R}.$$

Az A pont közelében tehát a cső belső falán a vonalmenti áramsűrűség:

$$J_A = \frac{I}{6\pi R}.$$

A B pontbeli indukcióvektor kiszámítása egy fokkal nehezebb, mert itt $\boldsymbol{B}_1$ és $\boldsymbol{B}_2$ nem párhuzamos irányú vektorok. A 3. ábrán látható α szög segítségével az eredő indukcióvektor nagysága:

$$B_B = B_1 \cos\alpha - B_2 \sin\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} \cos\alpha - \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} \sin\alpha.$$

Felhasználva, hogy $r_1 = R/\cos\alpha$, $r_2 = R/\sin\alpha$:

$$B_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha).$$

A megjelenő szögfüggvényeket a 3. ábra segítségével kifejezhetjük:

$$\cos\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Ebből végül a B pontbeli indukció:

$$B_B = \frac{3\mu_0 I}{10\pi},$$

valamint a vonalmenti áramsűrűség:

$$J_B = \frac{3I}{10\pi}.$$

c) A cső belső felületén folyó árameloszlás önmagában elegendő ahhoz, hogy az indukcióvonalak behatolását a szupravezetőbe megakadályozza. Ennek az áramnak a teljes erőssége éppen I, amint az könnyen belátható, ha az Ampère-törvényt a cső falában futó körre alkalmazzuk. Ennek az áramnak (a cső véges mérete miatt) valahol vissza is kell folynia, az pedig csak a cső külső felületén lehetséges. A külső felületen folyó áram eloszlásának olyannak kell lennie, hogy a cső falában az indukció továbbra is zérus maradjon. Ez úgy lehetséges, hogy a külső felületen az árameloszlás egyenletes, vonalmenti áramsűrűsége $I/(2\pi R)$.

F3. *a*) A hatásfok definíciója alapján kifejezhetjük a belső Carnot-gép által felvett és leadott $J_\mathrm{m} = \frac{Q_\mathrm{m}}{\Delta t}$ és $J_\mathrm{h} = \frac{Q_\mathrm{h}}{\Delta t}$ hőteljesítményt az η hatásfokkal és a gép által leadott $P = \frac{W}{\Delta t}$ mechanikai teljesítménnyel:

$$\left.\begin{aligned} &\eta = \frac{Q_\mathrm{m} - Q_\mathrm{h}}{Q_\mathrm{h}} = \frac{J_\mathrm{m} - J_\mathrm{h}}{J_\mathrm{m}} \\ &P = J_\mathrm{m} - J_\mathrm{h} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \quad \begin{aligned} J_\mathrm{m} &= \frac{P}{\eta}, \\ J_\mathrm{h} &= \frac{P(1-\eta)}{\eta}. \end{aligned}$$

Fourier hővezetési törvénye a meleg és a hideg oldalon így írható:

$$J_\mathrm{m} = \kappa_\mathrm{m}(T_\mathrm{m} - t_\mathrm{m}), \qquad J_\mathrm{h} = \kappa_\mathrm{h}(t_\mathrm{h} - T_\mathrm{h}).$$

A hőáramokra kapott korábbi formulák, illetve a hővezetési egyenletek felhasználásával kifejezhetjük a belső t_m és t_h hőmérsékletet a külső T_m és T_h hőmérséklettel, a hatásfokkal, valamint a leadott mechanikai teljesítménnyel:

$$t_\mathrm{m} = T_\mathrm{m} - \frac{J_\mathrm{m}}{\kappa_\mathrm{m}} = T_\mathrm{m} - \frac{P}{\eta\kappa_\mathrm{m}},$$

$$t_\mathrm{h} = T_\mathrm{h} + \frac{J_\mathrm{h}}{\kappa_\mathrm{h}} = T_\mathrm{h} + \frac{P(1-\eta)}{\eta\kappa_\mathrm{h}}.$$

A belső Carnot-gép hatásfokát a hőtartályok t_m és t_h hőmérsékletének ismeretében felírhatjuk, és így összefüggést kapunk η és P között:

$$\eta = 1 - \frac{t_\mathrm{h}}{t_\mathrm{m}} = 1 - \frac{T_\mathrm{h} + \frac{P(1-\eta)}{\eta\kappa_\mathrm{h}}}{T_\mathrm{m} - \frac{P}{\eta\kappa_\mathrm{m}}},$$

ahonnan kifejezhető a keresett $P(\eta)$ függvény:

$$P(\eta) = \frac{\kappa_\mathrm{m}\kappa_\mathrm{h}}{\kappa_\mathrm{m} + \kappa_\mathrm{h}}\left(\eta T_\mathrm{m} - \frac{\eta}{1-\eta}T_\mathrm{h}\right).$$

b) Ahogy növeljük a gépből kivett P mechanikai teljesítményt, nő a J_m és J_h hőáram is. Ha azonban ezek a hőáramok túl nagyok, akkor naggyá válik a külső és belső hőmérsékletek közötti $T_\mathrm{m} - t_\mathrm{m}$ illetve $t_\mathrm{h} - T_\mathrm{h}$ különbség, és a két belső hőmérséklet közel kerül egymáshoz, ami az η hatásfok, illetve a P teljesítmény csökkenéséhez vezet. Ez alapján látható, hogy van egy optimális η^* hatásfok, ami mellett a leadott P mechanikai teljesítmény maximális. A $P(\eta)$ függvény maximumánál a derivált zérus, tehát

$$P'(\eta^*) = \frac{\kappa_\mathrm{m}\kappa_\mathrm{h}}{\kappa_\mathrm{m} + \kappa_\mathrm{h}} \left[T_\mathrm{m} - \frac{1}{(1-\eta^*)^2} T_\mathrm{h} \right] = 0,$$

ahonnan a keresett maximumhely:

$$\eta^* = 1 - \sqrt{\frac{T_\mathrm{h}}{T_\mathrm{m}}}.$$

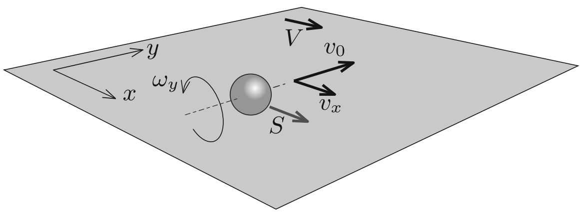
Érdekes, hogy az eredmény független a hővezetési tényezőktől, és „csupán” a négyzetgyökjelben tér el a Carnot-gép hatásfokától.

F4. Vezessünk be egy koordináta-rendszert, melynek x tengelye a futószalag sebességével azonos irányú, y tengelye pedig a labda kezdősebességének irányába mutat (*4. ábra*). Amikor a labda megérkezik a futószalagra, tömegközéppontjának x irányú sebességkomponense zérus, y irányú sebessége pedig a kezdeti v_0 érték:

$$v_x(t=0) = 0, \qquad v_y(t=0) = v_0.$$

A labda kezdetben csak az x iránnyal párhuzamos tengely körül forog, a szögsebesség-vektor y komponense tehát nulla:

$$\omega_y(t=0) = 0.$$



4. ábra

A futószalagra érve a labdára az állandó nagyságú S csúszási súrlódási erő kezd hatni a futószalag sebességével megegyező irányban. A további mozgás során a súrlódási erő iránya mindig a labda legalsó pontjának a futószalaghoz viszonyított (relatív) sebességével ellentétes lesz.

