KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

72. évfolyam 2. szám Budapest, 2022. február

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 1050 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

Főszerkesztő: RATKÓ ÉVA
Fizikus szerkesztő: GNÄDIG PÉTER
Műszaki szerkesztő: MIKLÓS ILDIKÓ
Borító: BURGHARDT ZSUZSA
Kiadja: MATFUND ALAPÍTVÁNY
Alapítványi képviselő: KÓS RITA
Felelős kiadó: KATONA GYULA
Nyomda: OOK-PRESS Kft.
Felelős vezető: SZATHMÁRY ATTILA
INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest,
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
Telefon: 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8800 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from
the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

Jelentés a 2021. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyről

A Bolyai János Matematikai Társulat a 2021. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyt október 8-án 14 órai kezdettel rendezte meg. A következő nyolc helyszínen írták meg a versenydolgozatot a résztvevők: Budapest, Debrecen, Győr, Kecskemét, Miskolc (két helyszínen), Pécs és Szeged.

A Társulat elnöksége a verseny lebonyolítására az alábbi bizottságot kérte fel: *Biró András, Frenkel Péter, Harangi Viktor, Kós Géza, Maga Péter* (titkár), *Pach Péter Pál* (elnök), *Tóth Géza.* A bizottság szeptember 1-jei ülésén a következő feladatokat tűzte ki:

1. *A síkbeli derékszögű koordinátarendszer $P_i=(a_i,b_i)$ $(i=0,1,2)$ pontjai által alkotott háromszögnek az $O=(0,0)$ origó belső pontja. Mutassuk meg, hogy a P_0OP_1, P_0OP_2, P_1OP_2 háromszögek területei (ebben a sorrendben) akkor és csak akkor alkotnak mértani sorozatot, ha az*

$$a_0x^2+a_1x+a_2=b_0x^2+b_1x+b_2=0$$

egyenletrendszernek van valós x megoldása.

2. *Csodaország n városa között n légitársaság üzemeltet járatokat. Minden egyes légitársasághoz páratlan sok város tartozik, mondjuk $v_1,v_2,\dots,v_i$, amelyek között körjáratot üzemeltet mindkét irányban: a v_jv_{j+1}, illetve a $v_{j+1}v_j$ járatokra lehet jegyet váltani $1\leqslant j\leqslant i$ esetén, ahol $v_{i+1}=v_1$. Igazoljuk, hogy található páratlan sok város, mondjuk $u_1,u_2,\dots,u_k$ úgy, hogy az $u_1u_2,u_2u_3,\dots,u_{k-1}u_k,u_ku_1$ járatokra lehet jegyet váltani csupa különböző légitársaságnál.*

3. *Adott az $A_1B_3A_2B_1A_3B_2$ húrhatszög, amelynek A_1B_1, A_2B_2 és A_3B_3 átlói egy ponton mennek át. Minden $i=1,2,3$ esetén az A_iB_i és az $A_{i+1}A_{i+2}$ átlók metszéspontja C_i, továbbá D_i olyan, a B_i-től különböző pont a hatszög köré írt körön, amelyre a $B_iC_iD_i$ kör érinti az $A_{i+1}A_{i+2}$ egyenest.* (*A pontokat modulo* 3 *számozzuk, tehát $A_4=A_1$ és $A_5=A_2$.*) *Igazoljuk, hogy az A_1D_1, A_2D_2 és A_3D_3 szakaszok egy ponton mennek át.*

A bizottság a beérkezett dolgozatok átnézése után, november 16-ai ülésén a következő jelentést fogadta el:

„A verseny minden helyszínen rendben zajlott le: a 78 regisztrált versenyző közül 73-an vettek részt a versenyen, és tőlük összesen 64 dolgozat érkezett be.

Az idei versenyen az első feladatot 21-en, a második feladatot 5-en, a harmadik feladatot pedig 3-an oldották meg helyesen vagy lényegében helyesen. Bár mindegyik feladatra születtek helyes megoldások, két feladatnál többet egyetlen versenyző sem oldott meg, így a versenybizottság idén nem ad ki I. díjat.

Egy versenyző helyesen oldotta meg az első és a harmadik feladatot. Ezért

II. díjban és 50 000 Ft pénzjutalomban részesül

Seres-Szabó Márton, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 11. osztályos tanulója (tanárai *Dobos Sándor, Ádám Réka* és *Fazakas Tünde*).

III. díjban és 40 000 Ft pénzjutalomban részesül

Fleiner Zsigmond, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Hujter Bálint, Gyenes Zoltán, Dobos Sándor* és *Juhász Péter*), aki javítható hibától eltekintve helyesen oldotta meg az első feladatot és kis hiányossággal oldotta meg a második feladatot,

Várkonyi Zsombor, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium érettségizett tanulója (tanárai *Fazakas Tünde, Kocsis Szilveszter, Pósa Lajos* és *Dobos Sándor*), aki lényegében helyesen oldotta meg az első feladatot és helyes megoldást adott a második feladatra.

Dicséretben és 20 000 Ft pénzjutalomban részesül

Csaplár Viktor, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium érettségizett tanulója (tanárai *Fazakas Tünde* és *Kocsis Szilveszter*), aki apró hiányosságtól eltekintve helyesen oldotta meg az első feladatot és részeredményeket ért el a harmadik feladatban.

A versenybizottság ezúton köszöni meg minden versenyző, felkészítő tanár és a lebonyolításban közreműködő kolléga munkáját, a díjazottaknak pedig további sikereket kívánva gratulál."

A 2021. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatainak megoldása

1. *A síkbeli derékszögű koordinátarendszer $P_i=(a_i,b_i)$ $(i=0,1,2)$ pontjai által alkotott háromszögnek az $O=(0,0)$ origó belső pontja. Mutassuk meg, hogy a P_0OP_1, P_0OP_2, P_1OP_2 háromszögek területei (ebben a sorrendben) akkor és csak akkor alkotnak mértani sorozatot, ha az*

$$a_0x^2+a_1x+a_2=b_0x^2+b_1x+b_2=0$$

egyenletrendszernek van valós x megoldása.

1. megoldás. Legyenek t_2, t_1, t_0 a feladatbeli területek (ezeket pozitív számoknak tekintjük a háromszögek körüljárási irányától függetlenül). Legyen $\mathbf{v}_i=(a_i,b_i)$. A $t_0\mathbf{v}_0+t_1\mathbf{v}_1+t_2\mathbf{v}_2$ vektor mindegyik $\mathbf{v}_i$-vel párhuzamos (pl. $\mathbf{v}_0$-lal azért, mert a $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ vektorok $\mathbf{v}_0$-ra merőleges komponensének aránya a $-t_2:t_1$ aránnyal egyezik meg), ezért nullvektor.

Vegyük észre, hogy a feladatbeli egyenletrendszer ekvivalens az $x^2\mathbf{v}_0+x\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2=\mathbf{0}$ vektoregyenlettel. Ha t_2, t_1, t_0 mértani sorozat, akkor a kvóciens megoldása a feladatbeli egyenletrendszernek. Fordítva, ha x megoldása a feladatbeli egyenletrendszernek, akkor

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} - t_2\mathbf{0} = (t_0\mathbf{v}_0 + t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2) - t_2(x^2\mathbf{v}_0 + x\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) =$$
$$= (t_0 - t_2x^2)\mathbf{v}_0 + (t_1 - t_2x)\mathbf{v}_1,$$

ahonnan, mivel $\mathbf{v}_0$ és $\mathbf{v}_1$ nem párhuzamos, $t_0 = x^2t_2$ és $t_1 = xt_2$, tehát t_2, t_1, t_0 mértani sorozat.

2. megoldás (vázlat). Vegyük észre, hogy a P_i pontokat az origó körül tetszőleges szöggel elforgatva a kérdéses területek nem változnak, másrészt a két régi egyenlet lineáris kombinációjaként előállítható mindkét új egyenlet, és fordítva. Ez azt jelenti, hogy elegendő az elforgatott pontokra belátni a feladatbeli ekvivalenciát. Hasonlóan, minden pont x koordinátáját megszorozhatjuk ugyanazzal a pozitív valós számmal.

Könnyen látható, hogy ilyen transzformációk egymásutánjával minden esetben eljuthatunk egy olyan ponthármashoz, amelynél $P_0 = (1,0)$, $P_1 = (0,1)$, valamint $P_2 = (-a,-b)$ valamely pozitív a, b valós számokra. Ekkor a területek:

$$t_0 = a/2, \quad t_1 = b/2, \quad t_2 = 1/2;$$

a két egyenlet pedig a következő:

$$x^2 - a = 0, \quad x - b = 0,$$

mely esetben a kérdéses ekvivalencia nyilvánvaló.

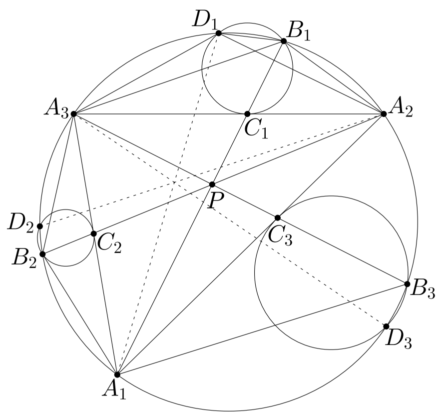
2. *Csodaország n városa között n légitársaság üzemeltet járatokat. Minden egyes légitársasághoz páratlan sok város tartozik, mondjuk $v_1, v_2, \dots, v_i$, amelyek között körjáratot üzemeltet mindkét irányban: a v_jv_{j+1}, illetve a $v_{j+1}v_j$ járatokra lehet jegyet váltani $1 \leqslant j \leqslant i$ esetén, ahol $v_{i+1} = v_1$. Igazoljuk, hogy található páratlan sok város, mondjuk $u_1, u_2, \dots, u_k$ úgy, hogy az $u_1u_2, u_2u_3, \dots, u_{k-1}u_k, u_ku_1$ járatokra lehet jegyet váltani csupa különböző légitársaságnál.*

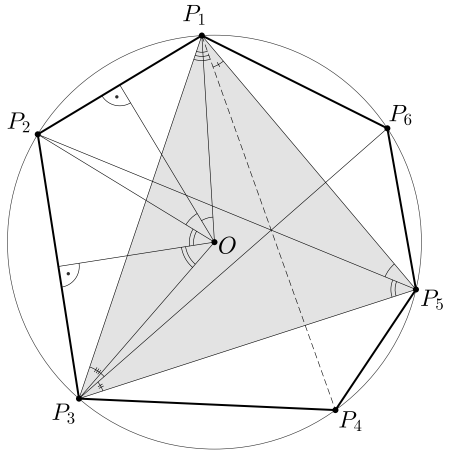
Megoldás. Minden lépésben válasszunk egy új légitársaságot (amit korábbi lépésekben még nem választottunk) és ennek a társaságnak egy járatát (azaz két várost, amik között közlekedik) arra ügyelve, hogy a kiválasztott járatokkal ne lehessen körutazást csinálni. Ezt addig csináljuk, ameddig tudjuk. Legfeljebb $n-1$ lépés lehetséges, hiszen n csúcsú körmentes gráfnak maximum $n-1$ éle lehet. Tehát mindenképp lesz olyan légitársaság, amit egyik lépésben sem választottunk.

Vegyük azt az állapotot, amikor elakadunk. A kiválasztott járatok által meghatározott gráf körmentes, így szükségképpen páros gráf, ami azt jelenti, hogy a városok megszínezhetők piros és kék színnel úgy, hogy minden kiválasztott járat egy piros és egy kék város között megy. Most vegyünk egy légitársaságot, amit egyik lépésben sem választottunk. Az ehhez tartozó páratlan körnek biztosan van olyan éle, ami két egyszínű várost köt össze. Mivel már nem tudtunk több lépést tenni, ez az él biztosan kört alkot néhány kiválasztott éllel. Ennek a körnek minden járata más légitársasághoz tartozik, és biztosan páratlan hosszú, mert két egyszínű várost kiválasztott éleknek csak páros hosszú útja köthet össze, végeztünk.

3. *Adott az $A_1B_3A_2B_1A_3B_2$ húrhatszög, amelynek A_1B_1, A_2B_2 és A_3B_3 átlói egy ponton mennek át. Minden $i=1,2,3$ esetén az A_iB_i és az $A_{i+1}A_{i+2}$ átlók metszéspontja C_i, továbbá D_i olyan, a B_i-től különböző pont a hatszög köré írt körön, amelyre a $B_iC_iD_i$ kör érinti az $A_{i+1}A_{i+2}$ egyenest. (A pontokat modulo 3 számozzuk, tehát $A_4=A_1$ és $A_5=A_2$.) Igazoljuk, hogy az A_1D_1, A_2D_2 és A_3D_3 szakaszok egy ponton mennek át.*

Megoldás. Mivel az $A_{i+1}A_{i+2}$ egyenes érinti a $B_iC_iD_i$ kört, a D_i pont a körülírt körnek ugyanazon az $A_{i+1}A_{i+2}$ ívén van, mint a B_i, tehát az A_i-vel szemközt; az A_1, D_3, A_2, D_1, A_3, D_2 ebben a sorrendben követik egymást a körön.





Lemma. *Bármely $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ húrhatszögben a P_1P_4, P_2P_5 és P_3P_6 átlók akkor és csak akkor mennek át egy ponton, ha*

$$P_1P_2\cdot P_3P_4\cdot P_5P_6=P_2P_3\cdot P_4P_5\cdot P_6P_1.$$

Bizonyítás. A Lemma állítása valójában a Ceva-tétel trigonometrikus alakjának átfogalmazása. Ha a körülírt kör sugara r, középpontja O, akkor a kerületi és középponti szögek tételéből

$$(1a)\qquad \frac{P_1P_2}{P_2P_3}=\frac{2r\sin\frac{P_1OP_2\sphericalangle}{2}}{2r\sin\frac{P_2OP_3\sphericalangle}{2}}=\frac{\sin P_1P_5P_2\sphericalangle}{\sin P_2P_5P_3\sphericalangle},$$

és hasonlóan

$$(1b)\qquad \frac{P_3P_4}{P_4P_5}=\frac{\sin P_3P_1P_4\sphericalangle}{\sin P_4P_1P_5\sphericalangle}\quad \text{és}\quad \frac{P_5P_6}{P_6P_1}=\frac{\sin P_5P_3P_6\sphericalangle}{\sin P_6P_3P_1\sphericalangle}.$$

A Ceva-tételt a $P_1P_3P_5$ háromszögre alkalmazva, a P_1P_4, P_3P_6 és P_5P_2 szakaszok akkor és csak akkor mennek át egy ponton, ha

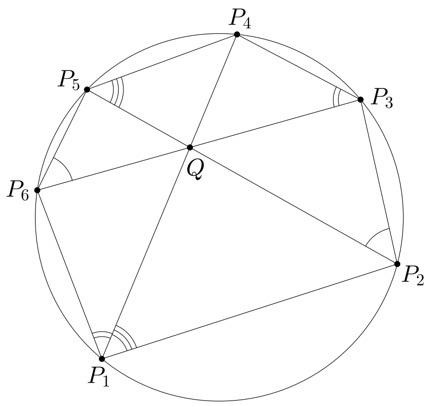
$$\frac{\sin P_1P_5P_2\sphericalangle}{\sin P_2P_5P_3\sphericalangle}\cdot\frac{\sin P_3P_1P_4\sphericalangle}{\sin P_4P_1P_5\sphericalangle}\cdot\frac{\sin P_5P_3P_6\sphericalangle}{\sin P_6P_3P_1\sphericalangle}=1,$$

ami (1a) és (1b) szerint azzal ekvivalens, hogy

$$\frac{P_1P_2}{P_2P_3} \cdot \frac{P_3P_4}{P_4P_5} \cdot \frac{P_5P_6}{P_6P_1} = 1.$$

Közvetlen bizonyítás a Lemma állítására. Ha a három átló egy közös Q ponton megy át, akkor az egyenlő kerületi szögek miatt $QP_1P_2\triangle \sim QP_5P_4\triangle$, $QP_3P_4\triangle \sim QP_1P_6\triangle$ és $QP_5P_6\triangle \sim QP_3P_2\triangle$, ezért

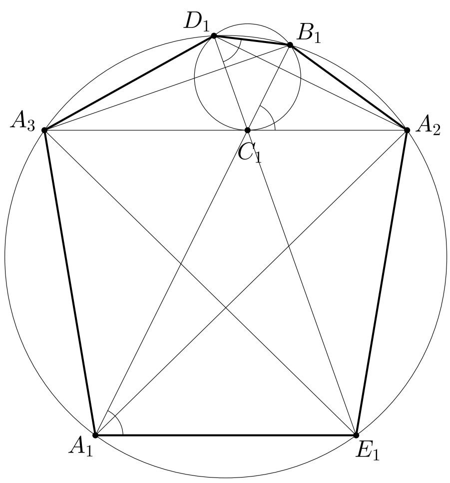
$$\frac{P_1P_2}{P_4P_5} \cdot \frac{P_3P_4}{P_6P_1} \cdot \frac{P_5P_6}{P_2P_3} = \frac{QP_1}{QP_5} \cdot \frac{QP_3}{QP_1} \cdot \frac{QP_5}{QP_3} = 1.$$



Megfordítva, ha $P_1P_2 \cdot P_3P_4 \cdot P_5P_6 = P_2P_3 \cdot P_4P_5 \cdot P_6P_1$, akkor legyen $Q = P_1P_4 \cap P_2P_5$, és legyen P_6' a körülírt kör és a P_3Q egyenes metszéspontja. Az előbbiek szerint $P_1P_2 \cdot P_3P_4 \cdot P_5P_6' = P_2P_3 \cdot P_4P_5 \cdot P_6'P_1$; a kettőt összevetve $P_5P_6 : P_6P_1 = P_5P_6' : P_6'P_1$, márpedig ez az arány egyértelműen meghatározza a P_6 pontot, ezért $P_6' = P_6$. (Nincs szükség rá, de az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy a $P_5P_6P_1$ körív félkörnél rövidebb, és akkor még világosabban látszik az egyértelműség.)

