

## Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire



### I. rész

1. a) Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} < \frac{13}{27}. \quad (5 \text{ pont})$$

b) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a  $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$  intervallumon:

$$1 + 4 \sin x - 4 \cos^2 x = 0. \quad (6 \text{ pont})$$

2. a) Kata és Máté nemrég tanulták az iskolában az osztókat. Kitaláltak egy játékot. A játékot Kata kezdi és felváltva mondanak az  $n$  pozitív egész szám osztói közül egyet úgy, hogy olyan osztót nem mondhatnak, amely korábban már elhangzott. Az veszít, aki már nem tud újabb osztót mondani. Hány olyan  $n$  pozitív egész szám van az  $\{1; 2; 3; \dots; 25\}$  halmazban, amely esetén Kata nyer? (4 pont)

b) Hány olyan  $n$  pozitív egész szám van a  $\{1; 2; 3; \dots; 2021\}$  halmazban, amelyre igaz, hogy  $2^{n+3} + 2^n$  négyzetszám? (5 pont)

c) Adjuk meg a  $p$  valós paraméter lehetséges értékeit, ha az alábbi polinom összevont alakjában a másodfokú tag együtthatója  $-3$ :

$$(x-1)^2 \cdot (p+2x)^2. \quad (5 \text{ pont})$$

3. a) Egy dobozban van 7 különböző pár kesztyű. A dobozból egyesével, visszatevés nélkül húzunk ki kesztyűket mindaddig, amíg nem kapunk egy pár kesztyűt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ehhez legfeljebb 3-szor kell húzunk a dobozból? (7 pont)

b) Az iskola 11.-es és 12.-es legjobb 12 matekos diákjának nemek szerinti és évfolyam szerinti eloszlását a táblázat tartalmazza. A tanáruk véletlenszerűen választott közülük diákokat a körzeti matekversenyre. A verseny szabályzata szerint egy csapatban ketten indulnak (a csapattagok között nincs kitüntettség), akik közül legalább az egyikük lány (akár mindkettő résztvevő lehet lány) és a két résztvevő nem lehet ugyanarról az évfolyamról. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a tanáruk a versenyszabályzatnak megfelelő nevezést adott le? Eredményünket 3 tizedesjegyre kerekítve adjuk meg. (5 pont)

	11.-es	12.-es
Fiúk	4	3
Lányok	2	3

4. Adott az  $x^2 + y^2 + 18x - 4y + 45 = 0$  egyenletű  $k$  kör.

a) Igazoljuk, hogy a  $k$  kör középpontjának koordinátái  $K(-9; 2)$ . (2 pont)

b) Határozzuk meg a  $k$  kör  $P(-7; 8)$  pontjába húzható érintőjének egyenletét. (3 pont)

c) Adottak az  $A(1; 1)$ ,  $B(10; 4)$ ,  $C(2; 8)$  pontok. Mutassuk meg, hogy a három pont által meghatározott háromszög köré írható körének középpontja illeszkedik az  $x + 3y = 17$  egyenletű egyenesre. (9 pont)

## II. rész

5. Egy derékszögű háromszög oldalaiából álló minta terjedelme 18 egység, a medián 24 egység.

a) Igazoljuk, hogy a háromszög oldalainak hossza 7; 24 és 25 egység. (5 pont)

b) Adjuk meg a háromszög beírt és köré írt körének középpontjának távolságát. (7 pont)

A fenti háromszög befogóin megjelöljük azokat a belső osztópontokat, amelyek a derékszögű csúcstól egész egység távolságra helyezkednek el.

c) Hány olyan háromszög adható meg, melyeknek csúcsai ezen belső osztópontok közül kerülnek ki? (4 pont)

6. a) Ottónak 55 emelt matekos diákja van, akikkel tesztet írat koordináta-geometriából.