A csúszási súrlódási erő kezdetben x irányban gyorsítja az m tömegű labda tömegközéppontját, így annak gyorsulása:

$$a = \frac{S}{m}.$$

Mivel az S erőnek forgatónyomatéka van a tömegközéppontra nézve, az R sugarú labda β szöggyorsulással forogni kezd az y iránnyal párhuzamos tengely körül a 4. ábrán feltüntetett irányban. A forgómozgás dinamikai egyenlete:

$$SR = \frac{2}{5}mR^2\beta,$$

ahol felhasználtuk, hogy a labda tehetetlenségi nyomatéka $2mR^2/5$. Ebből meghatározható a labda szöggyorsulása:

$$\beta = \frac{5S}{2mR}.$$

Látszik, hogy a súrlódási erő csak a sebesség x komponensét és a szögsebességvektor y komponensét változtatja meg, a tömegközéppont y irányú sebességkomponensére és az x tengellyel párhuzamos tengely körüli forgómozgásra nincs hatással. Ebből következik, hogy a labda legalsó pontjának futószalaghoz viszonyított relatív sebessége mindvégig $-x$ irányú marad. Azaz a labdára ható csúszási súrlódási erőnek nem csak a nagysága, de az *iránya* is állandó!

A labda szalagra érkezésének $t = 0$ időpillanatától számítva meghatározható, hogyan függ a tömegközéppont $v_x(t)$ sebessége, valamint az $\omega_y(t)$ szögsebesség az időtől:

$$v_x(t) = at, \qquad \omega_y(t) = \beta t.$$

A labda „oldalazó" csúszása közben $v_x(t)$ és $\omega_y(t)$ egyenletesen növekszik mindaddig, amíg elő nem áll a labda tiszta gördülése. Tiszta gördülésről akkor beszélhetünk, ha a labda futószalaggal érintkező pontjának nyugvó koordináta-rendszerben mért sebessége megegyezik a szalag V sebességével. Matematikailag megfogalmazva:

$$v_x(\tau) + \omega_y(\tau)R = V,$$

ahol τ a tiszta gördülés beálltának időpillanatát jelöli. A fenti egyenletből, valamint a szöggyorsulásra és a gyorsulásra kapott korábbi eredményekből τ kifejezhető:

$$\tau = \frac{2mV}{7S}.$$

A feladat kitűzésében szerepel, hogy a súrlódási együttható (és emiatt S is) igen nagy, így τ rövid időtartam. Vagyis a tiszta gördülés sokkal hamarabb beáll, mint amennyi idő alatt a labda átér a futószalag túlsó oldalára. A tiszta gördülés kialakulásától kezdve a labda tömegközéppontjának x irányú komponense állandó lesz, értéke:

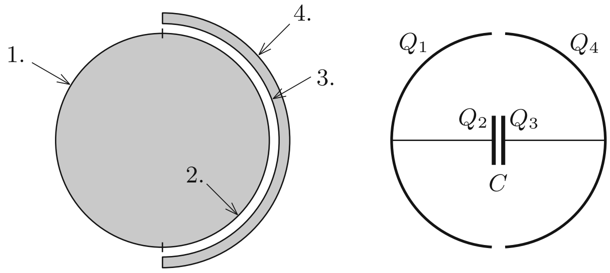
$$v_x(\tau) = a\tau = \frac{S}{m}\,\frac{2mV}{7S} = \frac{2}{7}V.$$

A labda tehát az asztalhoz képest $2V/7$ sebességgel egyenletesen mozog x irányban, így mire átér a szalag túloldalára,

$$d = \frac{2Vs}{7v_0}$$

utat tesz meg a szalaggal párhuzamosan, tehát ekkora mértékben tolódik el a pályája.

F5. *a*) Számozzuk meg a fémgömbhéjak főbb felületeit a *5. ábra* bal oldala szerint! A feladatbeli elrendezés elektrosztatikus szempontból modellezhető az 5. ábra jobb oldalán látható rendszerrel. A Q_{1-4} töltések rendre az 1-4. felületeken levő töltéseknek feleltethetőek meg.



5. ábra

A C kondenzátor fegyverzeteinek töltése ugyanakkora nagyságú, de ellentétes előjelű:

$$Q_2 = -Q_3.$$

A C kondenzátor kapacitása igen nagy, hiszen a 2. és 3. felületek nagyon közel vannak egymáshoz. Ezért, ha véges mennyiségű töltéssel rendelkezik a kondenzátor, a fegyverzetek közti feszültség elhanyagolhatóan kicsi marad, azaz a 2. és 3. felületek lényegében ekvipotenciálisak. A velük fémes kapcsolatban álló 1. és 4. felületek emiatt szintén ekvipotenciálisnak tekinthetők. Így az 5. ábra jobb oldalán látható C kondenzátoron kívül, de a gömbhéjakon belül az elektromos térerősség nulla, ami csak úgy lehetséges, ha az 1. és 4. felületek töltése megegyezik:

$$Q_1 = Q_4.$$

Tehát a Q_1 és Q_4 töltésekkel rendelkező félgömbök felületei összességében egy egyenletesen töltött gömbfelület megszokott gömbszimmetrikus terét hozza létre a felületeken kívül, míg belül a tér zérus.

Tudjuk továbbá, hogy a feladatban szereplő félgömbhéjra összesen Q töltést juttattunk, tehát fennáll:

$$Q_3 + Q_4 = Q.$$

A fémgömb össztöltése viszont nulla, amelyet a

$$Q_1 + Q_2 = 0$$

egyenlet fejez ki. A fenti egyenletrendszert megoldva a következő töltésértékeket kapjuk:

$$Q_1 = \frac{Q}{2}, \qquad Q_2 = -\frac{Q}{2},$$

$$Q_3 = \frac{Q}{2}, \qquad Q_4 = \frac{Q}{2}.$$

Az eddigi eredmények alapján kiszámíthatjuk az 5. ábra bal oldalán látható felületek töltéssűrűségét. A feladatkitűzésben szereplő fémgömb 1. és 2. felületeinek töltéssűrűsége:

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{2\pi R^2} = \frac{Q}{4\pi R^2}, \qquad \sigma_2 = -\sigma_1 = -\frac{Q}{4\pi R^2}.$$

Míg a félgömbhéj külső és belső felületének együttes töltéssűrűsége:

$$\sigma_\mathrm{f} = \frac{Q_3 + Q_4}{2\pi R^2} = \frac{Q}{2\pi R^2}.$$

b) Ahhoz, hogy meghatározzuk, mekkora erővel hat egymásra a gömb és a félgömbhéj, meg kellene határoznunk, mekkora E_g teret hozna létre a gömbfelületen levő töltéselrendeződés, ha a félgömbhéj nem lenne ott. Ebben az E_g térben helyekedik el ugyanis a félgömbhéj, amelyre a térrel arányos nagyságú Coulomb-erő hat.

Az E_g tér meghatározása érdekében vizsgáljuk meg a térerősséget félgömbhéj anyagának belsejében, vagyis a 3. és a 4. felület között! Ismert, hogy fémek belsejében az elektromos térerősség zérus, ez igaz a 3. és 4. felület közötti térrészben is. Itt a térerősséget három összetevő határozza meg az alábbi egyenlet szerint:

$$E_\mathrm{g} + E_3 - E_4 = 0,$$

ahol E_g a fémgömb által keltett, egyelőre ismeretlen térerősség, E_3 a 3. felület által keltett tér, amely a 3. és 4. felületek közt sugárirányban kifelé mutat, továbbá E_4 a 4. felület járuléka, amely sugárirányban befelé mutat, így negatív előjellel kell figyelembe venni.