A feladat megoldása. A feltétel és a lemma szerint $A_1B_3 \cdot A_2B_1 \cdot A_3B_2 = B_3A_2 \cdot B_1A_3 \cdot B_2A_1$, és azt kell igazolnunk, hogy

$$A_1D_3 \cdot A_2D_1 \cdot A_3D_2 = D_3A_2 \cdot D_1A_3 \cdot D_2A_1.$$



Először vizsgáljuk azt az esetet, amikor a D_1 pont az A_2-t nem tartalmazó B_1A_3 köríven van. Legyen a körülírt kör és a D_1C_1 félegyenes metszéspontja E_1, ez az A_3-at nem tartalmazó A_1A_2 köríven fekszik.

A kerületi szögek tételéből

$$A_2C_1B_1\sphericalangle = C_1D_1B_1\sphericalangle = E_1D_1B_1\sphericalangle = E_1A_1B_1\sphericalangle,$$

így $A_1E_1 \parallel A_2A_3$; az $A_1E_1A_2A_3$ négyszög szimmetrikus trapéz, amelyben $A_2E_1 = A_1A_3$ és $A_3E_1 = A_1A_2$.

A $C_1A_3A_1\triangle \sim C_1B_1A_2\triangle$ és $C_1A_1A_2\triangle \sim C_1A_3B_1\triangle$ hasonlóságokból

$$\frac{A_2B_1}{C_1B_1}=\frac{A_3A_1}{C_1A_3} \quad \text{és} \quad \frac{B_1A_3}{C_1B_1}=\frac{A_1A_2}{C_1A_2}, \quad \text{tehát} \quad \frac{A_2B_1}{B_1A_3}=\frac{A_3A_1}{A_1A_2}\cdot\frac{C_1A_2}{C_1A_3}.$$

Hasonlóan, a $C_1A_3E_1\triangle \sim C_1D_1A_2\triangle$ és $C_1E_1A_2\triangle \sim C_1A_3D_1\triangle$ hasonlóságokból

$$\frac{A_2D_1}{C_1D_1}=\frac{A_3E_1}{C_1A_3}=\frac{A_1A_2}{C_1A_3} \quad \text{és} \quad \frac{D_1A_3}{C_1D_1}=\frac{E_1A_2}{C_1A_2}=\frac{A_3A_1}{C_1A_2},$$

tehát

$$\frac{A_2D_1}{D_1A_3}=\frac{A_1A_2}{A_3A_1}\cdot\frac{C_1A_2}{C_1A_3}.$$

Ezekből azt kapjuk, hogy

$$\frac{A_2D_1}{D_1A_3}=\frac{A_2B_1}{B_1A_3}\cdot\frac{A_1A_2^2}{A_3A_1^2}. \tag{2}$$

Ha a D_1 pont az A_3-at nem tartalmazó A_2B_1 íven van, akkor az A_2 és A_3 szerepének felcserélésével, ugyanezekkel a lépésekkel juthatunk el a (2) képlethez.

Az indexelést ciklikusan elforgatva, az (2) megfelelői

$$\frac{A_3D_2}{D_2A_1}=\frac{A_3B_2}{B_2A_1}\cdot\frac{A_2A_3^2}{A_1A_2^2} \quad \text{és} \quad \frac{A_1D_3}{D_3A_2}=\frac{A_1B_3}{B_3A_2}\cdot\frac{A_3A_1^2}{A_2A_3^2}.$$

Végül

$$\frac{A_2D_1}{D_1A_3}\cdot\frac{A_3D_2}{D_2A_1}\cdot\frac{A_1D_3}{D_3A_2}=\left(\frac{A_2B_1}{B_1A_3}\cdot\frac{A_1A_2^2}{A_3A_1^2}\right)\cdot\left(\frac{A_3B_2}{B_2A_1}\cdot\frac{A_2A_3^2}{A_1A_2^2}\right)\cdot\left(\frac{A_1B_3}{B_3A_2}\cdot\frac{A_3A_1^2}{A_2A_3^2}\right)=$$

$$=\frac{A_2B_1}{B_1A_3}\cdot\frac{A_3B_2}{B_2A_1}\cdot\frac{A_1B_3}{B_3A_2}=1.$$

Megjegyzés. A (2) képletet hasonlóságok helyett projektív geometriai eszközökkel, kettősviszonyokkal is bizonyíthatjuk.

Legyen I_1 az A_2A_3 irányú ideális pont. A körülírt kört az A_1 pontból az A_2A_3 egyenesre, majd a D_1 pontból visszavetítve,

$$(A_2,A_3;B_1,E_1)=(A_2,A_3;C_1,I_1)=(A_2,A_3;D_1,A_1);$$

kibontva

$$\frac{A_2B_1\cdot E_1A_3}{B_1A_3\cdot A_2E_1}=\frac{A_2D_1\cdot A_1A_3}{D_1A_3\cdot A_2A_1},$$

$$\frac{A_2D_1}{D_1A_3}=\frac{A_2B_1}{B_1A_3}\cdot\frac{E_1A_3\cdot A_1A_2}{A_2E_1\cdot A_1A_3}=\frac{A_2B_1}{B_1A_3}\cdot\frac{A_1A_2^2}{A_1A_3^2}.$$

Pach Péter Pál

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. *a*) Határozzuk meg a következő kifejezés előjelét, ha n tetszőleges természetes szám:

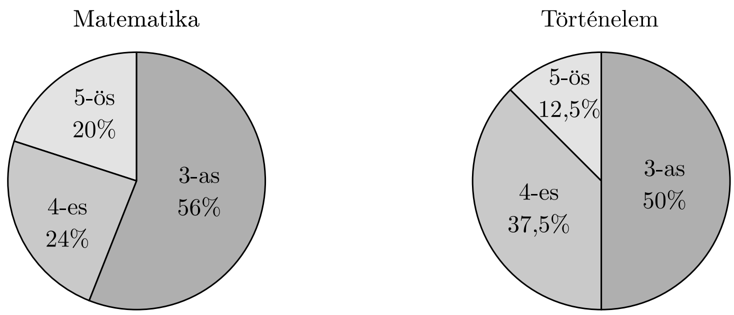
$$\frac{2^{n-1}+1}{2^n+1}-\frac{2^n+1}{2^{n+1}+1}. \qquad (6\ pont)$$

b) Hány valós megoldása van a

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$$

trigonometrikus egyenletnek a $]0;\pi[$ intervallumon? (*7 pont*)

2. A 12. évfolyam tanulói közül 25-en matematikából, 40-en pedig történelemből tettek emelt szintű érettségi vizsgát. Az érdemjegyek eloszlását a következő kördiagramokon látjuk:



a) A kördiagramok alapján töltsük ki az alábbi gyakorisági táblázatot. (*4 pont*)

Tantárgy \ jegyek	**3**	**4**	**5**
Matematika			
Történelem			

b) Határozzuk meg a történelem eredmények átlagát, mediánját és szórását. (*3 pont*)

c) A matematikából 3-ast szerzők közül legalább hány tanulónak kellett volna 4-est kapnia, hogy a többiek változatlan teljesítménye mellett a matematika átlag legalább 3,8 legyen? (*6 pont*)

3. Az Andrássy gimnázium gólyatáborának egy sportversenyéhez a következő pálya készült el az udvar betonján: egy körben az egy pontból kiinduló 10 m és 15 m hosszú húrok egymással 35°-os szöget zárnak be. A játékosoknak a húrok (nem közös) végpontjából indulva kell megszerezni a kör középpontjában lévő labdát, majd visszafutni a kiindulási helyükre.

a) Készítsünk a szövegnek megfelelő ábrát a lényeges adatok feltüntetésével. (*2 pont*)

b) Legalább mekkora utat kell megtenni egy-egy játékosnak? (*4 pont*)

c) Kata azt állítja, hogy a játékosok kiindulási helye és a labda alkotta háromszög területe legfeljebb 25 m^2. Igaza van-e Katának? (*6 pont*)

4. Adott az $x^2+y^2-14x-12y+65=0$ egyenletű kör és a $P(3;9)$ pont.

a) A „rajta", „kívül", „belül" szavak közül írjuk a pontozott vonalra azt, amelyikkel az alábbi állítás igaz lesz. Számolással is igazoljuk a választ. (*3 pont*)

A P pont .... van a fent megadott egyenletű körvonalon.

b) Határozzuk meg az origón és a P ponton átmenő g egyenesnek az x tengely pozitív felével bezárt szögét. A szög értékét egy tizedesjegy pontossággal adjuk meg. (*3 pont*)

c) Írjuk fel a megadott kör azon érintőjének egyenletét, amelynek nincs közös pontja a III. síknegyeddel, nem megy át az origón, és ami az y tengelyt az origótól kétszer olyan távolságban metszi, mint az x tengelyt, továbbá a tengelyekkel alkotott háromszög területe a legkisebb. (*7 pont*)

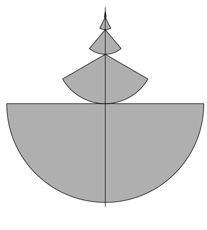
II. rész

5. *a*) Egy $\{a_n\}$ számtani sorozat differenciája 4, az első n tag összege 1825, és az első tag megegyezik ezen összeadott tagok számával. Tagja-e ennek az $\{a_n\}$ sorozatnak a 8115? (*6 pont*)

Julcsi 2018. január 1-jén betett a bankba egy bizonyos összeget, évi 5%-os kamatra úgy, hogy a bankszámláján a minden év végén esedékes kamatokat tőkésítette (nem vette ki). Három év elteltekor megemelte a megtakarított pénzét az éppen bent lévőnek a 20%-ával. Ettől kezdve már csak 4%-os évi kamatot kapott a bankintézettől. A következő év első napján pedig kivette az addig megtakarított pénzének a 10%-át. 2025. január 1-jén szeretné felvenni az összes pénzét. Testvére, Anna egyszerre kezdett vele takarékoskodni ugyanakkora összeggel.

b) Hány %-os, állandó évi kamatot kellene kapnia ahhoz Annának betét és kivét nélküli takarékosság esetén, hogy a két testvérnek ugyanannyi megtakarított pénze legyen 2025 első napján? A kamatláb értékét egy tizedes pontossággal adjuk meg. (*4 pont*)

Karácsonyra Franci az *ábrán* látható, négy cikkből álló, tengelyesen szimmetrikus fenyőfa díszt kezdte el rajzolni egy papírra. Egy 5 cm sugarú félkörből indult ki, eggyel feljebb lépve, a körcikk sugarát a felére, középponti szögét $\frac{2}{3}$ részére változtatta, miközben a körcikk középpontját a felette lévő körív felezési pontjába tette. Elgondolkodott azon, ha ezt az eljárást végtelen sokáig tudná folytatni, lenne-e a mintának véges területe.



c) Ha igen, pontosan mekkora lenne, és az hány %-a annak a minimális területű téglalap területének, amelynek két oldala párhuzamos a fenyőfa tengelyével? (*6 pont*)

6. *a*) A JÁTÉK Kft. új homokozó vödre csonkakúp alakú. Ha a vödörbe beleteszünk egy 14 cm átmérőjű labdát, akkor az érinti a vödör alját, és egy körben a vödör oldalát is. A vödör aljának átmérője 12 cm, felső nyílásának átmérője 18 cm. A vödröt kívül is, belül is vízálló réteggel festik be. Hány liter festékre van szükség 1000 darab vödör elkészítésekor, ha 1 négyzetméternyi felület festéséhez 0,5 dl festéket használnak, és a vödör falvastagsága elhanyagolható? (*8 pont*)

b) Panni és Peti koktélos poharakból bodzaszörpöt iszik. A pohár felső része forgáskúp alakú, melynek magassága 8 cm, alkotója 10 cm, és 7 cm „magasan áll benne" az üdítő. Hány milliméterrel emelkedik meg a bodzaszörp „szintje", ha a pohárba három darab, 2 cm élű jégkockát teszünk, és azok már teljesen elolvadtak? A választ egészre kerekítve adjuk meg. (Tekintsünk el a jég olvadásakor közismerten bekövetkező térfogatváltozástól.) (*8 pont*)

7. Adott két teljes gráf. Az első gráfnak 4-gyel több csúcsa és 62-vel több éle van, mint a másodiknak.

a) Hány csúcsa van annak a teljes gráfnak, amelynek annyi éle van, mint az adott két teljes gráf élei és csúcsai számának összege? (*6 pont*)

Legyen az A halmaz az $f(x)=\sqrt{-2x^2+5x+3}$ függvény értelmezési tartománya, a B halmaz pedig a $\log_{\frac{3}{\pi}}(4x-3)>\log_{\frac{3}{\pi}}(2x+7)$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza.

b) Határozzuk meg az $A\cap B$, az $A\cup B$ és az $A\setminus B$ halmazokat. (*6 pont*)

Tíz barát, Anna, Bea, Cili, Dóri, Emese, Fruzsi, Gábor, Huba, István és János moziba megy. A jegyek az első sorba egymás mellé szólnak.

c) Hányféleképpen ülhetnek le, ha a négy fiú azt kérte, hogy mindegyikük közvetlenül két lány között ülhessen? (*4 pont*)

8. Adott a NoSelejt cég által gyártott valamely termék $K(x)=x^3-12x^2+48x$ költségfüggvénye és a $B(x)=300x$ bevételfüggvénye, ahol x az előállított mennyiséget jelenti (száz darabban), míg a $K(x)$ és a $B(x)$ értékei millió forintban értendők. A nyereséget a bevételek és a költségek különbsége adja.

a) Határozzuk meg azt a termékmennyiséget, amely esetén a cég nyeresége maximális. (*5 pont*)

b) Határozzuk meg a $K(x)$ függvény grafikonja és a grafikon $x=3$ abszcisszájú pontjához tartozó érintő által határolt korlátos, zárt síkidom területének mérőszámát. (*9 pont*)

c) Adjunk példát olyan egyváltozós valós f függvényre (ha létezik), amely differenciálható a valós számok halmazán, és $f'(3)=0$, de az $x=3$ nem szélsőértékhelye f-nek. (*2 pont*)

9. Peches Pál nagyon szereti a kaparós sorsjegyeket. Kedvence a Lutri sorsjegy, melynek ára 500 Ft, és a sorsjegyek 25%-a nyerő. Pálnak (most csak) négy darab 500 forintosa van. Bemegy egy lottózóba, és elhatározza, hogy addig vásárolja kedvenc sorsjegyét, amíg nem nyer, vagy ameddig a pénze el nem fogy.

a) Határozzuk meg a Pál által a sorsjegy(ek)re elköltött 500 forintosok számának várható értékét és szórását. (*7 pont*)

Pál háromféle tömegközlekedési eszközzel tudja munkahelyét megközelíteni, éspedig busszal, metróval, illetve villamossal, ezért (is) kombinált bérlettel rendelkezik. Az esetek 25%-ában busszal megy, a metrót pedig négyszer olyan gyakran használja, mint a villamost. A buszon átlagosan minden negyedik, a villamoson átlagosan minden tizedik alkalommal ellenőrzik a bérletét, míg annak a valószínűsége, hogy a metrón kap ellenőrzést, 0,85.

b) Egyik alkalommal ellenőrizték a bérletét. Mennyi annak a valószínűsége, hogy villamossal utazott? (*6 pont*)

Egyik nap (a munkanap végén) Pál egy ötfős baráti társaság tagjaként busszal utazott haza. Az egyik megállóban ellenőrök szálltak fel, és a buszon (aktuálisan) tartózkodó 48 utasból találomra kiválasztott tíz embernek a bérletét (vagy jegyét) ellenőrizték.