A teszten 3 kérdés van és minden egyes kérdésre 3 válaszlehetőség, melyek közül pontosan 1 helyes válasz van. Mutassuk meg, hogy van legalább 3 olyan diák, akik pontosan ugyanúgy töltötték ki a tesztet. (Két tesztkitöltést akkor tekintünk azonosnak, ha az egyes kérdésekre adott válasz minden esetben megegyezik.) (5 pont)

b) A fenti 55 diák közül András, Bogi, Csaba, Dani, Emese, Feri, Gizi és Huba úgy töltötték ki a teszt első kérdését, hogy minden egyes válaszlehetőség legalább egyszer előfordult a válaszaik között (3 válaszlehetőség volt minden egyes kérdésre). Hányféle különböző kitöltést tud adni a 8 tanuló csak az első kérdésre, ha csak az számít, hogy az egyes válaszlehetőségeket hányan jelölték meg? (6 pont)

c) A diákok közül Ilona, József, Kati, Laci, Marci és Nóri nagyon rosszul teljesítettek a teszten, ezért Ottó úgy döntött, hogy a jobb teljesítés érdekében alakítsanak ki tanuló párokat (azaz 2 diákból álló csoportokat). Hányféleképpen alakíthat ki a 6 diák tanuló párokat, ha az egyes tanuló párok között és a tanuló párokon belül sincs kitüntettség a diákok között? (5 pont)

7. Szorgalmas Szonja elhatározza, hogy koordináta-geometriai hiányosságait szorgos gyakorlással orvosolja. Ezért minden egyes nap megold 20 ilyen jellegű feladatot. Még nem megy neki olyan jól, ugyanis minden nap csak 5 feladatot tud helyesen megoldani.

Egy héten át minden egyes nap megkéri Lusta Lujzát, hogy ellenőrizze le mind a 20 feladatot. Lujza nem nézi végig az összes feladatot. Minden egyes nap csak 3, általa véletlenszerűen kijelöltet ellenőriz le.

a) Mutassuk meg, hogy három tizedesjegyre kerekítve 0,601 annak a valószínűsége, hogy az adott napon a 3 ellenőrzött feladatból lesz helyesen megoldott feladata Szonjának. (4 pont)

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 7 nap alatt legfeljebb egyszer fordul elő az, hogy lesz helyesen megoldott feladata Szonjának? Válaszunkat 4 tizedesjegyre kerekítve adjuk meg. (5 pont)

c) Legalább hány napon keresztül kell Lujzának átnéznie a feladatokat az ő sajátos módszerével, hogy legalább 99,99%-os valószínűséggel legyen olyan nap, amikor van helyesen megoldott feladata Szonjának? (7 pont)

8. a) Egy számtani sorozat első 9 tagjának összege 198. Mekkora a sorozat első tagja és differenciája, ha az első 18 tagjának összege 639? (4 pont)

b) Egy mértani sorozat hányadosa 2. A sorozat  $n$ -edik tagja 16 és az első  $n$  tag összege 31,75. Határozzuk meg  $n$  értékét. (5 pont)

c) Igazoljuk, hogy az  $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$  sorozat szigorúan monoton növekedő. (5 pont)

d) Adjuk meg az  $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$  sorozat legkisebb tagját. (2 pont)

9. Adott az 3; 4; 5;  $x + 7$ ;  $11 - x$  öt elemből álló minta.

a) Mutassuk meg, hogy a minta szórnégyzete  $\frac{2x^2 - 8x + 40}{5}$ . (A minta szórnégyzete a minta szórásiának a négyzete.) (5 pont)

b) Írjuk fel az  $f(x) = \frac{2x^2 - 8x + 40}{5}$  függvénynek az  $x_0 = 7$  abszcisszájú pontjába húzható érintőjének az egyenletét. (Abszcissza: a pont első koordinátája.) (5 pont)

c) Mekkora területet zár közre az  $x$  tengely, az  $x = 0$ ;  $x = 6$  egyenes és az  $f(x) = \frac{2x^2 - 8x + 40}{5}$  függvény? (6 pont)

**Fridrik Richárd**  
Szeged