A fenti egyenletből a kérdéses E_g térerősség kifejezhető:

$$E_\mathrm{g} = E_4 - E_3 = \frac{\sigma_4}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{\varepsilon_0} = 0,$$

ahol felhasználtuk azt a Gauss-törvényből következő tényt, hogy az E_3 és E_4 térerősségek a 3. és 4. felület töltéssűrűségeivel arányosak. Mivel azonban $\sigma_4 = \sigma_3$, így $E_\mathrm{g} = 0$. A polarizált fémgömb tehát nem hoz létre elektromos teret a félgömbhéj helyén, így a két test között *nem* lép fel erő!

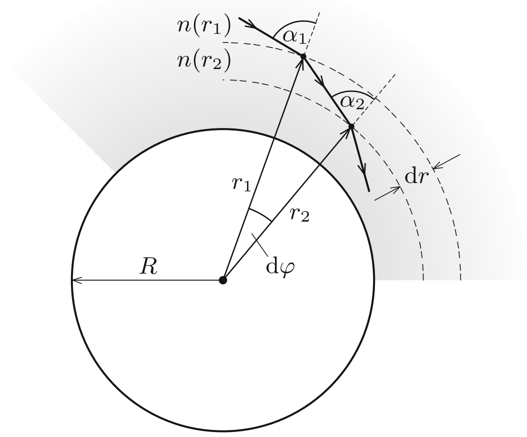
F6. Gondolatban osszuk fel a bolygó légkörét koncentrikus, vékony gömbhéjakra. Vizsgáljuk a fénysugarat, ahogy α_1 beesési szög alatt belép az r_1 sugarú, $\mathrm{d}r = r_2 - r_1$ vastagságú gömbhéjba (*6. ábra*).

A gömbhéj külső felületén a törésmutató $n(r_1)$-ről $n(r_2)$-re változik, így a β_1 törési szög a Snellius–Descartes-törvénnyel számolható:

$$n(r_1)\sin\alpha_1 = n(r_2)\sin\beta_1.$$

A β_1 szög kifejezhető azzal az α_2 beesési szöggel is, amely alatt a fénysugár az r_2 sugarú gömbhéjhoz ér:

$$\beta_1 = \alpha_2 - \mathrm{d}\varphi,$$



6. ábra

ahol dφ a sugár 6. ábrán látható kis szögelfordulása. A fenti két egyenlet, valamint a két szög összegének szinuszára vonatkozó azonosság felhasználásával a következőt kapjuk:

$$n(r_1)\sin\alpha_1 \approx n(r_2)\sin\alpha_2(1-\mathrm{d}\varphi\cot\alpha_2).$$

Az ábráról leolvasható még az $r_1\,\mathrm{d}\varphi\cot\alpha_2 \approx r_1 - r_2$ geometriai összefüggés. Ennek segítségével megkapjuk a „gömbi Snellius–Descartes-törvényt”:

$$n(r_1)r_1\sin\alpha_1 = n(r_2)r_2\sin\alpha_2.$$

Megjegyzés: Ez az egyenlet abból a tényből is levezethető, hogy közeghatáron a fény hullámszámvektorának felülettel párhuzamos komponense nem változik meg, így a fény (bolygó középpontjára vonatkoztatott) „impulzusnyomatéka” állandó.

a) A feladatban $n(r)=n_0R/r$, azaz a fény beesési szöge állandó marad a közeghatárokon. Ez azt jelenti, hogy a fénysugár pályájának érintője állandó, $90^\circ-\theta$ szöget zár be a sugárral; a fény trajektóriája tehát *logaritmikus spirál.*

b) A fény terjedési sebessége a bolygó középpontjától r távolságra:

$$v(r)=\frac{c}{n(r)}=\frac{c}{n_0R}r,$$

így a sebesség radiális komponense $-v(r)\sin\theta$. A felszín eléréséhez szükséges időt tehát a következő integrál adja meg:

$$t=\int \mathrm{d}t=\int_{R+h_0}^{R}\frac{\mathrm{d}r}{-v(r)\sin\theta}=\frac{n_0R}{c\sin\theta}\int_{R}^{R+h_0}\frac{\mathrm{d}r}{r}.$$

Az integrálást elvégezve végül a következő eredményt kapjuk:

$$t=\frac{n_0R}{c\sin\theta}\ln\frac{R+h_0}{R}\approx\frac{n_0h_0}{c\sin\theta},$$

ahol az utolsó lépésben feltételeztük, hogy $h_0 \ll R$.

c) Írjuk fel a φ szög $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ változási ütemét:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\frac{v(r)\cos\theta}{r}=\frac{c\cos\theta}{n_0R},$$

amely állandó. A feladat szövege szerint a rádiuszvektor $2\pi N$ szöggel fordul el a felszín eléréséig (itt N egész szám), a felszín eléréséig szükséges t időt korábban meghatároztuk, így:

$$\frac{2\pi N}{t}=\frac{c\cos\theta}{n_0R}.$$

A t-re kapott korábbi eredményt felhasználva $\tan\theta$ kifejezhető:

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{1}{2\pi N}\ln\frac{R+h_0}{R}\approx\frac{1}{2\pi N}\frac{h_0}{R}.$$

Megjegyzés. Természetesen akkor is az indítási pont alatt éri el a lézersugár a bolygó felszínét, ha sugárirányban indítjuk ($\theta=90^\circ$). Formálisan megkapjuk ezt a megoldást is az $N=0$ helyettesítéssel.

Sarkadi Tamás, Szász Krisztián, Tasnádi Tamás,
Vankó Péter és **Vigh Máté**

Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenye

Versenyfelhívás és beszámoló

Ha szereted a fizikát, a kísérletezést, jól beszélsz angolul, és egy életre szóló élményre vágysz, akkor itt a helyed!

A Fizika Világbajnokságnak is nevezett IYPT (Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenye, angolul International Young Physicists' Tournament) egy angol nyelvű, kísérleti fizikai csapatverseny, ahova a világ minden tájáról (több mint 30 országból) érkeznek középiskolások, hogy összemérjék tudásukat. Az IYPT a XXI. század kihívásainak megfelelő készségeket vár el az indulóktól: nemcsak a fizikában kell jártasnak lenni, hanem az eredményeket prezentálni és megvédeni is tudni kell! A résztvevő diákok a versenyt megelőzően elvégzett fizikai méréseiket és kutatásaikat egy – angol nyelven előadott – tudományos prezentáció formájában mutatják be a rivális csapatoknak.

Az IYPT verseny magyarországi első fordulójára (Hungarian Young Physicists' Tournament, HYPT) az `hypt.elte.hu` oldalon való regisztráció határideje:

2020. november 9. éjfél.

A jelentkező diákoknak egy kiválasztott IYPT problémáról 10 perces angol nyelvű előadást kell készíteni és felvenni, majd 2020. november 30-ig beküldeni.

Ezen előadások alapján a legjobb beküldők az ELTE TTK-n, december közepén megrendezésre kerülő szóbeli fordulón vehetnek részt. Az induló diákoknak itt az általuk beküldött előadást élőben kell előadniuk.