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az ötfős baráti társaságból legalább két főt ellenőriztek? (*3 pont*)

Marczis György (Gyula)
Molnár István (Gyula)
Molnár Judit (Gyula)
Rókáné Rózsa Anikó (Békéscsaba)

Megoldásvázlatok a 2022/1. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Három pénzváltó vállalkozás aktuális forint-euró árfolyamait ismerjük:*

	Vétel	**Eladás**	**Illeték**
Első	348,50	352,90	nincs
Második	351,00	352,00	a tranzakció összegének 0,3%-a, de maximum 1500 Ft
Harmadik	350,00	352,50	400 Ft

A vételi *árfolyam adja meg, hogy a valutaváltó hány Ft-ért vesz meg az ügyféltől* 1 *eurót. Az* eladási *árfolyam adja meg, hogy a valutaváltó hány Ft-ért ad el az ügyfélnek* 1 *eurót. Végül az* illeték *adja meg, hogy minden egyes pénzváltási tranzakció után mekkora díjat kell pluszban kifizetni.*

a) Annának 250 *euróra volt szüksége. Mennyit kellene ezért fizetnie az egyes pénzváltóknál?* (*3 pont*)

b) Balázs 600 000 Ft*-ért vett eurót az Első Pénzváltónál. Később kiderült, hogy nem lesz rá szüksége, ezért visszaváltotta a pénzt forintra a Második Pénzváltónál. Hány forint vesztesége keletkezett?* (*4 pont*)

c) Határozzuk meg, hány euró vásárlása esetén lesz a Harmadik Pénzváltóé a legkedvezőbb átváltási ajánlat. (*7 pont*)

Megoldás. *a*) Elsőnél: $250 \cdot 352{,}90 = 88\,225$ Ft.

Másodiknál: $250 \cdot 352 = 88\,000$ Ft, plusz ennek a 0,3%-a, ami 264 Ft, tehát összesen 88 264 Ft.

Harmadiknál: $250 \cdot 352{,}50 + 400 = 88\,525$ Ft.

b) A 600 ezer Ft-ért $\frac{600\,000}{352{,}90} \approx 1700$ eurót kapott. A pénz visszaváltásakor $1700 \cdot 351 = 596\,700$ Ft-ot kapna vissza, de ki kell fizetnie az illetéket. Az 596 700 Ft 0,3%-a 1790,10 Ft, de ez meghaladja az illeték maximális összegét, tehát 1500 Ft illeték terheli a tranzakciót.

Így $596\,700 - 1500 = 595\,200$ Ft-ot kap kézhez, tehát 4800 Ft vesztesége keletkezik a két tranzakción.

c) Ha n eurót váltunk, akkor a Harmadik Pénzváltó ajánlata abban az esetben kedvezőbb az Első Pénzváltó ajánlatánál, ha $352{,}5n + 400 < 352{,}9n$. Ebből $400 < 0{,}4n$, azaz $1000 < n$.

A Harmadik Pénzváltó ajánlata abban az esetben kedvezőbb a Második Pénzváltó ajánlatánál, ha $352{,}5n + 400 < 352n \cdot 1{,}003$ és $352{,}5n + 400 < 352n + 1500$. Innen egyrészt $352{,}5n + 400 < 353{,}056n$, azaz $400 < 0{,}556n$, azaz $719{,}42 < n$, másrészt $0{,}5n < 1100$, azaz $n < 2200$.

Ezeket összevetve tehát 1000 és 2200 közötti mennyiségű euró váltása esetén lesz a Harmadik Pénzváltó ajánlata a legkedvezőbb.

2. *a) Melyik az a legkisebb olyan* 77*-tel osztható négyjegyű pozitív egész szám, amelyik pontosan három különböző számjegyet tartalmaz?* (*4 pont*)

b) Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amelyik pontosan három különböző számjegyet tartalmaz? (*4 pont*)

c) Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amely a 7 *és a* 11 *közül legalább az egyikkel osztható?* (*4 pont*)

Megoldás. *a*) A legkisebb 77-tel osztható négyjegyű pozitív egész szám az 1001. Ez nem jó, mert csak két különböző számjegyet tartalmaz.

A következő az 1078, ez sem jó, mert ez pedig négyet.

A következő az 1155, ez sem jó, mert ez megint csak kettőt.

A következő az 1232, ez pontosan három különböző számjegyet tartalmaz, ezért ez a keresett szám.

b) A három különböző számjegy közül az egyik kétszer, a másik kettő egyszer fordul elő a számban.

Ha az ismétlődő számjegyek egyikével kezdődik a szám, akkor a párja 3-féle helyen állhat. Ez a számjegy (mivel 0-val nem kezdődhet szám) 9-féleképpen, a másik két számjegy 9, illetve 8-féleképpen választható ki. Ez $3\cdot 9\cdot 9\cdot 8$ $(=1944)$ lehetőség.

Ha nem az ismétlődő számjegyek egyikével kezdődik a szám, akkor a két ismétlődő számjegy 3-féle helyen állhat. Az első számjegy (mivel 0-val nem kezdődhet szám) 9-féleképpen, a másik két számjegy 9, illetve 8-féleképpen választható ki. Ez ismét $3\cdot 9\cdot 9\cdot 8$ $(=1944)$ lehetőség.

Azaz összesen 3888 a feltételeknek megfelelő négyjegyű szám van.

c) 1001 és 9996 között $\frac{9996-1001}{7}+1=1286$ darab 7-tel osztható szám van. 1001 és 9999 között $\frac{9999-1001}{11}+1=819$ darab 11-gyel osztható szám van. Ezek közül 7-tel és 11-gyel (tehát 77-tel) is osztható $\frac{9933-1001}{77}+1=117$ darab.

Ezeket a 7-tel és a 11-gyel oszthatóak között is megszámoltuk, tehát 7 és 11 közül legalább az egyikkel osztható $(1286+819-117=)1988$ darab négyjegyű szám.

3. *a*) *Egy számtani sorozat első* 10 *tagjának összege megegyezik az ezt követő* 5 *tag összegével. A sorozat* 19*-edik tagja a* 777*. Határozzuk meg a sorozat első tagját és differenciáját.* (*7 pont*)

b) *Egy mértani sorozat első* 2 *tagjának összege hatszorosa a sorozat harmadik tagjának. A sorozat* 4*-edik tagja az* 1*. Határozzuk meg a sorozat első tagját és hányadosát.* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Jelölje a számtani sorozat n-edik tagját a_n, differenciáját pedig d. A számtani sorozat összegképletével:

$$\frac{(a_1+a_{10})\cdot 10}{2}=\frac{(a_{11}+a_{15})\cdot 5}{2}.$$

A 10., 11. és 15. tagot az első tag és a differencia segítségével átírva:

$$\frac{(2a_1+9d)\cdot 10}{2}=\frac{(2a_1+24d)\cdot 5}{2},$$

$$2a_1+9d=a_1+12d,$$

$$a_1=3d.$$

Ezt felhasználva $a_{19}=a_1+18d=21d=777$, ahonnan $d=37$, tehát $a_1=111$.

Ellenőrzés: $a_{10}=444$, $a_{11}=481$, $a_{15}=629$, az első 10, és az ezt követő 5 tag összege valóban egyenlő (2775).

b) Jelölje a mértani sorozat n-edik tagját a_n, hányadosát pedig q.

$$a_1+a_1q=6a_1q^2.$$

A nemnulla a_1-gyel osztva és rendezve: $0=6q^2-q-1$. Az egyenlet gyökei (tehát a hányados lehetséges értékei) $1/2$ és $-1/3$.

$$a_1=\frac{a_4}{q^3}=\frac{1}{q^3},$$

innen az első tag 8 és a hányados $1/2$, vagy pedig az első tag -27 és a hányados $-1/3$.

Ellenőrzés: $8+4=6\cdot 2$, illetve $-27+9=6\cdot(-3)$, és a 4. tag mindkét esetben valóban 1.

4. *a) Igaz-e a következő állítás?*

Ha $x=3$, akkor $f(x)=2x^2-10x+14$ értéke pozitív prímszámmal egyenlő.

Fogalmazzuk meg az állítás megfordítását. Igaz-e az állítás megfordítása? A választ indokoljuk. (*5 pont*)

b) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$|2\sin^2 x+3\sin x-1|=1. \qquad (7\ pont)$$

Megoldás. *a)* Igaz, hiszen $f(3)=2$, ami valóban prím.

Az állítás megfordítása: Ha $f(x)=2x^2-10x+14$ értéke pozitív prímszám, akkor $x=3$. A megfordított állítás hamis.

Például $f(x)=2x^2-10x+14=2$ esetén nullára rendezés után $x_1=3$ vagy $x_2=2$ adódik, tehát nem biztos, hogy $x=3$.

b) Az abszolútérték jelet elhagyva:

$$2\sin^2 x+3\sin x-1=1 \quad \text{vagy} \quad 2\sin^2 x+3\sin x-1=-1,$$

tehát

$$2\sin^2 x+3\sin x-2=0 \quad \text{vagy} \quad 2\sin^2 x+3\sin x=0.$$

Az egyenletek $\sin x$-ben másodfokúak, gyökeik $1/2$ és -2, illetve 0 és $-1{,}5$, melyek közül ($\sin x$ értékkészlete miatt) csak $\sin x=1/2$ és $\sin x=0$ lehetséges. Ekkor $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ vagy $x=\frac{5\pi}{6}+2l\pi$ vagy $x=m\pi$ ($k,l,m\in\mathbb{Z}$).

Ekvivalens átalakításokat végeztünk.

II. rész

5. *Nagyi a* 31,5 cm × 30 cm *(belső) méretű tepsijében sütött süteményt az unokáinak. A sütemény* 4 cm *magas lett. Nagyi a sütemény négy oldalát és a tetejét be szeretné vonni csokikrémmel.*

a) Hány dkg csokikrémre lesz ehhez szüksége, ha 1 dm^2 *felület bevonásához* 2 dkg *csokikrém elegendő? A választ egészre kerekítve adjuk meg.* (*3 pont*)

Az unokái közül ugyanannyian szeretik a sütemény „szélét", mint a „közepét". Ezért Nagyi szeretne a sütemény széléből mind a négy oldalon egy azonos szélességű csíkot levágni úgy, hogy a levágott részek alapterülete és a sütemény közepének alapterülete egyenlő legyen.

b) Határozzuk meg a levágandó csík szélességét. (*7 pont*)

Nagyi minden unokájának ugyanannyi szeletet szeretne adni a süteményből.

Ha $10\cdot 5$ *szeletre vágná a süteményt, akkor az osztás után* 2 *szelet megmaradna. Ha* $9\cdot 5$ *szeletre vágná, akkor* 3 *szelet, ha pedig* $10\cdot 4$ *szeletre vágná, akkor* 4 *szelet maradna meg az osztás után.*

c) Hány unokája van Nagyinak? (*6 pont*)

Megoldás. *a*) A bevonandó felület öt téglalapból áll, ezek területösszege:

$$A = 31{,}5 \cdot 30 + 2 \cdot (31{,}5 \cdot 4 + 30 \cdot 4) = 1437\ \mathrm{cm}^2 = 14{,}37\ \mathrm{dm}^2.$$

Ennek bevonásához $14{,}37 \cdot 2 \approx 29$ dkg csokikrémre lesz szüksége.

b) A levágott csík szélességét jelölje x. Ekkor a középen megmaradó téglalap méretei: $31{,}5 - 2x$, illetve $30 - 2x$. Ennek a téglalapnak a területe fele a teljes sütemény alapterületének:

$$(31{,}5 - 2x)(30 - 2x) = \frac{31{,}5 \cdot 30}{2}.$$

Rendezés után: $4x^2 - 123x + 472{,}5 = 0$. Ennek az egyenletnek a gyökei 26,25 (mely nyilván nem megoldása a feladatnak) és 4,5.

Tehát 4,5 cm szélességű csíkot kell Nagyinak levágnia.

Ellenőrzés: a $22{,}5 \times 21$-es rész területe (472,5) valóban fele a teljes süti alapterületének (945).

c) 50 szeletből 2 megmarad, tehát a 48 osztható az unokák számával.

45 szeletből 3 megmarad, tehát a 42 osztható az unokák számával.

40 szeletből 4 megmarad, tehát a 36 osztható az unokák számával.

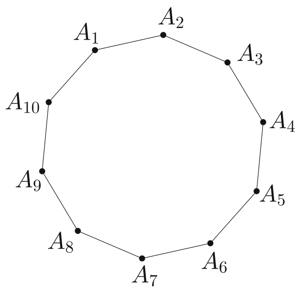
Az unokák száma ezért csak a 36, 42 és a 48 közös osztói közül kerülhet ki, ezek: 2, 3 és 6.

2 és 3 azonban nem lehet az unokák száma, mert akkor vagy az 50 vagy a 45 szeletből nem maradt volna az osztás után, tehát Nagyinak 6 unokája van.

6. *Egy szabályos* 10*-szög alakú asztal egy oldalának hossza* 50 cm*. Erre az asztalra egy olyan kör alakú terítőt készítenek, amely sehol nem lóg le az asztalról.*

a) *Határozzuk meg a legnagyobb ilyen terítő területét.* (*3 pont*)

b) *Legfeljebb hány százalékát tudja lefedni ez a terítő az asztal területének?* (*3 pont*)



Jelölje F_1 az A_1A_2 és F_2 az A_3A_4 szakaszok felezőpontját. Az asztallapot az A_8F_1 és az $A_{10}F_2$ egyenesekkel négy részre osztják. Jelölje M a két egyenes metszéspontját.

c) *Igazoljuk, hogy az $A_{10}A_9A_8M$ négyszög és az $F_2A_3A_2F_1M$ ötszög területe egyenlő.* (*4 pont*)

Egy szabályos 10*-szög csúcsai közül véletlenszerűen kiválasztunk hármat, így egy háromszög csúcsait kapjuk.*

d) *Mennyi annak a valószínűsége, hogy a háromszög tompaszögű?* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) A lehetséges legnagyobb kör alakú terítő a szabályos 10-szögbe írható körnek felel meg, melynek középpontját jelöljük O-val. A szabályos 10-szög felbontható 10 darab egybevágó, 36°-os szárszögű egyenlő szárú háromszögre.

A beírható kör r sugara egyben az A_1OA_2 egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magassága:

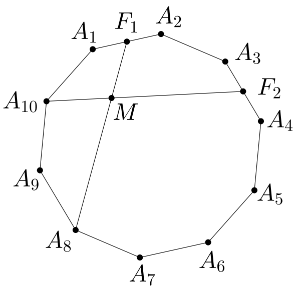
$$r = 25 \cdot \operatorname{tg} 72^\circ \approx 76{,}94 \text{ cm}.$$

A kör alakú terítő területe $T_{\text{terítő}} = r^2\pi \approx 18\,600 \text{ cm}^2 = 1{,}86 \text{ m}^2$.

b) Az asztal területét a 10 darab egyenlő szárú háromszög területének összegeként határozzuk meg:

$$T_{\text{asztal}} = 10 \cdot \frac{50 \cdot 76,94}{2} = 19\,235 \text{ cm}^2.$$

Ha sehol nem lóg le az asztalról a terítő, akkor az asztal területének $\frac{18\,600}{19\,235} \cdot 100 \approx$ $\approx 96{,}7\%$-át fedi le.



c) Az $A_8A_9A_{10}A_1F_1$ és $A_{10}A_1A_2A_3F_2$ ötszögek egybevágók, mert a megfelelő oldalaik hossza és a közbezárt szögeik is megegyeznek (vagy egy – az O pont körüli – 72°-os forgatás a két alakzatot egymásba viszi).

Mindkét ötszögből elhagyva a közös $A_{10}A_1F_1M$ négyszöget, a maradék területeknek is meg kell egyezniük.

d) Először összeszámoljuk, hány olyan tompaszögű háromszög van, melynek tompaszögű csúcsa A_1. Tompaszögű háromszög esetén a körülírt kör O középpontja a háromszögön kívül van.

Ha a második csúcs A_2, 3 lehetőség van (A_8-tól A_{10}-ig).

Ha a második csúcs A_3, 2 lehetőség (A_9-től A_{10}-ig).

Ha a második csúcs A_4, 1 lehetőség (A_{10}).

Ha a tompaszögű csúcs A_1, akkor tehát 6 háromszög van.

Bármelyik csúcsnál lehet a tompaszög, így a tompaszögű háromszögek száma $10 \cdot 6 = 60$. A 10 csúcs közül hármat $\binom{10}{3} = 120$-féleképpen tudunk kiválasztani.

A keresett valószínűség $\frac{60}{120} = 0{,}5$.

7. *Az egyetemen* 220 *diák írt meg egy dolgozatot, az átlag századokra kerekítve* 3,82 *lett. (Csak az* 1, 2, 3, 4, 5 *egész értékű osztályzatok lehettek az eredmények.)*

a) Legalább és legfeljebb hány 5*-ös dolgozat született, ha nem volt* 1*-es?* (*7 pont*)

Egy szabályos dobókockával háromszor egymás után dobunk.

b) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy valamelyik dobott szám a másik két dobott számnak számtani vagy mértani közepe lesz. (*6 pont*)

c) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a dobott számok között van 6*-os, feltéve, hogy valamelyik dobott szám a másik két dobott számnak a számtani vagy mértani közepe.* (*3 pont*)

Megoldás. *a*) A dolgozatok pontos x átlagára $3{,}815 \leqslant x < 3{,}825$. A pontszámok S összegére $3{,}815 \cdot 220 \leqslant S < 3{,}825 \cdot 220$, azaz $839{,}3 \leqslant S < 841{,}5$, tehát $S = 840$ vagy $S = 841$.