A decemberi fordulót idén 100 000 forint összdíjazással hirdetjük meg, amiben az évfolyamonkénti első helyezett versenyzők osztoznak.

A decemberi szóbeli fordulót követően a 10 legmagasabb pontszámot elérő diák az ELTE TTK Anyagfizikai Tanszékén végezheti a további kutatásait. A felkészülés során nyújtott teljesítmény alapján 3 diák indulhat az osztrák AYPT versenyen, az 5 legjobb diák pedig bekerül a Pakisztánban megrendezésre kerülő 34. IYPT magyar csapatába.

Jelentkezés, a feladatok szövege és további információk az `hypt.elte.hu` weboldalon, illetve az `email@hypt.elte.hu` email címen.

Néhány példa a 2021-re kitűzött IYPT problémák közül:

2. Köröző mágnesek. A hengeres elem két végére rögzítsünk különböző átmérőjű gombmágneseket. Alumínium fóliára helyezve a tárgy körözni kezd. Vizsgáld meg, hogy a mozgás hogyan függ a releváns paraméterektől!

6. Visszafordíthatatlan Cartesius-búvár. Helyezzünk egy egyszerű Cartesius-búvárt (ami például egy fordított kémcső, részben vízzel megtöltve) vízzel töltött hosszú, függőleges csőbe. A csőben lévő nyomást növelve a Cartesius-búvár süllyedni kezd. Amikor elér egy bizonyos mélységet, soha nem tér vissza a felszínre, még akkor sem, ha a nyomást visszaállítják a kezdeti értékre. Vizsgáld meg ezt a jelenséget, és mutasd be hogyan függ a releváns paraméterektől!

12. Wilberforce-inga. A Wilberforce-inga egy függőlegesen felfüggesztett spirálrugóból és egy azon lógó tömegből áll. A tömeg a rugón felfelé és lefelé egyaránt mozoghat, és függőleges tengelye körül foroghat. Vizsgáld meg egy ilyen inga viselkedését, és mutasd be hogyan függ a mozgása a releváns paraméterektől!

Az első online IYPT

2020-ban a tervek szerint Temesváron került volna megrendezésre a 33. IYPT. A koronavírus-járvány sajnos közbeszólt: 2020. április környékén a román szervezők lemondták. Grúziába került volna át a verseny, de az utolsó pillanatban az is meghiúsult. A nemzetközi szervezőbizottság ezek után az online megrendezés mellett döntött. Egy alapvetően a kommunikációra és tudományos vitára épülő versenynél ez nem kis kihívás, és természetesen a csapatok felkészülését is nehezítette a járvány. Összesen 12 ország tudta vállalni a részvételt, köztük a magyar csapattal. A nagyon kiegyenlített mezőnyben végül a 9. helyet szereztük meg.

További információkért látogasd meg, és kövesd Facebook oldalunkat: `www.facebook.com/hypt.elte.hu`, ahol a csapat képeit és eseményeit találod, amik többet mondanak minden szónál!

A magyar csapat tagjai voltak:

Dobó Ádám (Nagykanizsa, Batthyány Lajos Gimnázium, 12. évf.);

Kadlecsik Ádám (Tatai Eötvös József Gimnázium és Kollégium, 12. évf.);

Lipovics T. Dániel (Budapest, Piarista Gimnázium, 12. évf.);

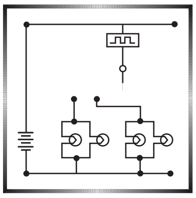
Nádori Jakab (Budapest, ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Gimnázium, 11. évf.);

Simon Tamás (Budapest, Német Nemzetiségi Gimnázium, 10. évf.).

Idén is nagyon sok munka és tanulás előzte meg a nemzetközi versenyt, bár a járvány a mi helyzetünket is megnehezítette. Az ELTE TTK épületében található diáklaborunk mellett a felkészülés során idén egy edzőtáboron is részt vehettek a versenyzők. A felkészítő munkát egyetemi oktatók/kutatók (*Asbóth János, Boross Péter, Ispánovity Péter, Hömöstrei Mihály, Jenei Péter, Széchenyi Gábor, Tüzes Dániel, Vincze Miklós*) és egyetemi hallgatók (*Bánóczki Tímea, Plaszkó Noel, Penc Patrik, Gyulai Marcell, Vavrik Márton*) végezték az ELTE Fizikai Intézetében.

A sok nevetéssel és kemény munkával töltött év után most indul a felkészülés a 2021-es megmérettetésre, mely Pakisztánban kerül megrendezésre.

az HYPT szervezők csapata



Fizika gyakorlatok megoldása

G. 705. *Két golyót engedünk el egy magasan lebegő léghajóból. Melyik golyó esik gyorsabban, ha*

a) egyforma nagyok, de nem egyforma nehezek;

b) egyforma nehezek, de nem egyforma nagyok?

(*3 pont*)

Megoldás. Mivel a léghajó „magasan” lebeg, az onnan leejtett golyó esési sebessége egyenlőnek vehető az állandósult („maximális”) sebességgel.

a) A golyók akkor fogják elérni a maximális sebességüket, amikor a közegellenállási erő már majdnem pontosan megegyezik a nehézségi erővel. Ilyenkor a gyorsulásuk (jó közelítéssel) nulla, tehát (gyakorlatilag) állandó sebességgel fognak esni. Ennek feltétele:
$$mg=\frac{1}{2}C\varrho Av^2,$$
vagyis
$$v=\sqrt{\frac{2mg}{C\varrho A}}. \tag{1}$$
(A a golyó keresztmetszetének területét, m a golyó tömegét és ϱ a levegő sűrűségét jelöli, C pedig az alakra jellemző állandó.) Azonos méretű golyókra alkalmazva az (1) képletet, mivel abban csak az m értéke különbözik a két golyónál, innen látszik, hogy minél *nagyobb* a golyó tömege, annál gyorsabban (nagyobb sebességgel) esik.

b) Felhasználva az (1) összefüggést leolvashatjuk, hogy amikor csak a keresztmetszet különbözik a két testnél, akkor a *kisebb* méretű golyó esik gyorsabban.

Gábriel Tamás (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.) dolgozata alapján

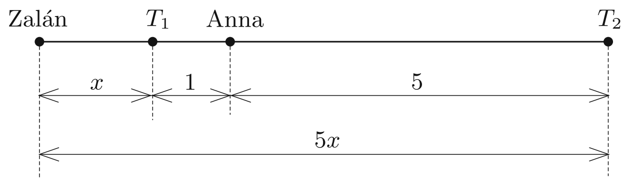
Megjegyzés. Több versenyző úgy értelmezte a „melyik golyó esik gyorsabban" kérdést, hogy melyiküknek nagyobb (adott sebesség mellett) a gyorsulása. Ez azonban tévedés, hiszen a gyorsaság (sebesség) és a gyorsulás – hasonló hangzásuk ellenére – különböző fizikai mennyiségek. Az előbbi mértékegysége m/s, az utóbbié m/s^2.

62 dolgozat érkezett. Helyes 21 megoldás. Hiányos (1–2 pont) 38, hibás 3 dolgozat.

G. 710. *Anna és Zalán osztálytársak, egy egyenes utcában két különböző házban laknak. Minden reggel ugyanakkor lépnek ki a kapun, és egyenletesen haladva mennek az iskolába. Zalán távolabb lakik az iskolától, de ő a gyorsabb, bizonyos idő alatt utoléri Annát. Egyik alkalommal Anna hamarabb szeretne találkozni Zalánnal, és emiatt egymás felé indulnak el. Ekkor a szokásosnál ötször hamarabb találkoznak. Hányszor gyorsabb Zalán Annánál?*

(*3 pont*)

Megoldás. Az *ábrán* látható T_1 pont a szokásos találkozási pontjuk, T_2 pedig azt a pontot jelöli, ahol egymás felé haladva találkoznak.



Tekintsük egységnyinek azt az utat, amennyit Anna tesz meg a vele szembe haladó Zalánnal való találkozásig, és jelöljük x-szel a Zalán által megtett utat a vele szemben haladó Annával való találkozásig.

Amikor azonos irányban haladnak, akkor ötször hosszabb idő múlva találkoznak, ezalatt Anna 5 egységnyi, Zalán pedig $5x$ hosszúságú utat tesz meg. Az ábráról leolvasható, hogy

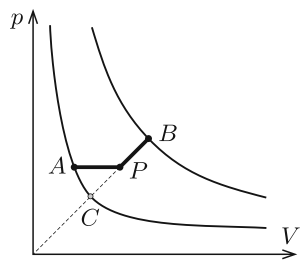
$$5x = x + 1 + 5, \qquad \text{vagyis} \qquad 4x = 6, \quad \text{azaz} \quad x = 1{,}5.$$

Zalán tehát 1,5 egységnyi utat tett meg, míg Anna 1 egységnyit, vagyis Zalán másfélszer gyorsabb Annánál.

Nagy Eszter Zsófia (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.)

56 dolgozat érkezett. Helyes 41 megoldás. Kicsit hiányos (1–2 pont) 9, hibás 1, nem versenyszerű 5 dolgozat.

Fizika feladat megoldása



P. 5235. $n = 2$ mol *anyagmennyiségű, egyatomos ideális gáz az* ábrán *látható* $A \to P \to B$ *folyamatot végzi. A gáz hőmérséklete a kiinduló állapotban* $T_1 = 280$ K, *a végállapotban* $T_2 = 4T_1$. *Az* AP *szakasz párhuzamos a* V *tengellyel, a* BC *szakasz meghosszabbítása átmegy az origón, a* P *pont pedig a* BC *szakasz felezőpontja.*

a) Határozzuk meg a gáz hőmérsékletét a P *állapotban!*

b) Mennyi hőt vesz fel a gáz az $A \to P \to B$ *folyamatban?*

(*5 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

Megoldás. *a*) Tudjuk, hogy $T_A = T_C = T_1 = 280$ K és $T_B = 4T_1 = 1120$ K. A PB egyenes átmegy az origón, így az egyenlete:

$$p(V) = k \cdot V.$$

Az egyenes pontjaira felírt állapotegyenlet:

$$p(V)V = k \cdot V^2 = nRT, \quad \text{tehát} \quad V = \sqrt{\frac{nRT}{k}}.$$

Mivel P a BC szakasz felezőpontja, a „vízszintes" koordinátákra igaz:

$$V_P = \frac{V_C + V_B}{2},$$

$$\sqrt{\frac{nRT_P}{k}} = \frac{\sqrt{\frac{nRT_C}{k}} + \sqrt{\frac{nRT_B}{k}}}{2},$$

$$4nRT_P = nRT_C + nRT_B + 2nR\sqrt{T_C T_B},$$

$$T_P = \frac{1}{4}\big(T_1 + 4T_1 + 2\sqrt{4T_1 T_1}\big) = \frac{9}{4}T_1.$$

Eszerint a gáz hőmérséklete a P állapotban 630 K.

b) A folyamatban egyatomos ideális gáz vesz részt, ezért a szabadsági fokok száma $f = 3$. Az AP állapotváltozás izobár, amelyre a hőtan I. főtétele így alkalmazható:

$$\Delta E_{AP} = W_{AP} + Q_{AP},$$

$$\frac{f}{2}nR(T_P - T_A) = -p_A(V_P - V_A) + Q_{AP},$$

ahonnan

$$Q_{AP} = \frac{f}{2}nR(T_P - T_1) + p_A V_P - p_A V_A = \frac{f}{2}nR(T_P - T_1) + p_P V_P - nRT_A =$$

$$= \frac{3}{2}nR(T_P - T_1) + nRT_P - nRT_1 = \frac{5}{2}nR(T_P - T_1).$$

A PB folyamatban a gázon végzett munkát a PB szakasz „alatti" trapéz területe adja meg:

$$\Delta E_{PB} = W_{PB} + Q_{PB},$$

$$\frac{f}{2}nR(T_B - T_P) = -\frac{p_P + p_B}{2}(V_B - V_P) + Q_{PB},$$

$$Q_{PB} = \frac{f}{2}nR(T_B - T_P) + \frac{1}{2}(p_P V_B + p_B V_B - p_P V_P - p_B V_P) =$$

$$= \frac{f}{2}nR(4T_1 - T_P) + \frac{1}{2}(p_P V_B - p_B V_P) + \frac{1}{2}nR(T_B - T_P) =$$

$$= \frac{f+1}{2}nR(4T_1 - T_P) + \frac{1}{2}(p_P V_B - p_B V_P).$$

A PB egyenes egyenletét felhasználva látszik, hogy

$$p_P V_B - p_B V_P = kV_P V_B - kV_P V_B = 0,$$

tehát

$$Q_{PB} = \frac{f+1}{2}nR(4T_1 - T_P) + 0 = 2nR(4T_1 - T_P).$$

Az összes felvett hő:

$$Q = Q_{AP} + Q_{PB} = \frac{5}{2}nR(T_P - T_1) + 2nR(4T_1 - T_P) = nR\left(\frac{11}{2}T_1 + \frac{1}{2}T_P\right).$$

Behelyettesítve az $n = 2$, $R = 8{,}31$ J/(mol K), $T_1 = 280$ K és $T_P = 630$ K értékeket, azt kapjuk, hogy az $A \to P \to B$ folyamatban összesen $Q = 30{,}8$ kJ hőt vesz fel a gáz.

Horváth Anikó (Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimn., 11. évf.)

Megjegyzés. A keresett mennyiségek (T_P és Q) egyike sem függ a CB egyenes meredekségét jellemző k állandótól. Ezt – az első pillanatban meglepőnek tűnő – tényt a hosszú számolás elvégzése nélkül is beláthatjuk, ha felírjuk az ismert és a keresett mennyiségek mértékegységét. Mivel k mértékegysége J/m^6, és a *méter* egyetlen más fizikai mennyiség dimenziójában nem szerepel, T_P és Q nem függhet k-tól.

(G. P.)

27 dolgozat érkezett. Helyes 16 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 5, hiányos (2–3 pont) 5, hibás 1 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 398. Mérjük meg a gördülési ellenállási tényező értékét két különböző hengerre, kétféle talaj esetén! (A két, lehetőleg egyforma sugarú henger lehet például egy folpack fólia papírhengere és egy eredeti csomagolású alufólia-tekercs, a kétféle talaj lehet otthon a szoba padlója puha szőnyeggel és szőnyeg nélkül.) Vizsgáljuk meg, hogy mennyire tekinthető a hengerek lassulása állandónak!