Legtöbb 5-ös akkor lehetséges, ha a 2-esek (a gyenge osztályzatok) száma minél nagyobb. Ha z darab 5-ös volt, akkor legfeljebb $220 - z$ lehet a 2-esek száma. Ebből $S \geqslant (220 - z) \cdot 2 + z \cdot 5 = 3z + 440$. Innen $z \leqslant \frac{S-440}{3}$, azaz (figyelembe véve, hogy z egész szám) $z \leqslant 133$ adódik.

Ha $z = 133$, akkor az 5-ösök összege $S_5 = 5 \cdot 133 = 665$, a maradék 175 vagy 176 összeget $220 - 133 = 87$ darab jegyből kell elérni. Ez lehetséges, pl. 86 darab 2-es és egy darab 3-as vagy egy 4-es segítségével.

Az 5-ösök száma tehát legfeljebb 133. Az 5-ösök minimális száma 0. Ez megvalósulhat például 180 darab 4-es és 40 darab 3-as esetén.

b) Teljesül a feltétel, ha a három dobott szám egyforma. Ez 6 lehetőség.

Ha az a értékű dobás a másik két (nem a értékű) dobás számtani közepe, akkor a másik két dobás $a - d$ és $a + d$, valamilyen alkalmas d-re.

$d = 1$ esetén a lehetséges értékei 2, 3, 4 vagy 5.

$d = 2$ esetén a lehetséges értékei 3 vagy 4.

$d > 2$ nem lehetséges.

Ha az a értékű dobás a másik két (a-val nem egyenlő) b és c értékű dobás mértani közepe, akkor $a^2 = bc$, tehát az egyik dobás értékének négyzete egyenlő a másik kettőnek a szorzatával. A dobások lehetséges értékeit figyelembe véve csak $2^2 = 1 \cdot 4$ lehetséges, tehát a három dobás 1, 2 és 4.

Mind a hét felsorolt esetben a három különböző értéket $3! = 6$-féle sorrendben dobhatjuk, ez tehát összesen 42 lehetőséget jelent. Összesen $6 + 42 = 48$ a feltételeknek megfelelő dobássorozat van. Az összes lehetséges dobássorozatok száma $6^3 = 216$, a keresett valószínűség tehát $\frac{48}{216} = \frac{2}{9} \approx 0{,}222$.

c) A *b*) feladatban összeszámolt 48 megfelelő dobássorozat (e feladat tekintetében az összes eset) közül a kedvező esetek azok, amelyekben van 6-os. Ezek: 2–4–6 (6-féle lehetséges sorrend), 4-5-6 (6-féle lehetséges sorrend) és 6-6-6 (1-féle lehetséges sorrend). Ez összesen 13 dobássorozat. A keresett valószínűség tehát $\frac{13}{48} \approx 0{,}271$.

8. *a*) *Az $y = \frac{8}{3}x - \frac{4}{9}x^2$ egyenletű görbe és az x-tengely által határolt zárt tartományt két részre osztja az $y = \frac{4}{3}x$ egyenletű egyenes. Határozzuk meg a két rész területének arányát.* (*8 pont*)

b) *Egy háromszög csúcsai a koordináta-rendszerben $A(0;0)$, $B(3;0)$ és $C(3;4)$. A háromszöget megforgatjuk a leghosszabb oldala körül. Határozzuk meg az így kapott forgástest felszínét és térfogatát.* (*8 pont*)

Megoldás. *a*) Megkeressük a görbe és az x-tengely metszéspontjait:

$$\frac{8}{3}x - \frac{4}{9}x^2 = 0, \qquad \frac{4}{3}x\left(2 - \frac{1}{3}x\right) = 0,$$

ahonnan $x=0$ vagy $x=6$. A görbe és az x-tengely által határolt területet tehát (a Newton–Leibniz-szabály felhasználásával) az

$$\int_0^6 \left(\frac{8}{3}x-\frac{4}{9}x^2\right)\,\mathrm{d}x$$

integrál adja meg.

$$\int_0^6 \left(\frac{8}{3}x-\frac{4}{9}x^2\right)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{4}{3}x^2-\frac{4}{27}x^3\right]_0^6=48-32=16 \text{ területegység.}$$

A görbe és az egyenes közös pontjait a

$$\frac{8}{3}x-\frac{4}{9}x^2=\frac{4}{3}x$$

egyenlet megoldásából kapjuk.

$$\frac{4}{3}x\left(1-\frac{1}{3}x\right)=0,$$

ahonnan $x=0$ vagy $x=3$, a közös pontok tehát $(0;0)$ és $(3;4)$.

A görbe alatti területet az $x=3$ egyenes két szimmetrikus részre vágja, melyek területe 8-8 területegység.

A $(0;0)$, $(3;0)$ és a $(3;4)$ pontok által meghatározott háromszög területe 6 területegység. Az egyenes tehát egy 2 és egy 14 egység területű részre vágja a megadott tartományt, ezek aránya így $1:7$.

b) Az ABC háromszög derékszögű, leghosszabb oldala az 5 egység hosszú AC átfogó. Ha a háromszöget megforgatjuk az AC oldal körül, a keletkezett forgástest egy kettőskúp (két, közös alaplappal rendelkező kúp) lesz. A kúpok közös alaplapjának sugara a háromszög átfogójához tartozó m magassága. A háromszög területét kétféleképpen felírva:

$$\frac{AC\cdot m}{2}=\frac{AB\cdot BC}{2}.$$

Innen $m=2{,}4$.

A Pitagorasz-tétellel kapjuk, hogy ez a magasság egy 1,8 és egy 3,2 egység hosszúságú részekre osztja a háromszög átfogóját. A kettőskúp térfogata:

$$V=\frac{2{,}4^2\cdot\pi\cdot 3{,}2}{3}+\frac{2{,}4^2\cdot\pi\cdot 1{,}8}{3}=\frac{2{,}4^2\cdot\pi\cdot 5}{3}=9{,}6\pi\approx 30{,}2 \text{ térfogategység.}$$

A forgástest felszíne a két kúppalást területének összege. A kúpok alkotói a derékszögű háromszög befogói, tehát 3, illetve 4 egység hosszúak.

$$A=2{,}4\cdot\pi\cdot 3+2{,}4\cdot\pi\cdot 4=16{,}8\pi\approx 52{,}8 \text{ területegység.}$$

9. *Egy építőipari vállalkozónak a legutóbbi építkezés után megmaradt* 200 kg *cementje, és úgy döntött, hogy egyenlő tömegű részekre osztva értékesíti.*

A kereskedelemben szokásos módon nagyobb kiszerelésű csomag esetén alacsonyabb a cement kilogrammonkénti ára (egységára): ha egy csomag cement tömege m *kg, akkor* $\left(40-\frac{m}{10}\right)$ *pengős egységáron kínálja eladásra. A cement becsomagolásának is van költsége, mégpedig* m *kg-os csomag esetén* $\left(25+\frac{m}{10}\right)$ *pengő csomagonként.*

a) Határozzuk meg, hogy mekkora lesz a vállalkozónak az eladásából (a csomagolás költségének levonása után) származó bevétele, ha a cementet 10 *egyenlő tömegű részre osztva értékesíti.* (*5 pont*)

b) Határozzuk meg, hány egyenlő tömegű részre kell osztani a cementet ahhoz, hogy – azt a tervek szerint értékesítve – az eladásból származó (a csomagolási költségek levonása utáni) bevétel maximális legyen. (*11 pont*)

Megoldás. *a*) 10 részre osztva az eladandó cementet, egy csomag tömege 20 kg. Ekkor a cement egységára 38 pengő, az összes cement eladásából származó bevétel (a csomagolási költségek nélkül) $200\cdot 38=7600$ pengő.

Egy csomag csomagolási költsége 27 pengő, az összes csomagolási költség $10\cdot 27=270$ pengő.

A bevétel tehát $7600-270=7330$ pengő.

b) Tegyük fel, hogy a vállalkozó n egyenlő tömegű részre osztva értékesíti a cementet ($n\in\mathbb{Z}$). Ekkor egy csomag tömege $\frac{200}{n}$ kg.

A cement egységára $\left(40-\frac{20}{n}\right)$ pengő, az összes cement eladásából származó bevétel
$$200\cdot\left(40-\frac{20}{n}\right)=8000-\frac{4000}{n}\ \text{pengő}.$$
Egy csomag csomagolási költsége $\left(25+\frac{20}{n}\right)$ pengő, az összes csomag csomagolási költsége $n\left(25+\frac{20}{n}\right)=25n+20$ pengő. Az eladásból származó haszon így
$$\left(8000-\frac{4000}{n}\right)-(25n+20)=7980-25n-\frac{4000}{n}.$$

Tekintsük a pozitív valós számok halmazán értelmezett
$$f:\ x\mapsto 7980-25x-\frac{4000}{x}$$
függvényt, és keressük ennek maximumhelyét. Az f deriváltfüggvénye:
$$f'(x)=-25+\frac{4000}{x^2}.$$
Az f-nek ott lehet maximumhelye, ahol $f'(x)=0$, azaz $-25+\frac{4000}{x^2}=0$. Ebből ($x>0$ miatt) $x=\sqrt{160}\approx 12{,}65$. Mivel itt a deriváltfüggvény előjelet vált (pozitívból negatívba), az $f(x)$ függvény $x<\sqrt{160}$ esetén szigorúan monoton növekvő, $x>\sqrt{160}$ esetén pedig szigorúan monoton csökkenő.

Mivel n értéke csak egész lehet, így meg kell vizsgálni $f(12)$-t és $f(13)$-at.

$$f(13) \approx 7347{,}3 > f(12) \approx 7346{,}7,$$

tehát 13 egyenlő részre osztva lesz a legmagasabb az eladásból származó bevétel.

Koncz Levente
Budapest

Matematika feladatok megoldása

B. 5150. *Igazoljuk, hogy csak véges sok olyan pozitív egész szám van, amelyet nem lehet megkapni úgy, hogy egy kisebb számhoz hozzáadjuk annak valamelyik számjegyét. Melyik a legnagyobb ezek közül?*

(*4 pont*)

Megoldás. Minden három-, vagy annál többjegyű számot meg lehet kapni egyik számjegyének és egy kisebb számnak az összegeként a következő módon: a számból kivonjuk a legelső számjegyét (ez biztosan nagyobb, mint 0), az így kapott különbség lesz a megfelelő szám, hiszen ha ehhez hozzáadjuk az első számjegyét, akkor szinte minden esetben visszakapjuk az eredeti számot.

A fenti módszer akkor nem működik, ha a kivonás során változik az első számjegy. Mivel legalább háromjegyű számokat vizsgálunk, ez csak akkor fordulhat elő, ha a tízes helyiértéken lévő számjegy 0, és az első számjegy nagyobb, mint az utolsó. Ebben az esetben más módszerrel állítjuk elő a számot. Ha kivonunk a számból 9-et, akkor a tízes helyiértéken lévő 0-ból 9-es lesz, mert az utolsó számjegynél nagyobbat vontunk ki. Az így kapott számhoz hozzáadva az utolsó előtti számjegyét, amely 9, megkapjuk az eredetit számot.

Általánosságban, ha egy pozitív egész szám $\overline{x_n \dots x_2 x_1}$ alakú, ahol $x_2 \neq 0$, akkor a megfelelő szám: $\overline{x_n \dots x_2 x_1} - x_n$, amelyhez x_n-t hozzáadva megkapjuk az eredeti számot.

Ha egy pozitív egész szám $\overline{x_n \dots 0 x_1}$ alakú, ahol $9 \geqslant x_n > x_1$,akkor a megfelelő szám: $\overline{x_n \dots 0 x_1} - 9$, amelynek utolsó előtti számjegye biztosan 9, így hozzáadva 9-et, megkapjuk az eredeti pozitív egész számot. Ezzel beláttuk, hogy minden legalább háromjegyű szám előállítható a feladatban megadott módon.

Most megvizsgáljuk a 100-nál kisebb számokat. Közülük azokat a páros számokat, amelyek nem 0-ra végződnek, megkaphatjuk úgy, hogy az utolsó számjegyének a felét kivonjuk belőle, mert akkor a kapott számhoz az utolsó számjegyét hozzáadva megkapjuk az eredeti számot. Ha pedig 0-ra végződik a szám, akkor 5-öt vonunk ki, így a különbség utolsó számjegye 5 lesz.

Most a kétjegyű páratlan számok következnek:

$$99 = 90 + 9,$$
$$97 = 89 + 8,$$
$$95 = 87 + 8,$$
$$93 = 85 + 8,$$
$$91 = 83 + 8,$$
$$89 = 81 + 8.$$

Azt állítom, hogy 87-et nem lehet így előállítani, hiszen $\overline{8x}$ alakú nem lehet jó, mert ha 8-at adunk hozzá, akkor az összeg legalább 88 lesz. Ha x-et adunk hozzá, akkor pedig páros számot kapunk.

Próbáljuk meg a 79-ből előállítani a 87-et:

$$79 + 7 \neq 87,$$
$$79 + 9 \neq 87.$$

Szóba jöhet még a 78 is:

$$78 + 8 \neq 87,$$
$$78 + 7 \neq 87.$$

78-nál kisebb számból pedig biztosan nem lehet a 87-et egy számjegy hozzáadásával előállítani, hiszen különbségük nagyobb 9-nél.

Beláttuk, hogy a 87-et nem lehet ezzel a módszerrel megkapni, de az összes nála nagyobbat igen, így 87 a legnagyobb ilyen szám. Ebből az is következik, hogy véges sok ilyen pozitív egész szám van.

Csizmadia Miklós (Budapest XIV. Ker. Szent István Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

Összesen 110 dolgozat érkezett. 4 pontos 89, 3 pontos 5, 2 pontos 7 dolgozat. 1 pontot 1, 0 pontot 7 versenyző kapott. Nem versenyszerű: 1 dolgozat.

B. 5201. *Legyenek az n pozitív egész szám pozitív osztói $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$. Határozzuk meg azokat az összetett n számokat, amelyekre d_1, $d_1 + d_2$, $d_1 + d_2 + d_3$, $\ldots$, $d_1 + d_2 + \ldots + d_{k-1}$ számok mind osztói n-nek.*

(*4 pont*) Javasolta: *Sándor Csaba* (Budapest)

Megoldás. Az n összetett szám, amelynek d_2 a legkisebb prímosztója.

Tegyük fel indirekt módon, hogy $d_2 \neq 2$. Ekkor $d_1 + d_2 = d_2 + 1$, ami d_2 páratlan volta miatt páros. Ezzel ellentmondásra jutottunk, mivel ekkor 2 osztója n-nek, amiből $d_2 = 2$ következik, hiszen a legkisebb prímosztó ebben az esetben a 2 lenne.

Ha tehát van összetett n megoldás, akkor $d_2 = 2$, amiből $d_1 + d_2 = 1 + 2 = 3$ következik. Mivel a 3 közvetlenül a 2 után következő egész, így $d_3 = 3$ adódik.

A 3 prím és nem osztható 2-vel, tehát nem azonos $d_k = n$-nel. A fentiek alapján világos, hogy amennyiben n összetett szám, akkor osztható 2-vel és 3-mal is, tehát osztható 6-tal.

Azt állítjuk, hogy az $n = 6$ megoldása a feladatnak, hiszen ekkor $n = d_4 = 6$. $d_1 = 1$, ami osztója a 6-nak, $d_2 = 2$, $d_1 + d_2 = d_3 = 3$, ami ugyancsak osztója a 6-nak; végül $d_1 + d_2 + d_3 = d_1 + d_2 + d_{k-1} = 6$, ami osztója a 6-nak. A 6-nak önmagán kívül kizárólag az 1, a 2 és a 3 a pozitív osztója, tehát más összeg, illetve osztó nem áll elő, azaz a 6-ra a feladat minden feltétele teljesül.

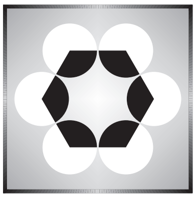
Ezek után megvizsgáljuk, hogy van-e más megoldása a feladatnak. Mivel a 6 osztója n-nek, ezért $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{3}$ és $\frac{n}{6}$ is osztója n-nek. Figyelembe véve, hogy ennek a három osztónak az összege

$$\frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{6} = n,$$

további valódi osztója már nem is lehet n-nek, hiszen a feladat feltétele szerint $d_1 + d_2 + \ldots + d_{k-1}$ is osztója n-nek, ahol $d_k = n$; ezért az egyetlen megoldás az $n = 6$.

Baski Bence (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

Összesen 132 dolgozat érkezett. 4 pontos 73, 3 pontos 40, 2 pontos 12 dolgozat. 1 pontot 6, 0 pontot 1 versenyző kapott.



Ifjú olvasóinkhoz régen és most

1894 (de akár ma is írhattuk volna)

Az ezideig hozzánk beküldött és megoldott feladatok szerkezete és külalakja körül szerzett tapasztalataink alapján fordulunk jelen sorainkkal ifjú olvasóinkhoz és a következő kérelmet intézzük hozzájuk:

Szíveskedjenek beküldött dolgozataikat lehetőleg gondosan szerkeszteni, nem használván semmiféle rövidítést; tárgyaljanak minden feladatot külön lapon és annak csak egyik oldalára írva, lássák el minden megoldásukat névaláírásukkal.