(*6 pont*) Közli: *Zagyva Tiborné,* Baja

G. 717. Egy denevér a barlang falával párhuzamosan repül 45,0 m/s sebességgel. Egy rövid ultrahang jelet bocsát ki, melynek visszhangját 0,120 s múlva hallja meg. Milyen távol repül a denevér a faltól? A barlangban az ultrahang terjedési sebessége 333 m/s.

(*4 pont*)

G. 718. Tegyük fel, hogy a Nap anyaga szénből és oxigénből áll. (A régi időkben komolyan felmerült ez az elképzelés.) Legfeljebb mennyi lenne a Nap teljes élettartama, ha a szén tökéletes égésekor egyenletesen ugyanannyi energiát sugározna ki időegységenként, mint jelenleg? (Számoljunk a Nap jelenlegi tömegével!)

(*4 pont*)

G. 719. Egy névlegesen 330 ml-es, bontatlan üdítősdoboz lebeg a vízben. Az alumíniumból készült üres doboz tömege 13 g. Hány ml gáz van a bontatlan dobozban, ha benne pontosan 330 ml üdítőital van, melynek sűrűsége jó közelítéssel megegyezik a víz sűrűségével?

(*4 pont*)

G. 720. A Tour de France kerékpáros körversenyen a versenyzők vízszintes terepen egyenletesen, 50 km/h sebességgel haladnak. A „mezőny" és a „szökevények" közötti távolság 1 km. Amikor egy enyhe, 5 km hosszú emelkedőhöz érnek, a sebességük nagyon hamar 40 km/h-ra csökken, majd az ugyancsak 5 km hosszú ereszkedőn nagyon hamar 60 km/h-ra nő. Ábrázoljuk, hogyan változik a mezőny és a szökevények közötti távolság az idő függvényében attól az időponttól kezdve, amikor a szökevények elérik az emelkedő alját!

(*4 pont*) Közli: *Szabó Endre,* Vágfüzes (Szlovákia)

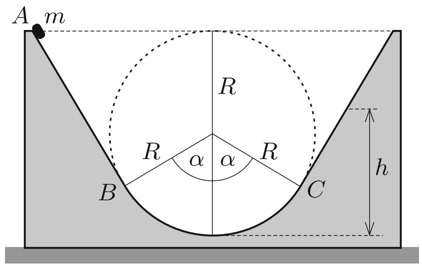
P. 5250. Egy autó állandó sebességgel halad egy hosszú, egyenes úton. A kerék egy külső pontjának „átlagos sebessége" az autó haladási sebességéhez képest kisebb, nagyobb vagy egyenlő vele? Vizsgáljuk az „átlagos sebesség" két különböző definícióját:

a) sebességvektor időátlagának nagysága;

b) sebességnagyság időátlaga.

(*4 pont*) Közli: *Széchenyi Gábor,* Budapest

P. 5251. Az m tömegű, kis méretű testet az *ábrán* látható, rögzített hasáb A pontjában kezdősebesség nélkül elengedjük. A test a bal oldali egyenes szakaszon és az R sugarú köríven súrlódásmentesen csúszik. A jobb oldali egyenes szakasz nem súrlódásmentes, a súrlódási tényező μ.



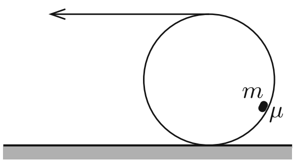
a) Mekkora erővel nyomja a test a hasábot a pálya legmélyebb pontján?

b) Mekkora a test sebessége a C pontban?

c) Milyen h magasságba emelkedik fel a test?

Adatok: $m = 0{,}6$ kg, $R = 30$ cm, $\alpha = 60^\circ$, $\mu = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$.

(*5 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs



P. 5252. M tömegű, vékony falú csőre fonalat csévélünk, és a fonalat húzva az *ábrán* látható módon a csövet állandó sebességgel gurítjuk. A cső tisztán gördül a vízszintes talajon. A cső belsejébe kis méretű, m tömegű testet helyeztünk, ami odabent állandósult szöghelyzetben csúszik, a súrlódási együttható itt μ. Mekkora vízszintes fonálerő szükséges az állandó sebesség fenntartásához?

(*5 pont*) Közli: *Vladár Károly,* Kiskunhalas

P. 5253. Az Orfűn található Pécsi-tó átlagos vízmélysége 3,3 méter. A 25 °C-os víz hőmérsékletének mekkora változása okozná a vízszint fél centiméteres süllyedését?

(*4 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

P. 5254. Egy mól normál állapotú levegőt izotermikusan összenyomunk eredeti térfogatának felére, majd adiabatikusan kitágítjuk eredeti térfogatára.

a) Mekkora a folyamat során a gázon végzett összes munka?

b) Mennyi a gáz által leadott összes hő?

c) Mennyi a belső energia változása?

d) Mekkora a gáz végső hőmérséklete?

(*4 pont*) *Példatári feladat nyomán*

P. 5255. Egy igen hosszú, $m=10$ g tömegű, egyenes szigetelőszál középpontja felett, attól $d=5$ cm-re egy $Q=3\cdot 10^{-7}$ C töltésű, pontszerű test van rögzítve. A szigetelőszálat is rögzítjük, majd egyenletes töltéseloszlással $\sigma=-2\cdot 10^{-6}$ C/m lineáris töltéssűrűséggel feltöltjük. Mekkora gyorsulással indul el a szál, ha rögzítését lökésmentesen feloldjuk?

(*5 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 5256. Hogyan változik meg egy síkkondenzátor kapacitása, ha a fegyverzetek közötti térrész két felét két különböző dielektromos állandójú, homogén, elektromosan szigetelő anyaggal töltjük ki, és a két réteget elválasztó felület

a) a fegyverzetekre merőleges sík;

b) a fegyverzetekkel párhuzamos sík?

(*4 pont*) Közli: *Wiedemann László,* Budapest

P. 5257. *Eötvös Loránd* a saját königsbergi tanáráról – *Franz Ernst Neumann* (1798–1895) – elnevezett fizikai törvényt az alábbi módon mutatta be. Két hosszú, egymással párhuzamosan és vízszintesen, a teremben magasan kifeszített fémhuzal végeit az egyik oldalon érzékeny galvanométerrel kötötte össze, a másik végükre egy, a huzalokra merőleges, mozgatható fémrudat helyezett. Ezután a huzalokon mint síneken végigcsúsztatta a rájuk helyezett, vízszintes fémrudat. A huzalok távolsága 2 m volt, a rúd végig a huzalokra merőleges maradt. Az akkori mérések szerint a földi mágneses térerősség iránya 62°-os szöget zárt be a vízszintessel, a mágneses térerősség vízszintes komponensének nagyságát pedig 0,2 oerstednek mérték az akkoriban használatos CGS rendszerben.

Mekkora sebességgel húzhatta Eötvös Loránd a fémrudat akkor, amikor megállapítható volt, hogy 80 μV feszültség jutott a galvanométerre?

(*4 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

P. 5258. Gyűjtőlencsével szeretnénk egy lámpa izzószáláról éles képet előállítani pontosan a lámpa alatt, az asztalon fekvő fehér lapon. Legalább hány dioptriás lencsére lesz szükségünk, ha az izzószál az asztal fölött 40 cm-re van?