Sokkal érdekesebbnek és tanulságosabbnak tartjuk, ha olvasóink dolgozatait változatlanul és kijavítatlanul közölhetjük, mintha tökéletesen átidomított másolatot kell nyújtanunk, melyekben szerző nem talál meg semmit tulajdonából, hacsak nem a megoldás alá biggyesztett nevét.

De hogy ezt elérhessük, okvetetlenül szükségesnek tartjuk, hogy olvasóink jóindulata segítségünkre legyen és óhajtva reméljük, hogy ezentúl nem magyarázó szöveg nélküli képletsorozatokat, hanem gondosan elkészített és szerkesztett megoldásokat fogunk kapni.

Minden oldalról halljuk a tanárok panaszát az iskolai és házi dolgozatok külalakjának és szerkezetének pongyola és elhanyagolt volta felett. Midőn tehát ifjú olvasóinkat kérjük, hogy gondozzák tőlük telhetőleg beküldött megoldásaikat, csak arra hívjuk fel őket, hogy haladásuknak esélyeit az iskolában és az életben nagyobb mértékben növeljék, semmint azt ők maguk hinni hajlandók volnának.

Győrött, 1894. évi deczember havában.

ARANY DÁNIEL
mint a „K. M. L." szerkesztője.

2021–2022, a fentiekhez néhány hasznos megjegyzést hozzátéve (érdemes a honlapon található megoldásokat is elolvasni)

K. 696. Ellenőrzés és válasz hiánya vagy hiányos válasz (csak az egyik zsebben lévő összeget adja meg). Néhányan szükségtelenül sok változóval dolgoztak, bonyolultabb egyenletrendszerekkel nehezítve a saját dolgukat.

K/C. 698. Nagyon sok indoklás nélküli vagy minimális indoklással ellátott megoldást küldtek be (ez szerintem a sok 9-es miatt van, akik nem olyan rutinos megoldók).

Kifejezett típushiba nem volt, pár megoldásra volt jellemző, hogy valamelyik kérdést / kritériumot nem vették figyelembe, ezért született rossz eredményük.

K. 704. Jellemző hibák:

– megkapja a végső pontszámsorozatot, de nem ellenőrzi, hogy ilyen pontszámok valóban kialakulhatnak-e;

– keveset, esetleg csak eredménytáblázattal indokol;

– szerteágazó, nehezen értelmezhető, javításokkal és satírozásokkal teli gráfokkal szemlélteti a megoldását (ha tudtam értelmezni, ezért nem vontam le pontot).

C. 1682. A feladat alapvetően nem volt nehéz, de sok versenyző extra nehezítésként úgy próbálta az $ABDE$ tetraéder térfogatát számolni, hogy a szabályos háromszöget vették alapterületnek. Ezt a módszert sokan elrontották számolási hiba miatt, vagy pedig a tetraéder magasságának számolásánál elvi hibát vétettek.

C. 1683. Viszonylag kevés versenyző – 86-ból kb. 13 – ismerte fel, hogy az események függetlensége szükséges ahhoz, hogy a két részeredményt összeszorozhassuk, a legtöbb 4 pontos dolgozatnál csak ez hiányzott. Viszonylag sok olyan dolgozat volt – a 3 pontosok túlnyomó része –, ahol látszott, hogy a feladat megoldása nem okozott problémát, azonban mégse végezték el a végső szorzást, azaz nem válaszolták meg a kérdést a versenyzők.

C. 1690. Jellemző hibák:

– nem bizonyítja, hogy a C pont valóban a DB szakaszra esik;

– gyenge vagy kevés indoklás;

– hasonlóságra hivatkozik, de nem indokol.

B. 5185. Jellemző hibák:

– értelmezési tartomány és / vagy ellenőrzés hiánya;

– ismeretlennel való osztás, így két megoldás elvesztése;

– rossz értelmezési tartomány (a köbgyök alatti kifejezést nemnegatívként értelmezték);

– jó megoldások, de a rossz ellenőrzés miatt elvesztettek egy megoldáspárt;

– grafikus ábrázolás (valószínűleg Geogebrával) és a megoldások leolvasása, többször rosszul és indoklás nélkül.

B. 5188. A versenyzők jellemzően az alábbi hibákat követték el:

– az alapok számtani közepét vették, nem a mértanit;

– nem vették figyelembe, hogy a csúcsból szerkesztett magasság talppontja eshet az alapon kívül is;

– akik segédszerkesztéssel vagy szabályosabb alakzatra való visszavezetéssel próbálkoztak, jellemzően kihagytak eseteket (pl. szárak metszéspontja nem létezik rombusz esetén).

B. 5189. Általános hibák:

– ábra hiánya;

– speciális eset megoldása;

– tételekre való hivatkozás hiánya / hibás kimondása;

– nem hivatkoztak a gúla szabályos alapjára, egyenes mivoltára, de a belőlük következő tulajdonságokat, speciális helyzeteket felhasználták.

B. 5191. Javítási tapasztalatok: A versenyzők nagy része nem vette figyelembe a feladat azon részét, hogy nem két tetszőleges, hanem két elég közel levő pontot tudunk csak összekötni – tehát elég kis méretű körre tökéletes megoldást adtak, azonban nem kezelték azt az esetet, ha a kör túl nagy. A másik érdekesség az volt, amikor úgy értelmezték, hogy adott külső pontból is tudnak merőlegest bocsájtani adott szakaszra, mely a megengedett lépések közt nem volt ott.

Egy érdekesség az, hogy viszonylag kevés versenyző (max. 10 db) gondolta úgy, hogy a feladat nem megoldható, ekkor általában a kreativitás hiánya miatt nem vették észre, hogy hogyan lehet a körző hiánya és a vonalzó végessége adta limitációk keretében mozogva felezőmerőlegest szerkeszteni.

Végső – és kissé szomorú – tapasztalatom a géppel szerkesztett ábrák nehezen átláthatósága, vagy nem konzekvens jelölésmód, fogalmazás, ami miatt a gondolatmenet nehezebben értelmezhető. Ennél szomorúbb volt az ábrák hiánya, mely sokszor megnehezítette a szerkesztésmód értelmezését.

B. 5193. Jellemző hibák:

– elírások (pl. E és F összecserélése, mert az ábrán hasonlítanak, párhuzamos és merőleges felcserélése stb.);

– lépések kifelejtése pl. hasonlóság megállapításánál, hosszok definiálásánál;

– AF és FB felcserélése (és így az állítás hamisságának belátása);

– ábra hiánya.

B. 5196. A „Hány elemű lehet az A halmaz?” kérdésre adott válaszban „többen csak a maximumot határozták meg”.

B. 5203. Jellemző hibák:

– csak az egyik irány bizonyítása, nem az „akkor és csak akkor” állításé (páran megemlítették a másik irányt is a megoldás elején, aztán végül kihagyták);

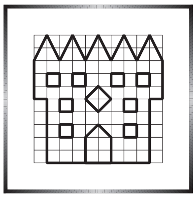
– nagy ugrások a bizonyításban, állításokat többször nem bizonyítottak, vagy összekevertek dolgokat (pl.: 3 pont egy egyenesen fekvését próbálták bizonyítani, de a szögeket úgy számolták, mintha a 3 pont egy egyenesen lenne).

B. 5213. Többször is előfordult, hogy a versenyző gyönyörűen belátta az egyenlőtlenséget – akár saját módon, akár a Ptolemaiosz tétel használatával, akár izomból kialgebrázva –, de elfelejtett az egyenlőségre feltételt adni.

A. 809. Jellemző hibák:
– nem egyértelmű jelölések;
– a számolás le nem írása vagy egy -1-es szorzó elhagyása;
– hibás becslések (egyenlőtlenség irányát elnézve);
– ábra hiánya.

Javítók
2021. ősz – 2022. tél

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (719–723.)



K. 719. Kiszínezzük a számegyenesen az egész számokat jelző pontok mindegyikét kék vagy piros színnel. Igaz-e bármilyen, a feltételnek megfelelő színezés esetén, hogy

a) biztosan lesz két azonos színű pont, melyek távolsága 3;

b) biztosan lesz két azonos színű pont, melyek távolsága 3 vagy 4?

K. 720. Vágjunk fel három egyenlő területű részre egy szabályos hatszöget az egyik csúcsán átmenő két egyenessel.

K. 721. Sanyi egész cm hosszúságú pálcikákat készített, méghozzá olyanokat, hogy közülük semelyik háromból nem lehet háromszöget összeállítani. Tudjuk, hogy Sanyi 1 és 10 hosszúságú pálcikát is készített, a leghosszabb pálcika pedig 100 cm hosszú. Maximálisan hány pálcikát készíthetett Sanyi?

K/C. 722. Két háromjegyű szám átlaga pont annyi, mintha a két szám közé tizedesvesszőt téve egymás mellé írjuk azokat. Mi lehet a két szám?

K/C. 723. A tokiói olimpiára a Magyar Kézilabda Szövetség 17 női kézilabdázót nevezett: 3 kapust, 1 jobbszélsőt, 4 jobbátlövőt, 2 irányítót, 3 beállót, 2 balátlövőt és 2 balszélsőt. Hányféleképpen állhatnak fel a himnuszhoz, ha az ugyanolyan posztokon szereplő játékosok mindenképpen egymás mellett állnak? (A himnusz alatt a játékosok egymás mellett, egy sorban állnak.)

Javasolta: *Róka Bálint* (Budapest)

❄

Beküldési határidő: 2022. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (722–723., 1704–1708.)

Feladatok 10. évfolyamig

K/C. 722. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

K/C. 723. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

Feladatok mindenkinek

C. 1704. Mely a valós számok esetén lesz a $[0;2]$ intervallumon értelmezett

$$f(x)=4x^2-4ax+a^2-2a+2$$

függvény minimumhelyén a függvény értéke 3?

(*MC&IC*)

C. 1705. Egy deltoidról tudjuk, hogy húrnégyszög, oldalainak hossza 42 és 56 hosszúságegység. Milyen messze van egymástól a beírt és a köréírt körének középpontja?

Javasolta: *Siposs András* (Budapest)

C. 1706. Bizonyítsuk be, hogy 2022 darab pozitív egész szám között biztosan van 2 olyan, amelyek különbsége vagy összege osztható 4040-nel.

Javasolta: *Sáfár Lajos* (Ráckeve)

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1707. Az ABC háromszögben a szokásos jelölésekkel $b=6$, $a=2$ és $\gamma=120^\circ$. Határozzuk meg a γ szög CD belső szögfelezőjének pontos hosszát.

(*MC&IC*)

C. 1708. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számpárok halmazán:

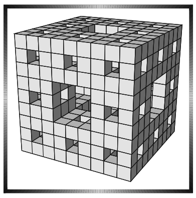
$$\log_2^2(x+y)+\log_2^2(xy)+1=2\log_2(x+y).$$

(*MC&IC*)

❄

Beküldési határidő: 2022. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5222–5229.)

B. 5222. Legyenek az A halmaz elemei azok a páros pozitív egészek, amelyeket 2-vel osztva a számjegyek összege 2-vel csökken, a B halmaz elemei pedig azok a pozitív egészek, melyeket 5-tel szorozva a számjegyek összege 5-tel nő. Adjuk meg az $A \cap B$ és a $B \setminus A$ halmazok elemszámát.

(*3 pont*) Javasolta: *Káspári Tamás* (Paks)

B. 5223. Definiáljuk az $\{a_n\}$ sorozatot a következőképpen:

$$a_1 = -3, \qquad a_{n+1} = 4 + a_n + 4\sqrt{a_n + 4}\,.$$

Határozzuk meg a_{2022} értékét.

(*3 pont*) Javasolta: *Káspári Tamás* (Paks)

B. 5224. Az $ABCD$ egységnégyzet BC oldalán úgy vesszük fel a P pontot, továbbá a CD oldalán a Q pontot, hogy $PAQ\sphericalangle = 45°$. A P és Q pontok melyik helyzetében lesz $BP + PQ + QD$ minimális?

(*4 pont*) Javasolta: *Szoldatics József* (Budapest)

B. 5225. Az ABC háromszög A-val szemközti oldala a, beírt körének középpontja I, sugara ϱ, a körülírt kör sugara R. Bizonyítsuk be, hogy ha $\overline{AI} = R$, akkor az ABC háromszög területe $\frac{a \cdot R}{4} + \varrho \cdot a$.

(*4 pont*) Javasolta: *Kocsis Szilveszter* (Budapest)

B. 5226. Egy háromszög mindhárom oldalának hossza legfeljebb 2 egység. Minden csúcspárt összekötünk egy-egy olyan körívvel, amely egy-egy egységsugarú körnek a félkörnél nem hosszabb íve. Igazoljuk, hogy

$$a' + b' > 2c'/3,$$

ahol a', b', c' a körívek hosszát jelöli.

(*5 pont*)

B. 5227. Adjunk példát olyan k pozitív egészre és legalább k csúcsú F véges fagráfra, amelyben minden csúcs legfeljebb harmadfokú, és F-nek tetszőleges k csúcsú összefüggő részgráfját elhagyva a megmaradó gráf legalább 2022 komponensre esik szét.

(*6 pont*) (*Monthly feladat* nyomán)

B. 5228. Egy parabola az ABC háromszög AB oldalát a C_1 és C_2, BC oldalát az A_1 és A_2, míg CA oldalát a B_1 és B_2 belső pontokban metszi. Igazoljuk, hogy ha $AC_1 = C_2B$ és $BA_1 = A_2C$, akkor $CB_1 = B_2A$.

(*5 pont*) Javasolta: *Holló Gábor* (Budapest)

B. 5229. Az $a \neq 0$ valós számra és az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre

$$f\big(x + f(y)\big) = f(x) + f(y) + ay$$

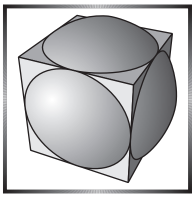
teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén. Bizonyítsuk be, hogy f additív, vagyis $f(x+y) = f(x) + f(y)$ minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén.

(*6 pont*) Javasolta: *George Stoica* (Saint John, New Brunswick, Kanada)

❄

Beküldési határidő: 2022. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (818–820.)

A. 818. Határozzuk meg mindazokat az m, n pozitív egész számokból álló párokat, amelyekre $9^{|m-n|} + 3^{|m-n|} + 1$ osztható m-mel és n-nel is.

Javasolta: *Kós Géza* (Budapest)

A. 819. Legyen G egy tetszőlegesen választott véges egyszerű gráf. A gráf csúcsaira olyan módon írunk nemnegatív egész számokat, hogy minden csúcson az a szám szerepeljen, ahány olyan szomszédja van az adott csúcsnak, melyre páros számot írtunk. Bizonyítsuk be, hogy az ilyen kitöltések száma kettőhatvány.

A. 820. Legyen ABC egy tetszőleges háromszög. A háromszög a oldalához hozzáírt kör az AB, BC és CA egyeneseket rendre a C_a, A_a és B_a pontokban érinti. Hasonlóan, a háromszög b oldalához hozzáírt kör az AB, BC és CA egyeneseket rendre a C_b, A_b és B_b pontokban érinti. Végül a háromszög c oldalához hozzáírt kör az AB, BC és CA egyeneseket rendre a C_c, A_c és B_c pontokban érinti. Legyen A' az A_bC_b és A_cB_c egyenesek metszéspontja. Hasonlóan, legyen B' a B_aC_a és A_cB_c egyenesek, C' pedig az A_bC_b és B_aC_a egyenesek metszéspontja. Végül legyen T_a, T_b és T_c a beírt kör érintési pontja rendre az a, b és c oldalon.

a) Bizonyítsuk be, hogy az $A'A_a$, $B'B_b$ és $C'C_c$ egyenesek egy ponton mennek át.

b) Bizonyítsuk be, hogy az $A'T_a$, $B'T_b$ és $C'T_c$ egyenesek is egy ponton mennek át, és ez a pont rajta van az ABC háromszög magasságpontja és beírt körének középpontja által alkotott egyenesen.

Javasolta: *Csaplár Viktor* (Bátorkeszi) és *Hegedűs Dániel* (Gyöngyös)

Beküldési határidő: 2022. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

A matematikai logika logikusabb, mint gondolnánk I.

Már jó egy évtizedes informatikatanári gyakorlat alatt foglalkoztatott, hogy a *vagy,* az *és,* a *kizáró vagy,* a *következtetés* és az *azonosság* műveletek nem fedik le az összes kimeneti lehetőséget a két állítás logikai kapcsolata terén.

A két részállítás (nevezzük A-nak és B-nek) egy állítássá összevonása négy alapesetet jelent, hisz egymástól függetlenül mindkettő lehet igaz és hamis. Mivel a négy eredménymezőben a két-két kimenet bármelyike előfordulhat, tehát $2^4 = 16$ kimenet lehetséges, ebből az előbb említettek csak öt esetet fednek le. Mi van a másik tizenegy lehetőséggel? Ebben a cikkben ennek járunk a végére.

a művelet		A	
		i	h
B	i	i	h
	h	i	h

Először – a későbbi félreértések elkerülése miatt – tisztázzuk a jelöléseket. Az állításokat latin nagybetűkkel jelöljük ($A, B, \ldots, Z$). Van két kitüntetett betű: I az azonosan igaz állítást jelöli, ami a körülményektől függetlenül mindig igaz logikai értékű, továbbá H az azonosan hamis állítást, ami az I állítás tagadása, ellentéte. A kétféle logikai érték jelölésére az i (igaz) és a h (hamis) betűket használjuk.

A logikai műveletek jelölésére a matematikában használatos jelöléseket fogjuk használni, a *tagadás* jele $\neg$, az *és* műveleté $\wedge$, a *vagy* műveleté $\vee$, a *kizáró vagy* műveleté $\otimes$, az *azonosságé* $\Leftrightarrow$, végül a *következtetésé* $\rightarrow$.

A teljesség kedvéért vegyük át a fent említett műveletek szabályát.

- A TAGADÁS művelet ellentétére változtatja az eredeti állítás logikai értékét (olvasata: $\neg A =$ nem A).
- Az ÉS művelet pontosan akkor IGAZ, ha mindkét részállításunk IGAZ (olvasata: $A \wedge B = A$ és B).
- A VAGY művelet pontosan akkor HAMIS, ha mindkét részállításunk HAMIS (olvasata: $A \vee B = A$ vagy B).

- A KIZÁRÓ VAGY művelet pontosan akkor IGAZ, ha a két részállításunk ELLENTÉTES LOGIKAI ÉRTÉKŰ (olvasata: $A \otimes B = A$ kizáró vagy B).
- Az AZONOSSÁG művelet pontosan akkor IGAZ, ha a két részállítás AZONOS LOGIKAI ÉRTÉKŰ (olvasata: $A \Leftrightarrow B = A$ azonos B-vel).
- A KÖVETKEZTETÉS művelet pontosan akkor HAMIS, ha az az állítás, amiről következtetünk IGAZ, de az, amire következtetünk HAMIS (olvasata: $A \rightarrow B = A$-ból következik B).

Ezek után nézzük is meg a kétállításos műveletek értéktáblázatát. Hagyományosan az alábbi módon adják meg ezeket:

$A \vee B$	
A igaz, B igaz	igaz
A igaz, B hamis	igaz
A hamis, B igaz	igaz
A hamis, B hamis	hamis

Ez a leírás precíz, de a fent mutatottnak több az információtartalma:

$A \vee B$		A	
		i	h
B	i	i	i
	h	i	h

Nem járunk messze az igazságtól, ha ennek láttán eszünkbe jut a szorzótábla, de arról majd később ejtünk szót.

Ahhoz, hogy ezt az új elrendezést megszokjuk, nézzük meg az alapműveletek átírását ebbe a formába.

$A \wedge B$		A	
		i	h
B	i	i	h
	h	h	h

$A \vee B$		A	
		i	h
B	i	i	i
	h	i	h

$A \otimes B$		A	
		i	h
B	i	h	i
	h	i	h

$A \Leftrightarrow B$		A	
		i	h
B	i	i	h
	h	h	i

$A \rightarrow B$		A	
		i	h
B	i	i	i
	h	h	i

Így egymás mellé rakva őket, sokkal jobban látszik a szabályszerűség, és megfigyelhető, hogy az igazi lényeg a vastagon keretezett részekben, azok különbözőségében rejlik, ezért rejtsük el a kevésbé fontos elemeket.

$A \wedge B$

i	h
h	h

$A \vee B$

i	i
i	h

$A \otimes B$

h	i
i	h

$A \Leftrightarrow B$

i	h
h	i

$A \rightarrow B$

i	h
h	h

Tehát az ilyen 2×2 értéktáblázatból van tizenhat, amelyekből eddig ötöt nevesítettünk.

Ideje rátérnünk arra, hogy mit is jelent az az információhiány, amelyet említettem. Némi töprengés után észrevehető, hogy az első négy tábla szimmetrikus a főátlóra, ahogy a szorzó- és összeadótábla is. Ez a logikai műveleteknél is azt jelenti, mint a számoknál: az első négy művelet kommutatív ($A \wedge B = B \wedge A$, $A \vee B = B \vee A$, $A \otimes B = B \otimes A$, $A \Leftrightarrow B = B \Leftrightarrow A$), a következtetés azonban nem az ($A \to B \neq B \to A$). Ezt persze eddig is tudtuk, de pont a tükrözés adja a kezünkbe a hatodik műveletet, ami – bizonyára sejtjük – a $B \to A$, értéktáblázata a másik irányú következtetés főátlóra tükrözésével adódik:

$B \to A$		A	
		i	h
B	i	i	h
	h	i	i

Ez így még mindig csak 6 lehetőség, még 10 hátravan. A lehetséges 16 táblabelsőt elhelyezni egy 4×4-es, négyzet alakú táblázatba érdemes, ami 8×8 betűt fog tartalmazni. Ezt már csak ügyesen fel kell töltenünk h, i betűkkel, hogy előállítsuk mind a 16 lehetséges eredményt.

Így néz ki üresen, mivel 8×8-as, a sakktáblára emlékeztet, el is neveztem *logikai sakktáblának.*

Lássuk a feltöltési módszert.

- Az első sorba írjunk csupa h betűt.
- A harmadikba hi párokat.
- Az ötödikbe ih párokat.
- A hetedik sorba pedig kerüljön csupa i betű.
- Az első oszloppárt töltsük fel h betűkkel.
- A másodikat hi párokkal.
- A harmadikat ih párokkal.
- Végül az üres cellákba írjunk i betűket.

h	h	h	h	h	h	h	h
h	h	h	i	i	h	i	i
h	i	h	i	h	i	h	i
h	h	h	i	i	h	i	i
i	h	i	h	i	h	i	h
h	h	h	i	i	h	i	i
i	i	i	i	i	i	i	i
h	h	h	i	i	h	i	i

Így a táblázat minden 2×2-es cellája eltér a többitől. Érdekes játék a táblázatban megkeresni a már megismert hat művelet helyét (lásd a hátsó belső borító *1. ábráját*).

Helyezzünk el egy kis pöttyöt a sakktábla középpontjába. A konstrukcióból következően az erre a pontra szimmetrikusan elhelyezkedő eredménytáblák egymás tagadásai (amit a hátsó belső borító *2. ábráján* ki-ki ellenőrizhet is: ha a tábla egyik mezőjén i vagy h betű van, akkor a tükörképének ugyanazon mezőjén h vagy i található), ezért ezt a pontot a tábla *tagadópontjának* nevezzük.

Az előző rész utolsó ábráján is megfigyelhető, hogy $\neg(A \Leftrightarrow B) = A \otimes B$.

Azért használunk két színt, hogy minden művelet és a tagadása eltérő színnel látszódjon.

Ezek szerint, ha a tábla valamelyik felét fel tudjuk tölteni, akkor kész is leszünk, a tükrözés tagadó voltát kihasználva adódik a többi. Erre a tábla alsó fele az esélyesebb, már csak három eredménytábla nincs nevesítve, vegyük ezeket szemügyre.

		A	
		i	h
B	i	i	h
	h	i	h

		A	
		i	h
B	i	i	i
	h	h	h

		A	
		i	h
B	i	i	i
	h	i	i

Az első tábla igaz eredményt ad, ha A igaz, és hamisat, ha A hamis. Ez nem lett más, mint A.

Hasonló megfontolások alapján a másodikban B-t és a harmadikban az azonosan igazat, I-t azonosíthatjuk. Ezeket és tagadásukat ($\neg A$, $\neg B$ és H) is feljegyezve, a logikai sakktáblánk kinézete a hátsó belső borító *3. ábráján* látható.

A maradék négy helyre az *és,* és a *vagy* műveletek, továbbá a két irányú *következtetés* tagadása $\big(\neg(A \wedge B)$, $\neg(A \vee B)$, $\neg(A \to B)$ és $\neg(B \to A)\big)$ kerül.

Szemrevételezve a munkánkat megnyugodhatunk, mind a 16 lehetséges kimenetet nevesítettük. Nem hanyagságból vagy tudatlanságból használjuk csak az *és,* a *vagy,* a *kizáró vagy,* az *azonosság* és a *következtetés* műveleteket, továbbá a *tagadást,* hanem azért, mert egyszerűen nincs több. (Lásd a hátsó belső borító *4. ábráját.*)

Na de itt álljunk csak meg egy pillanatra. Lehet, hogy buzgalmunkban túllőttünk a célon?

Mire is gondolok?

A tagadásra. Egy adott művelet, mondjuk az *és* esetén többféle módon alkalmazhatjuk a tagadást. Tagadhatjuk az első, vagy akár a második részállítást, netán mindkettőt külön-külön, vagy az egész művelet eredményét.

Ezek persze mind mást jelentenek, hogy jobban érthetővé váljon, legyen az A állítás az, hogy *Kedd van,* a B állítás pedig az, hogy *Esik az eső.* Ekkor:

$A \wedge B$	Kedd van és esik az eső.
$\neg A \wedge B$	Nem kedd van és esik az eső.
$A \wedge \neg B$	Kedd van és nem esik az eső.
$\neg A \wedge \neg B$	Nem kedd van és nem esik az eső.
$\neg(A \wedge B)$	Nem igaz az, hogy kedd van és esik az eső.

Az értéktáblázatok elkészítését az olvasóra bízom, azt azonban szögezzük le, hogy a kapott értékek mind a már táblán lévők valamelyikével azonosak.

$A \wedge B$	$\neg A \wedge B$	$A \wedge \neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge B)$
$\begin{array}{c\|c\|c\|c} A \wedge B & & \multicolumn{2}{c}{A} \\ & & i & h \\ \hline B & i & i & h \\ & h & h & h \end{array}$ $\begin{array}{\|c\|c\|} \hline i & h \\ \hline h & h \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{c\|c\|c\|c} \neg A \wedge B & & \multicolumn{2}{c}{A} \\ & & i & h \\ \hline B & i & h & i \\ & h & h & h \end{array}$ $\begin{array}{\|c\|c\|} \hline h & i \\ \hline h & h \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{c\|c\|c\|c} A \wedge \neg B & & \multicolumn{2}{c}{A} \\ & & i & h \\ \hline B & i & h & h \\ & h & i & h \end{array}$ $\begin{array}{\|c\|c\|} \hline h & h \\ \hline i & h \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{c\|c\|c\|c} \neg A \wedge \neg B & & \multicolumn{2}{c}{A} \\ & & i & h \\ \hline B & i & h & h \\ & h & h & i \end{array}$ $\begin{array}{\|c\|c\|} \hline h & h \\ \hline h & i \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{c\|c\|c\|c} \neg(A \wedge B) & & \multicolumn{2}{c}{A} \\ & & i & h \\ \hline B & i & h & i \\ & h & i & i \end{array}$ $\begin{array}{\|c\|c\|} \hline h & i \\ \hline i & i \\ \hline \end{array}$
$A \wedge B$	$\neg(B \to A)$	$\neg(A \to B)$	$\neg(A \vee B)$	$\neg(A \wedge B)$
az eredetihez képest	oszlopcsere (OCS)	sorcsere (SCS)	átlós csere (ÁCS)	betűcsere (BCS)

Könnyen beláthatjuk, hogy bármely műveletből indulunk is ki, az eredménytáblában az első részállítás tagadása oszlopcserét (OCS), a második tagadása sorcserét (SCS), mindkettő tagadása átlós cserét (ÁCS), az egész művelet tagadása pedig az i és h értékek cseréjét, vagyis betűcserét (BCS) jelent.

A logikai kifejezések egyszerűsítése, formalizálása és annak a megfejtése, hogy ennek az egésznek milyen szoros a kapcsolata a számítógépekkel, a cikk következő részéből derül majd ki.

Tóth Tamás
Budapest

Informatikából kitűzött feladatok

I. 556. Egy városnegyedbe N lakóházat terveztek, melyek mindegyikében egy-egy szinten azonos számú lakás van. A házakban a lakások értéke a szintek számával csökken. A lakásokat jellemezhetjük egy olyan P pontszámmal, ami azt mutatja meg, hogy hányadik szinten van a házban (például egy harmadik szinten lévő lakás pontszáma 3). A tervben szereplő házak magasságát városrendezési okokból csökkenteni kell összesen K darab szinttel. A csökkentés során előfordulhat, hogy a tervezettnél kevesebb számú lakóházat építenek a városnegyedbe.

Készítsünk programot `i556` néven, amely a tervben szereplő házak K darab szinttel való csökkentését elvégzi úgy, hogy közben a tervben szereplő házak összértéke a legkisebb mértékben csökken.

A program *standard bemenetének* első sorában a lakóházak N ($2 \leqslant N \leqslant 10\,000$) száma és K ($2 \leqslant K \leqslant 10\,000$) értéke található, a következő N sorban pedig az, hogy egy-egy ház hány szintes ($2 \leqslant M_i \leqslant 25$). A program *standard kimenetére* az elérhető maximális pontszámot írjuk ki.

Bemenet (a / jel sortörést helyettesít)	**Kimenet**
`4 5 / 7 / 5 / 6 / 8`	`85`

Magyarázat: az eredetileg 100 összpontszámmal rendelkező lakónegyedben az 5 szintes házat nem építjük meg, így a csökkentés után a pontszámok összege $28+21+36=85$.

Beküldendő egy tömörített `i556.zip` állományban a program forráskódja és dokumentációja, amely tartalmazza a megoldás rövid leírását, és megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztő környezetben fordítható.

I. 557 (É). Egy kiskereskedelmi bolthálózat modernizálásba kezdett, önműködő kasszákat állítottak be a nagyobb boltjaikba. Nem túl sűrűn, de vak és gyengén látó vásárlók is megfordulnak a boltban. Nekik egy szövegfelolvasó programot készíttettek. A programnak egy ismert hiányossága van: a számjegyekkel szereplő számokat karakterenként olvassa fel, tehát az *„1500 forint”* szöveget *„Egy öt nulla nulla forint”* formában. Mennyivel érthetőbb lenne az *„Ezerötszáz forint”* hangalakot hallani, de ehhez a számot szöveggé kell alakítani.

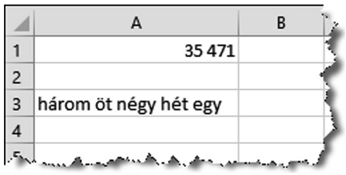
Táblázatkezelő program segítségével oldjuk meg az alábbi feladatokat.

1. Hozzuk létre a táblázatkezelőben a **pénztár** nevű állományt a program alapértelmezett formátumában, ebben legyen három munkalap **alap**, **pénztár** és **nagy számok** néven.
2. Tegyük lehetővé, hogy az **alap** munkalap A1 cellájába egy legfeljebb tizenöt számjegyből álló pozitív egész számot lehessen bevinni.
3. Amennyiben az A1 értéke a feltételeknek megfelelő, akkor az A3 cellában jelenjen meg a szám karakterenkénti szöveges változata. A számjegyek között pontosan egy szóköz legyen, de a szöveg végén ne legyen fölösleges szóköz. Például ha A1 tartalma 23 710 346, akkor A3-ban jelenjen meg a „kettő három hét egy nulla három négy hat” szöveg.
4. Tegyük lehetővé, hogy a **pénztár** munkalap A1 cellájába az „összeg” szót, a B1 cellába pedig egy legfeljebb kilenc számjegyből álló pozitív egész számot lehessen bevinni.
5. A munkalap D1, D3 és D5 cellájába rendre kerüljön a „Fizetési mód”, az „Euro árfolyam” és a „Fizetendő:” szöveg.
6. A D2 cella legyen legördíthető lista, az alábbi négy listaelemmel: „ ” (üres szöveg), „Forint kártyával”, „Forint készpénzzel”, „Euro”.
7. Amennyiben B1 értéke a feltételeknek megfelelő, úgy a D6 cellában jelenjen meg a helyesírási szabályok szerint B1 értéke az alábbiak szerint:
   a. Ha a D2 cella tartalma „Forint kártyával”, akkor a pontos összeg a pénznemmel megtoldva, például: 503 118 esetén az „ötszázháromezer-száztizennyolc forint”.
   b. Ha a D2 cella tartalma „Forint készpénzzel”, akkor az összeg ötösre kerekítve, hiszen a lekisebb értékű pénzérme az ötforintos, és a pénznemmel megtoldva, például: 503 118 esetén az „ötszázháromezer-százhúsz forint”.
   c. Ha a D2 cella tartalma „Euro” és a D4 cellában szerepel az árfolyam, akkor az összeg átváltva eurora és centekre, például: 503 118 és az euro árfolyam 360, akkor az „ezerháromszázkilencvenhét euro ötvenöt cent”.