(*4 pont*) Közli: *Woynarovich Ferenc,* Budapest

P. 5259. Egy gyorsítócsőben 200 keV energiájú deuteronokból álló nyaláb érkezik a céltárgyra, az áramerősség 0,3 mA. A deuteronok lefékeződnek a céltárgyban.

a) Másodpercenként mennyi hőt kell elvezetni a céltárgyról, hogy az ne melegedjék?

b) Változik-e az eredmény, ha a deuteronok helyett ugyanekkora energiájú és ugyanekkora áramerősséget adó elektronok, illetve α-részecskék csapódnak be a céltárgyba?

(*4 pont*) *Példatári feladat nyomán*

P. 5260. Vízszintes tengelyű, rögzített hengeren súrlódó fonalat vetünk át. Ha a fonál bal oldali végére m tömegű nehezéket, a jobb oldalira pedig $3m$ tömegűt akasztunk, akkor az álló helyzetből elengedett testek 2 m/s^2 nagyságú gyorsulással mozognak.

a) Mekkora gyorsulással mozognak a testek, ha mindkét oldalon először megduplázzuk, majd megháromszorozzuk a tömegüket?

b) Mekkora gyorsulással mozognak a testek, ha a jobb oldalon meghagyjuk a $3m$ nagyságú tömeget, de a bal oldali fonálvégre $8m$ tömegű testet akasztunk?

c) Hogyan válasszuk meg a bal oldali fonálvégre akasztott test tömegét, miközben a jobb oldalon megmarad a $3m$ tömeg, hogy elengedés után a rendszer nyugalomban maradjon?

A fonál nagyon könnyű, továbbá a fonál és a henger közötti csúszási súrlódás együtthatója megegyezik a tapadási súrlódás együtthatójával.

(*6 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

Beküldési határidő: 2020. november 15.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 70. No. 7. October 2020)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 416): **K. 664.** We have six coins, four of which weigh 100 grams each, and the remaining two weigh 99 grams each. With the help of an equal-arm balance and no weights, what is the minimum number of measurements that are sufficient to identify one of the lighter coins? **K. 665.** Some toy robots are lining up on one side of a street. In one move, we can instruct exactly three robots to cross the street. For what number of robots can we make all the robots line up on the opposite side? **K. 666.** How many six-digit multiples of 182 are there in which the three-digit number formed by the first three digits is equal to the three-digit number formed by the last three digits? **K. 667.** Start with a positive integer. In each move, take the half of the number if it is even, or add 1 to the number if it is odd. The sequence of moves terminates if it reaches the number 1. *a*) Is it true that whatever the starting number is, it is always possible to reach 1 sooner or later (with a finite number of moves)? *b*) Is it true that at most 30 moves are sufficient to reach 1 if we start from a four-digit number? **K. 668.** *a*) How many isosceles triangles are there for which the length of the legs is 13 cm and the area is 60 cm^2? *b*) How many right-angled triangles are there for which the legs are even integers, and the area is 60 cm^2?

New exercises for practice – competition C (see page 417): **Exercises up to grade 10: C. 1623.** Let m be a positive integer. Show that *a*) there exist three m-digit powers of 2; *b*) there exist at most four m-digit powers of 2. (*Brazilian problem*) **C. 1624.** Point P of side AB in a square $ABCD$ is connected to D, and point Q of side BC is connected to A. The intersection of the resulting line segments is denoted by R. The area of triangle ARD is 1200, the area of triangle APR is 600, and the area of quadrilateral $PBQR$ is $3380-240\sqrt{95}$ units of area. What is the area of quadrilateral $RQCD$? (Proposed by *L. Németh,* Fonyód) **Exercises for everyone: C. 1625.** Prove that every selection of five one-digit positive integers contains a few numbers whose sum is divisible by 10. **C. 1626.** Let F denote the midpoint of side BC in an acute-angled triangle ABC, and let T be the foot of the altitude drawn from B. Prove that if $\angle FAC=30^\circ$ then $AF=BT$. (Based on the idea of *S. Róka,* Nyíregyháza) **C. 1627.** Prove that if a, b, c are real numbers, such that $a+b+c>0$, $ab+bc+ca>0$ and $abc>0$, then $a>0$, $b>0$ and $c>0$. (Proposed by *S. Róka,* Nyíregyháza) **Exercises upwards of grade 11: C. 1628.** Find two distinct positive integers n for which $4^n+4^9+4^{100}$ is a perfect square. **C. 1629.** A sphere passes through four vertices of one face of a cube, and is tangent to the opposite face. Determine the radius of the sphere if the edge of the cube is 8 units long. (*Croatian problem*)

New exercises – competition B (see page 418): **B. 5118.** Is it possible that x, $\frac{14x+5}{9}$ and $\frac{17x-5}{12}$ are all integers? (*3 points*) **B. 5119.** In an acute-angled triangle ABC, a tangent is drawn to the inscribed circle, parallel to side BC. The tangent intersects side AC at point D. F is the orthogonal projection of point D onto the side BC. Show that $AB=AD+BF$. (*3 points*) **B. 5120.** The positive integers are coloured in the following manner: the colour of $a+b$ is always uniquely determined by the colours of a and b; that is, if the colour of a and a' is the same, and the colour of b and b' is the same, then $a+b$ and $a'+b'$ also have the same colour. Prove that if there is a colour that is used more than once then the colouring becomes periodic from some number onwards. (*4 points*) **B. 5121.** Solve the following simultaneous equations, where $x_1,x_2,\dots,x_n$ are positive real numbers, and n is a positive integer: $x_1+x_2+\dots+x_n=9$, $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}=1$. (*4 points*) **B. 5122.** ErWin Layup is the best penalty taker of all times in the basketball league of Nowhereland. Although he missed the very first penalty throw of his career, altogether he has only missed 2020 out of his total of 222 222 throws. Statisticians in Nowhereland consider a basketball penalty throw *interesting* if the ratio of successful penalty throws to all penalty throws, calculated immediately after the throw and expressed as a percentage, is a positive integer. (For example, if a player scores 12 out of a total of 40 throws then his last throw is interesting, since $\frac{12}{40}\cdot 100=30\in\mathbb{N}^+$, while the following throw, which is the 41st, cannot be interesting, whether successful or not.) What is the minimum number of interesting penalty throws that ErWin Layup may have had? (*5 points*) **B. 5123.** Ann and Barbara divided between themselves the 81 cards of the game of SET*; Ann received 40 cards and Barbara received 41. Each girl counted the number of ways they can form a SET of three cards out of the cards held by her. What may be the sum of the numbers they obtained? (*6 points*) **B. 5124.** The base of a right pyramid is a square $ABCD$, and the apex of the pyramid is E. The skew edges AB and CE are connected by a transversal that is normal to both of them. The feet of the normal transversal are point P on the line segment AB, and point Q on the line segment CE. Given that Q bisects the edge CE, determine the ratio $AP:PB$, and calculate the angle enclosed between the lateral faces and the base of the pyramid. (*5 points*) **B. 5125.** The centre of the circumscribed circle of a cyclic quadrilateral $ABCD$ is O. The rays AB and DC intersect at point E. In the circle BCE, the point diametrically opposite to E is F. Show that the lines AC, BD and OF are concurrent. (*6 points*)

---

*`https://www.setgame.com/sites/default/files/instructions/SET%20INSTRUCTIONS%20-%20ENGLISH.pdf`.