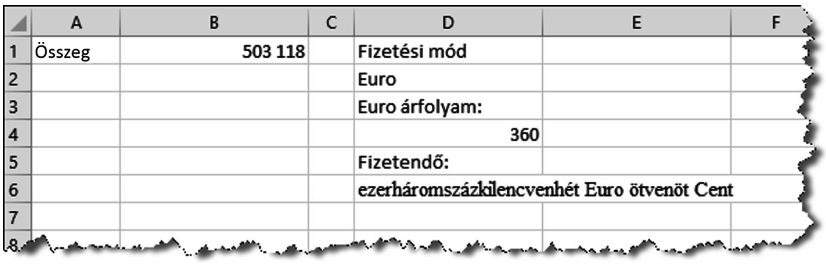
d. A számok szövegé alakítása feleljen meg az alábbi nyelvtani szabályoknak: 2000-ig egybe kell írni a számot, fölötte balról hármasával csoportosítva kötőjellel.

szám	leírás	szám	leírás
110	száztíz	1 051	ezerötvenegy
315	háromszáztizenöt	1 895	ezernyolcszázkilencvenöt
503	ötszázhárom	3 420	háromezer-négyszázhúsz
824	nyolcszázhuszonnégy	45 000 403	negyvenötmillió-négyszázhárom

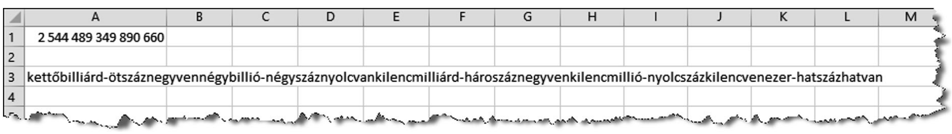
8. Tegyük lehetővé, hogy a **nagy számok** munkalap A1 cellájába egy legfeljebb tizenhat számjegyből álló pozitív egész számot lehessen bevinni.
9. Amennyiben az A1 értéke a feltételeknek megfelelő, az A3 cellában jelenjen meg az A1-be írt szám szöveges változata, pontosan úgy, mint a pénztár munkalapnál, csak nem kell a címlet megnevezése. Például, ha A1 tartalma 5 742 568 741 225, akkor A3-ban jelenjen meg a „ötbillió-hétszáznegyvenkettő-milliárd-ötszázhatvannyolcmillió-hétszáznegyvenegyezer-kétszázhuszonöt” szöveg.



Minta az **alap** *munkalaphoz*



Minta a **pénztár** *munkalaphoz*



Minta a **nagy számok** *munkalaphoz*

Segédszámításokat mindhárom munkalapon a K oszloptól jobbra végezhetünk. A megoldáshoz makró vagy más program nem használható, csak a táblázatkezelő beépített függvényei.

Beküldendő egy `i557.zip` tömörített állományban a munkafüzet és egy rövid dokumentáció, amely megadja, hogy a megoldás milyen táblázatkezelő program melyik verziójában készült.

I. 558. A 2022. januári számban megjelent **B. 5214.** feladatban egy olyan 1-esekből és 0-kból álló számsorozatot kerestek, amely minden pozitív alapú számrendszerben értelmezve hárommal osztható számot jelent.

A feladat általánosításaként készítsünk programot, amely megvizsgálja a legföljebb 8 jegyű, csupa 0 és 1 jegyekből álló számokat egy adott R számrendszerben értelmezve, és megadja, hogy közülük hány osztható egy adott K számmal.

A program a standard bemenet első sorából olvassa be a számrendszer R alapszámát ($2 \leqslant R \leqslant 1000$), és a K ($2 \leqslant K \leqslant 1000$) osztót, majd adja meg, hogy hány olyan vizsgált szám van, amely a megadott számrendszerben értelmezve K-val osztható.

Bemenet	**Kimenet**
`29 7`	`8`

Beküldendő egy tömörített `i556.zip` állományban a program forráskódja és dokumentációja, amely tartalmazza a megoldás rövid leírását, és megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I/S. 60. Egy érdekes tény a virágokról, hogy szirmaik száma gyakran Fibonacci-szám. Egy nap találtunk N virágot a réten, az i-ediknek $T[i]$ virágszirma van.

Adjuk meg azt a minimális sziromszámot, amennyit el kell távolítani a virágokról összesen, hogy mindegyiken Fibonacci-szám legyen a szirmok száma.

A bemenet első sorában az N szám található. A következő sor N számot tartalmaz, az i-edik szám $T[i]$, az i-edik virág sziromszáma. A kimenet egyetlen sorában egy szám szerepeljen, hogy minimálisan mennyi szirmot kell eltávolítani az N virágról összesen, hogy a fentieknek megfeleljen.

Bemenet	**Kimenet**
`4` `4 10 5 11`	`6`

Magyarázat: távolítsunk el az 1. virágról egy szirmot, a 2. virágról két szirmot és a 4. virágról három szirmot, tehát összesen hatot.

Korlátok: $1 \leqslant N \leqslant 10\,000$, $1 \leqslant T[i] \leqslant 10^9$. Időlimit: 0,4 mp.

Értékelés: a pontok 50%-a kapható, ha $1 \leqslant N \leqslant 100$ és $1 \leqslant T[i] \leqslant 100$ esetén helyesen működik a program.

Beküldendő egy `is60.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

S. 159. Egy kalandjáték $N \times M$ téglalap alakú területből áll. Minden területen egy próba található, melynek nehézsége pozitív egész szám. Van egy hősünk, aki kezdetben a bal felső sarokban áll és egyes szintű. A hős akkor léphet rá egy, a jelenlegi helyével oldalszomszédos területre, ha a szintje legalább akkora, mint az ott található próba nehézsége. A területen található próba teljesítése után a hős szintje eggyel nagyobb lesz.

A hős tetszőlegesen lépkedhet a tábla már meglátogatott (teljesített) mezőin, de csak egyszer – az első rálépéskor – emelkedik a szintje. Teljesíteni tudja-e a hős a játékot, azaz el tud-e jutni a jobb alsó területre?

Bemenet: az első sor tartalmazza a sorok N és az oszlopok M számát. A következő N sor mindegyike M számot tartalmaz, az adott területen lévő próba nehézségét. A bal felső sarokban nincs próba, így az az érték mindig 0.

Kimenet: az első sorban az „`IGEN`” szó szerepeljen, ha a játék teljesíthető, és a „`NEM`” szó különben. Ha a játék teljesíthető, adjuk meg a legkisebb szintet, amivel teljesíteni lehet. Ha az első sor „`NEM`” volt, adjuk meg a szabályos lépésekkel elérhető legnagyobb szintet.

Bemenet (a / jel sortörést helyettesít)	**Kimenet** (a / jel sortörést helyettesít)
`3 3 / 0 1 2 / 3 5 6 / 4 4 2`	`IGEN / 7`

Magyarázat: az 5-ös és 6-os próbák kivételével mindet teljesíteni kell. Ezek után a hős 7-es szintű lesz.

Korlátok: $2 \leqslant N, M \leqslant 100$, egy próba nehézsége legfeljebb 20 000. Időlimit: 0,5 mp.

Értékelés: a pontok 50%-a kapható, ha a kimenet első sora helyes.

Beküldendő egy `s159.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2022. március 15.

❄

Rátz Tanár Úr Életműdíjak átadása 2021 decemberében

Huszonegyedik alkalommal adták át a Rátz Tanár Úr Életműdíjat azon általános és középiskolában oktató pedagógusoknak, akik matematika-, fizika-, kémia-, biológiaoktatás területén kimagasló teljesítményt nyújtanak a tantárgyak népszerűsítésében és a tehetséggondozásban.

A Magyar Tudományos Akadémia dísztermében megrendezett díjátadón kilenc tanár vehette át az Alapítvány a Magyar Természettudományos Oktatásért Rátz Lászlóról elnevezett díját. A kitüntetést az Ericsson Magyarország, a Graphisoft és a Richter Gedeon által létrehozott alapítvány kuratóriuma ítéli oda minden évben, összesen 12 millió forint értékben.

A világban, amelyben élünk a technológia gyors ütemű fejlődésének köszönhetően az információ elképesztő sebességgel terjed és bárki számára pillanatok alatt elérhető. Nagy kérdés azonban, hogy a gyerekek, akik bár ebben az új világban digitális bennszülöttként élnek, mit kezdenek ezzel a rengeteg információval, hogyan választják ki ezek közül, mi a valódi és mi a megbízható – hogy mik a tények, hogy mit mond a tudomány.

Ezt a tudást, amire alapozva később döntéseket hoznak a fiatalok, az iskolában a pedagógusoktól kapják meg. A Rátz Tanár Úr Életműdíj immár 21. éve azon kiemelkedő természettudományos tárgyakat tanító pedagógusok munkájára hívja fel a figyelmet, akik a tudásukkal és pedagógiai érzékükkel széles látókörű felnőttekké nevelik diákjaikat. A 1,5 millió forinttal járó kitüntetést az Ericsson Magyarország, a Graphisoft és a Richter Gedeon által létrehozott alapítvány kuratóriuma ítéli oda minden évben.

„A mi feladatunk az, hogy megmutassuk és elismerjük azokat a természettudományos tárgyakat oktató pedagógusokat, akik hivatástudatukkal generációk jövőjére vannak pozitív hatással. Szeretnénk egyúttal példát mutatni a gazdasági szereplőknek is, hogy lehetőségeikhez mérten támogassák az oktatást, hiszen az igazi befektetés a magyar gazdaság számára a tudásban rejlik, a tudás átadásának kulcsa pedig a pedagógusainkban." – mondta el Kroó Norbert, professzor, akadémikus, az Alapítvány a Magyar Természettudományos Oktatásért kuratóriumának elnöke.

A Rátz Tanár Úr Életműdíjat az ország bármely általános vagy középiskolájában tanító vagy korábban ott tevékenykedő pedagógus megkaphatja. A díjazott pedagógusok valamennyien a reál tantárgyak oktatási színvonalának emeléséért dolgoznak, diákjaik sikeresen szerepelnek országos tudományos versenyeken, az oktatás mellett rendszeresen továbbképzik magukat, tájékozottak az adott tudomány területén elért eredményekről, gyakran tankönyvek és szakmai folyóiratok szerzői.

Az idei évben a következő pedagógusoknak ítélte oda a díjat a kuratórium:

Kémiából **Fodor Erika** (Budapest, ELTE Trefort Ágoston Gyakorló Gimnázium) és **Sarka Lajos** (Nyíregyházi Egyetem Eötvös József Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium);

Biológiából **Dr. Molnár Katalin** (Budapest, ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Általános Iskola és Gyakorló Gimnázium) és **Horváth Zsolt** (Gödöllői Református Líceum Gimnázium);

Matematikából **Csahóczi Erzsébet** (Budapest, ELTE Gyertyánffy István Gyakorló Általános Iskola) és **Kovács István** (Szegedi Tudományegyetem Gyakorló Gimnázium és Általános Iskola);

Fizikából **Dr. Vankó Péter** (Budapest, BME Fizikai Tanszék) és **Pápai Gyuláné és Pápai Gyula** (Fertőd, Babos József Általános Iskola /Soproni Szakképzési Centrum, Vas- és Villamosipari Technikum).

Idézünk a matematika, illetve a fizika területén díjazott tanárokról készített rövidfilmekből.

Matematika

Csahóczi Erzsébet (Budapest): *A délutánjaim azzal teltek, hogy korrepetáltam és tehetséget gondoztam, versenyre készítettem a gyerekeket. Egyébként nagyon szerettem, mert jó volt látni, amikor egy gyerek elkezdett kinyílni és elkezdte elhinni magáról, hogy őneki ez menni fog. Ez egy nagyon fontos dolog. A gyerek érezze azt, hogy most megint előreléptem egy picit, megint, megint; ez is kivilágosodott, ez is kivilágosodott. Van egy pont, ahol aztán óriási gyors fejlődés következik. Az egy boldogító pillanat, látni egy gyereket, amikor már érzi azt, hogy: „Megvan! Megvan! Én is tudom."*

A tanárnőről szóló rövidfilm itt tekinthető meg:

`https://www.youtube.com/watch?v=sWhhxNbY4Sw`.

Kovács István (Szeged): *Ilyen tanítványom is volt, aki jött és mondta, hogy: „Tanár úr, ne haragudjon, de már anyának se ment a matematika." Ez nem öröklődik! És minél kisebb a matematika iránti motivációja a gyereknek, annál többet kell gyakorolni. És türelemmel. És hát sok-sok dicsérettel. ... Sokkal jobban átlátják a bonyolult dolgokat is. Elég sok bonyolult dologgal találkoznak itt az órákon. ... Az emelt szintű érettségi tananyag fölött is vannak bizonyos anyagrészek, amiket tanítunk, tehát nem csak azt próbáljuk elérni, hogy könnyedén bejussanak különböző egyetemekre, hanem azt is, hogy ott jó eredménnyel bent is maradjanak. Jó hangulat legyen órán. Nem nagyon érzem jól magam egy ilyen feszélyezett, kötött társaságban. Mikor kijövök az óráról, akkor van egy olyan jó érzése az embernek, hogy ezt most klasszul megcsináltam. Merthogy tudom, hogy mit akartam, és eljutottak odáig a diákok, amit én szerettem volna, meg is értették – ez egy jó érzés. És szerintem számukra is jó érzés.*

A tanár úrról szóló rövidfilm itt tekinthető meg:

`https://www.youtube.com/watch?v=mth-sSzouGY`.

Ki volt Rátz tanár úr és mit jelent ma nekünk pedagógiai munkássága?:

`https://www.youtube.com/watch?v=y2gHM5d1n5M`.

Fizika

Dr. Vankó Péter (Budapest): *Az igazán mély, lényeges tapasztalatokat tulajdonképpen mi is csak sejtjük, és nehéz megosztani. De végül is az egész életünk arról szól, hogy az ember ezt szereti átadni. ... Az általános iskolában meg a gimnáziumban is nagyon jó matematikatanárom volt, és akkor én matekkal kezdtem foglalkozni. Fizikatanárral nem volt szerencsém, ... de ott volt a KöMaL, és elkezdtem nézegetni a feladatokat, és könyvekből hozzá magam tanultam meg. És aztán egy idő után ez jobban ment, mint a matek. 91-ben kerültem az Árpád Gimnáziumba, akkor 18 óra volt a kötelező óraszám. Ebben az iskolában speciális matematika tagozatos osztály* *volt, és a fizikát minden osztályban bontva tanítottuk. 18 vagy 36 gyerek, az nem egy 2-es szorzó és egy ilyen számbeli különbség, hanem egy minőségileg más dolog. Tehát 18 gyerek között szavak nélkül uralni lehet a helyzetet. 92-ben osztályfőnök lettem. Borzasztó szerencsém volt, mert kaptam egy olyan osztályt, ahol az osztálynak a nagyobbik fele nyitott volt a dolgokra, … és ott tényleg egy ilyen négy év flow volt, és jöttek az eredmények, … Belevetettem magam, vittem a tanítványaimat kirándulni, biciklizni, tájfutó szakosztályt csináltam az iskolában. Középiskolások, az olimpiára készülők, hát ők pedig egy hihetetlen érdeklődő és nyitott társaság, és tényleg az országunknak a legtehetségesebb gyerekei. Egy ilyen olimpiai szakkörön van, hogy a diákok mondják el a megoldást és olyan megoldást mondanak el, ami nekem nem jutott volna az eszembe. Ezek szintén klassz élmények.*

A tanár úrról szóló rövidfilm itt tekinthető meg:

`https://www.youtube.com/watch?v=FfmKoGCTA9Q`.

Pápai Gyuláné és **Pápai Gyula** (*Fertőd* és Sopron):

– *Én azt gondolom, hogy a pedagógus személyisége és a szakmai tudása között nem tennék különbséget. Sőt, ha helyezhetném, akkor tán a pedagógus személyiségét helyezném előbbre.* (P. Gy.-né)

– *Mikor kérdezik tőlem, hogy ki a jó pedagógus, azt szoktam mondani, hogy azt nem tudom, de utólag mindig tudni lehet: az a jó pedagógus, akiről húsz év múlva is úgy emlékeznek a tanítványai.* (P. Gy.)

– *Az ismeretségünk majd hatvan évre nyúlik vissza. Pécsre kerültünk mind a ketten a Pedagógiai Főiskolára matematika–fizika–műszaki szakra. És ott először munkakapcsolatunk volt.* (P. Gy.-né)

– *Azért, mert engem választottak meg csoportvezetőnek, őt meg csoportvezető-helyettesnek. Nagyon ragaszkodtam hozzá, mert pont egy ilyen agilis csoportvezető-helyettesre volt szükségem.* (P. Gy.)

– *És hát ez tartott körülbelül három és fél évig. Aztán jött a pályaválasztás.* (P. Gy.-né)

– *Egyszer csak észrevettük, hogy mi együtt akarunk elhelyezkedni. A lényeg az, hogy idekerültünk Fertődre, az első küszöbök átlépése után. De amikor így betévedtünk a fizika szertárba, akkor arra jöttünk rá, hogy ez egy romhalmaz. Na, hajrá! Úgyis energiánk van, azzal jöttünk ki, nekiállunk eszközöket gyártani.* (P. Gy.)