New problems – competition A (see page 419): **A. 783.** A *polyomino* is a figure which consists of unit squares joined together by their sides. (A polyomino may contain holes.) Let $n \geqslant 3$ be a positive integer. Consider a grid of unit square cells which extends to infinity in all directions. Find, in terms of n, the greatest positive integer C which satisfies the following condition: For every colouring of the cells of the grid in n colours, there is some polyomino within the grid which contains at most $n-1$ colours and whose area is at least C. (Submitted by *Nikolai Beluhov,* Stara Zagora, Bulgaria and *Stefan Gerdjikov,* Sofia, Bulgaria) **A. 784.** Let n, s, t be positive integers and $0<\lambda<1$. A simple graph on n vertices with at least λn^2 edges is given. We say that $(x_1,\dots,x_s,y_1,\dots y_t)$ is a*good insertion,* if letters x_i and y_j denote not necessarily distinct vertices and every x_iy_j is an edge of the graph $(1 \leqslant i \leqslant s,\ 1 \leqslant j \leqslant t)$. Prove that the number of good insertions is at least $\lambda^{st}n^{s+t}$. (Submitted by *Kada Williams,* Cambridge) **A. 785.** Let $k \geqslant t \geqslant 2$ positive integers. For integers $n \geqslant k$ let p_n be the probability that if we choose k from the first n positive integers randomly, any t of the k chosen integers have greatest common divisor 1. Let q_n be the probability that if we choose $k-t+1$ from the first n positive integers the product is not divisible by a perfect t-th power that is greater then 1. Prove that sequences p_n and q_n converge to the same value. (Submitted by *Dávid Matolcsi,* Budapest)

Problems in Physics

(see page 442)

M. 398. Measure the rolling resistance between a cylinder and the ground. Use two different cylinders of the same radius and carry out the measurement for two different surfaces. (The two different cylinders can be for example a paper cylinder of a roll of plastic wrap, and an aluminium foil roll, whilst the two different surfaces can be the floor of the room with and without a soft carpet.) Investigate how much the deceleration of the cylinder can be considered constant.

G. 717. A bat flies parallel to the wall of a cave at a speed of 45.0 m/s. It emits a short ultrasound signal, the echo of which is heard after 0.120 s. How far does the bat fly from the wall? The speed of ultrasound in the cave is 333 m/s. **G. 718.** Suppose the material of the Sun consists of carbon and oxygen. (In the old days, this idea came up seriously.) At most how much would the total lifespan of the Sun be if the coal burns perfectly and the energy radiated in a unit time is the same as it is now? (In the calculations, let us use the actual mass of the Sun.) **G. 719.** A closed beverage can of size 330 ml is floating in water. The can is made of aluminium, and the mass of the empty can is 13 g. How many millilitres of gas is in the closed can, if it contains exactly 330 ml of soft drink of density approximately the same as that of water? **G. 720.** In the Tour de France cycling race, the riders go uniformly at a speed of 50 km/h on a horizontal road. The distance between the peloton and the breakaway riders is 1 km. When the riders reach an approximately 5 km long climb their speed soon decreases to 40 km/h, and when they move downwards also along a distance of 5 km their speed soon increases to 60 km/h. Sketch the distance between the peloton and the breakaway group as a function of time from the moment when the breakaway reaches the climb, until the moment it reaches the end of the downhill slope.

P. 5250. A car travels at a constant speed along a long, straight road. Consider a point on the rim of the wheel of the car. Investigate the whether *a*) the average speed of this point is greater, smaller or equal to the speed of the car; *b*) the magnitude of the average velocity of this point is greater, smaller or equal to the speed of the car. **P. 5251.** A small body of mass m is released from rest at point A of a fixed prism shown in the *figure.* The body slides frictionlessly along the straight slope on the left side and along the circular path of radius R. The straight slope on the right is not frictionless, the coefficient of friction is μ. *a*) What force is exerted by the body on the prism at the lowest point of the path? *b*) What is the speed of the body at point C? *c*) To what height h will the body go up? *Data:* $m=0.6$ kg, $R=30$ cm, $\alpha=60^\circ$, $\mu=\frac{1}{2}\tan\alpha$. **P. 5252.** A thin-walled tube of mass M is rolled by pulling a yarn wound around the tube as shown in the *figure.* The tube rolls at a constant speed along the horizontal floor without slipping. Inside the tube there is a small object, which slides on the wall of the tube and remains at a constant angular position, the coefficient of kinetic friction is μ. What is the tension in the yarn when the speed of the tube is constant? **P. 5253.** The average depth of the lake Pécsi-tó, which is next to the village Orfű, is 3.3 m. How much should the temperature of the water change from 25 °C in order that the water level decrease by 0.5 cm? **P. 5254.** One mole of air initially at standard conditions is compressed isothermally to half of its initial volume and then it is allowed to expand adiabatically to its original volume. *a*) What is the total work done on the gas during the process? *b*) How much heat is released by the gas? *c*) What is the change in the internal energy of the gas? *d*) What is the final temperature of the gas? **P. 5255.** A point-like object of charge $Q=3\cdot10^{-7}$ C is fixed above a very long piece of insulating thread of mass $m=10$ g, $d=5$ cm above the midpoint of the thread. The insulating thread is also fixed and then charged uniformly, to a linear charge density of $\sigma=-2\cdot10^{-6}$ C/m. At what acceleration does the thread begin to move if it is released without any initial speed? **P. 5256.** How does the capacitance of a parallel plate capacitor change if the space between its plates is filled with two types of uniform, insulating material of two different dielectric constants, and the surface which separates them is *a*) perpendicular to the plates; *b*) parallel to the plates of the condenser? **P. 5257.** *Roland Eötvös* demonstrated the law named after his teacher at Koenigsberg – *Franz Ernst Neumann* (1798–1895) – as follows: he stretched two long pieces of metal wires in a room horizontally and parallel to each other at a high position and connected their ends on one side through a sensitive galvanometer. To the other ends a piece of moveable metal rod was connected perpendicularly to the wires. Then he slid the rod along the wires such that it remained perpendicular to the wires, whose distance was 2 m. According to the measurements at that time the angle between direction of the magnetic field of the Earth and the horizontal was 62°. The horizontal component of the magnetic field was measured to be 0.2 oersted, in the CGS system of units used at that time. At what speed did Eötvös pull the rod if the reading on the galvanometer was 80 μV? **P. 5258.** We would like to create a sharp image of the filament of an incandescent lamp with a converging lens exactly below the lamp on a white sheet of paper lying on the tabletop. At least how many dioptres is the power of the lens if the paper is 40 cm below the lamp? **P. 5259.** In a particle accelerator a beam of deuteron of energy 200 keV hits a target, the current is 0.3 mA. The deuterons stop in the target. *a*) How much thermal energy should be taken away from the target in each second if the target does not warm up? *b*) Will the result change if instead of deuterons, the same energy electrons or α particles, which give the same current, hit the target? **P. 5260.** A piece of thread runs around a fixed cylinder having a horizontal axis. If an object of mass m is attached to the left end of the rope and another object of mass $3m$ is attached to the right end of the rope, the objects, which were released from rest, move with an acceleration of 2 m/s^2. *a*) What is the acceleration of the objects if the mass of the bodies at both sides is first doubled, and then tripled? *b*) What is the acceleration of the objects if on the right side the object of $3m$ remains, but to the left end of the rope an object of mass $8m$ is attached? *c*) How should the mass of the object at the left be changed if on the right the object of mass $3m$ is not changed and the system stays at rest after releasing the objects? The rope is very light, and the coefficients of static and kinetic friction between the rope and the cylinder are the same.