– *Ha a gyerek eszközhöz nyúlhat és tevékenykedhet, akkor másképp áll a tantárgyhoz. Tehát megszereti azt a tárgyat. Az volt a véleményünk, hogy az alapvető fizikai jelenséget tapasztalás útján lehet eredményesen tanítani.* (P. Gy.-né)

– *A fizika könnyebben megmagyarázható. Benne élünk egy természetben. Ha azt akarom, hogy a természettel jó legyen a kapcsolatom, akkor legalább valamit ismerjek meg belőle, … És ez lelkesítette is a gyerekeket.* (P. Gy.)

– *Én azt hiszem, hogy a mi kettőnk sikere meg eredménye … abban rejlett, hogy tudtunk megfelelő kontaktust teremteni a gyerekekkel.* (P. Gy.-né)

A tanár házaspárról szóló rövidfilm itt tekinthető meg:

`https://www.youtube.com/watch?v=6GTHs9wvJIo`.

Beszámoló a 2021. évi Eötvös-versenyről

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 2021. évi Eötvös-versenye október 15-én délután 3 órai kezdettel tíz magyarországi helyszínen[1] került megrendezésre. Ezért külön köszönettel tartozunk mindazoknak, akik ebben szervezéssel, felügyelettel a segítségünkre voltak. A versenyen a három feladat megoldására 300 perc áll rendelkezésre, bármely írott vagy nyomtatott segédeszköz használható, de (nem programozható) zsebszámológépen kívül minden elektronikus eszköz használata tilos. Az Eötvös-versenyen azok vehetnek részt, akik vagy középiskolai tanulók, vagy a verseny évében fejezték be középiskolai tanulmányaikat. Összesen 69 versenyző adott be dolgozatot, 14 egyetemista és 55 középiskolás.

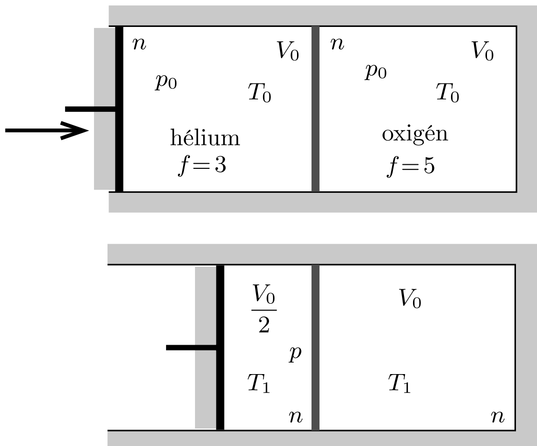
Ismertetjük a feladatokat és azok megoldását.

❄

1. feladat. *Egy hőszigetelt, hengeres tartályt egy jó hővezető, rögzített fal oszt két egyforma henger alakú térrészre. Az egyik térfélben héliumgáz, a másikban azzal megegyező anyagmennyiségű oxigéngáz található, mindkét gáz kezdeti hőmérséklete* T_0*, kezdeti térfogata pedig* V_0*. A tartály egyik végét könnyen mozgó, hőszigetelő dugattyú zárja le, amellyel a héliummal töltött térrész térfogata változtatható. Határozzuk meg a hengerben lévő gázok végső hőmérsékletét, miután a dugattyú lassú mozgatásával a héliumgáz térfogatát* $V_0/2$*-re csökkentettük!*

(*Vigh Máté*)

Megoldás. Az *1. ábra* a kezdeti állapotot és a végállapotot mutatja.



1. ábra

[1] Részletek a verseny honlapján: `http://eik.bme.hu/~vanko/fizika/eotvos.htm`.

Feladatunk a T_1 hőmérséklet meghatározása. Ezt többféle módszerrel is megtehetjük.

I. megoldás. Legyen a héliumgáz lassan változó pillanatnyi hőmérséklete T, térfogata V. Az elválasztó fal jó hővezetése miatt az oxigéngáz hőmérséklete is T. Ha a dugattyú elmozdulása miatt a hőmérséklet ΔT értékkel nő, a héliumgáz térfogata pedig ΔV értékkel változik meg ($\Delta V < 0$), akkor az egész rendszer belső energiájának változása

$$\Delta E = \frac{3}{2}nR\,\Delta T + \frac{5}{2}nR\,\Delta T = 4nR\,\Delta T. \tag{1}$$

A héliumgáz nyomása:

$$p = nR\frac{T}{V}.$$

Az egész rendszerre alkalmazott első főtétel szerint

$$-p\Delta V = \Delta E,$$

vagyis

$$\frac{\Delta V}{V} + 4\frac{\Delta T}{T} = 0. \tag{2}$$

Szorozzuk meg (2)-t T^4V-vel, és használjuk ki, hogy a megváltozások kicsik (ezért a négyzetüket és a magasabb hatványaikat elhanyagolhatjuk):

$$T^4\,\Delta V + 4T^3V\,\Delta T = \Delta(T^4V) = 0,$$

tehát T^4V a folyamat során állandó marad. A héliumgáz kezdeti és végállapotát összehasonlítva kapjuk, hogy

$$T_0^4\,V_0 = T_1^4\frac{V_0}{2}, \qquad \text{vagyis} \qquad T_1 = \sqrt[4]{2}\,T_0 \approx 1{,}2\,T_0.$$

Ugyanezt az eredményt az (1)-ben szereplő kicsiny változások összegzésével (integrálással) is megkaphatjuk:

$$\int\limits_{V_0}^{V_0/2} \frac{1}{V}\,\mathrm{d}V + 4\int\limits_{T_0}^{T_1} \frac{1}{T}\,\mathrm{d}T = -\ln 2 + 4\ln\frac{T_1}{T_0} = 0,$$

vagyis

$$T_1 = \sqrt[4]{2}\,T_0.$$

II. megoldás. Az (1) egyenlet szerint a folyamat tekinthető egy $f = 8$ szabadsági fokú gáz adiabatikus összenyomásának. Erre a folyamatra a fajhőhányados $\kappa = \frac{f+2}{f} = \frac{5}{4}$, tehát az adiabatikus állapotváltozás egyenlete:

$$T\,V^{\kappa-1} = T\,V^{1/4} = \text{állandó},$$

ahonnan $T_1 = \sqrt[4]{2}\,T_0$.

III. megoldás. Kézikönyvekben[2] és képletgyűjteményekben megtalálható, hogy n mol anyagmennyiségű, f szabadsági fokú molekulákból álló, T hőmérsékletű és V térfogatú ideális gáz entrópiája

$$S(T,V)=\frac{f}{2}\,nR\ln\frac{T}{T_0}+nR\ln\frac{V}{V_0}.$$

Az entrópia nullpontja önkényesen választható, a fenti képletben például

$$S(T_0,V_0)=0$$

(ahol T_0 és V_0 lehet a feladatban szereplő kezdeti hőmérséklet és térfogat).

A vizsgált folyamatban nincs hőcsere a rendszer és a környezete között, továbbá (a dugattyú lassú mozgatása esetén) a folyamat reverzibilis, így a rendszer entrópiája változatlan marad:

$$\left(\frac{f_{\mathrm{He}}}{2}\,nR\ln\frac{T_1}{T_0}+nR\ln\frac{V_0/2}{V_0}\right)+\left(\frac{f_{\mathrm{O_2}}}{2}\,nR\ln\frac{T_1}{T_0}+nR\ln\frac{V_0}{V_0}\right)=0,$$

vagyis (tudva, hogy $f_{\mathrm{He}}=3$ és $f_{\mathrm{O_2}}=5$)

$$4\,\ln\frac{T_1}{T_0}+\ln\frac{1}{2}=0,$$

azaz a $T_1=\sqrt[4]{2}\,T_0$ eredmény adódik.

Megjegyzés. Ha a héliumgáz térfogatát olyan gyorsan csökkentjük a felére, hogy az oxigéngáz nem tud azonnal felmelegedni, akkor a folyamat irreverzibilissé válik, vagyis az entrópia nőni fog. Mivel adott térfogat esetén a magasabb hőmérséklethez tartozik nagyobb entrópia, a dugattyú hirtelen elmozdítása után a két gáz végül (a hőmérséklet kiegyenlítődése után) jobban felmelegszik, mint a feladatban szereplő lassú összenyomásnál.

2. feladat. *Egy henger alakú, ℓ hosszúságú és $R\ll\ell$ sugarú, légmagos szolenoid meneteinek száma N. A tekercs belsejébe egy $r\ll R$ sugarú, a szolenoid szimmetriatengelyére merőleges síkú, L induktivitású szupravezető gyűrűt helyezünk (a gyűrű és a szolenoid középpontja egybeesik).*

a) Növekszik vagy csökken a szolenoid induktivitása a gyűrű behelyezése következtében?

b) Határozzuk meg az induktivitás megváltozásának nagyságát!

(*Széchenyi Gábor*)

Megoldás. *a*) A szupravezető fázisban lévő anyagoknak az az egyik különleges tulajdonságuk, hogy az elektromos ellenállásuk nulla. Ha egy szupravezető gyűrűben feszültség indukálódna, akkor az Ohm-törvény alapján végtelen nagy áramnak kellene benne folynia. Ennek a fizikai képtelenségnek a feloldása az, hogy a szupravezető gyűrűben nem indukálódhat feszültség, azaz a gyűrűn áthaladó mágneses fluxus értéke nem változhat meg.

[2]Lásd pl. a 333+ Furfangos Feladat Fizikából 194. feladatának megoldását.

Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy kezdetben, amikor a szolenoidban nulla az áramerősség, akkor a szupravezető gyűrűben sem folyik áram, így a rajta áthaladó mágneses fluxus értéke nulla. Ez az érték akkor sem változhat meg, ha a tekercsben áram folyik. Hogyan lehetséges ez, hiszen a szolenoid mágneses tere miatt meg kellene jelennie egy véges fluxusnak a gyűrűben. Úgy, hogy a gyűrűben olyan áram indukálódik, mely azonos nagyságú, de ellentétes előjelű fluxust hoz létre a gyűrűn. Ennek az áramnak a hatására a tekercsen áthaladó mágneses fluxus értéke és így a tekercs induktivitása is kisebb lesz, mint a szupravezető gyűrű nélküli esetben.

b) Vizsgáljuk az előbb leírt jelenséget kvantitatívan. Legyen a szolenoid árama I. A szolenoid közepén elhelyezett szupravezető gyűrűn áthaladó mágneses fluxus értéke

$$\Phi_{\text{gyűrű}} = L \cdot i + M \cdot I,$$

ahol L a gyűrű öninduktivitása, i a gyűrű árama, M a szolenoid és a gyűrű kölcsönös indukciós együtthatója, ami megadja, hogy az egyikben folyó egységnyi erősségű áram hatására mekkora mágneses fluxus jön létre a másikban. (Belátható, hogy M nagysága a szereplők felcserélésekor nem változik, tehát mindegy, hogy a gyűrű árama által a szolenoidban keltett mágneses fluxust számítjuk ki, vagy a szolenoid árama által a gyűrűben keltett fluxust vizsgáljuk. Ez utóbbi nyilván könnyebb feladat.) M értékét a feladatban megadott geometriára könnyen kiszámolhatjuk. Az I erősségű árammal átjárt szolenoidban a homogén mágneses tér indukcióvektorának nagysága $\frac{\mu_0 NI}{\ell}$. Mivel a gyűrű síkja merőleges a mágneses tér irányára, a gyűrűn áthaladó mágneses fluxus $\frac{\mu_0 NI}{\ell} r^2\pi$. Innen kiolvashatjuk a kölcsönös indukciós együttható értékét:

$$M = \frac{\mu_0 N}{\ell} r^2\pi.$$

A gyűrű fluxusa nem változik meg, ha a szolenoid áramát nulláról I-re növeljük, így $\Phi_{\text{gyűrű}} = 0$, ahonnan a gyűrűben folyó áram értéke

$$i = -\frac{MI}{L}.$$

A szolenoidon áthaladó mágneses fluxus értéke:

$$\Phi_{\text{szolenoid}} = L_0 \cdot I + M \cdot i,$$

ahol L_0 a szolenoid öninduktivitása. Behelyettesítve a gyűrű áramát, a következőt kapjuk:

$$\Phi_{\text{szolenoid}} = \left(L_0 - \frac{M^2}{L}\right) I.$$

Láthatjuk, hogy a szolenoidon áthaladó mágneses fluxus arányos a szolenoid áramával. Az arányossági tényező a szupravezető gyűrűt tartalmazó szolenoid induktivitása, mely

$$\Delta L_0 \equiv \frac{M^2}{L} = \frac{\mu_0^2 N^2 r^4 \pi^2}{\ell^2 L}$$

értékkel kisebb, mint a gyűrű nélküli szolenoid öninduktivitása.

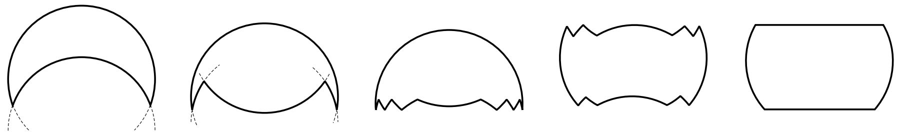
Ugyanezt az eredményt kaptuk volna, ha a számolás során nem tételezzük fel, hogy kezdetben a szupravezető gyűrűben nulla áram folyik. A leírt levezetés kis módosítással használható a szupravezető tetszőleges előélete esetén is. Ekkor i, $\Phi_{\text{gyűrű}}$ és $\Phi_{\text{szolenoid}}$ azt adja meg, hogy mennyivel változott meg a gyűrű árama, valamint a gyűrűn és a szolenoidon áthaladó mágneses fluxus értéke, miközben a tekercs áramát nulláról I-re növeltük.

3. feladat. *Egy felfújható strandlabda könnyű, vékony, igen hajlékony, de nem nyújtható műanyagból készült. Felfújt állapotában a labda majdnem pontosan gömb alakú, sugara* 20 cm. *Egy kísérletben a labdát űrtartalmának feléig felfújjuk levegővel, majd egy vízszintesen tartott, nagy kiterjedésű síklap segítségével fokozatosan víz alá nyomjuk, míg az teljesen el nem merül a vízben. Vázoljuk fel, milyen alakot vesz fel a víz alá nyomott labda! Ha tudjuk, határozzuk meg az alak releváns méreteinek számszerű értékeit is!*

(*Vigh Máté*)

Megoldás. A feladat szövege szerint a labda anyaga „igen hajlékony, de nem nyújtható”. Ezért az egyetlen lehetséges módszer a labda térfogatának csökkentésére, ha a labdát „behorpasztjuk” (*első* rajz a *2. ábrán*), ekkor a felület két (ugyanolyan r sugarú) gömbfelületdarabból áll. A behorpadt gömbfelületen azonban újabb horpadás is lehetséges – ezúttal kifele –, ahogy az ábra *második rajzán* látszik. Ezt tetszőleges számban megismételhetjük, így akár közel síklapot is kialakíthatunk, amely azonban a valóságban egy kicsit „ráncos”, vékony, ki-behajló gömbfelszíndarabokból áll (*középső rajz*).

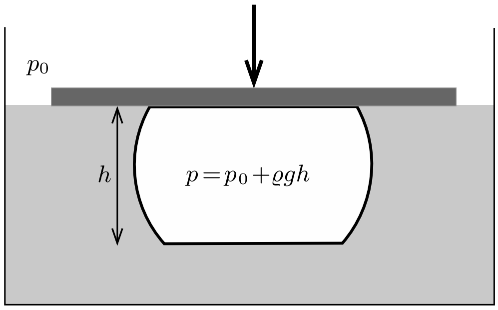
Látni fogjuk, hogy fizikai feltételek miatt a labda alsó és felső része is így fog deformálódni (*negyedik rajz*). A „ráncokat” (amelyek elvileg tetszőlegesen finomak lehetnek, de egy valódi kísérletben azért látszanak) már nem ábrázolva egy gömbövet kapunk (*utolsó rajz* a 2. ábrán).



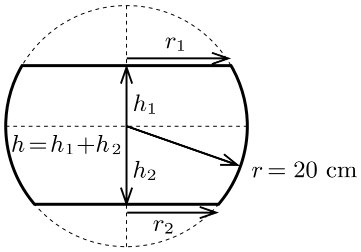
2. ábra

Eddig csak a geometria által lehetséges deformációkról beszéltünk. Ezután meg kell vizsgálnunk, hogy az adott kísérletben a fizikai feltételek következtében milyen alak jön létre. A labda tetejét a síklap nyomja le a víz alá, így ott a labda rásimul a felületre. Érdekesebb kérdés a labda aljának alakja: mivel a labda „igen hajlékony”, a gyűrt felületen olyan alakot vesz fel, hogy a belső és a külső nyomás mindenhol azonos legyen. A labdán belül mindenhol azonos a légnyomás (a levegő csekély aerosztatikus nyomását elhanyagoljuk), a víz nyomása viszont a mélységgel változik ($p = p_0 + \varrho g h$), így a labda aljának is vízszintes síklapnak kell lennie (*3. ábra*).

A labda alakja tehát egy vízszintes síklapokkal határolt *gömböv.*



3. ábra



4. ábra

A feladat második részében meg kell határoznunk a gömböv méreteit. A jelölések a *4. ábrán* láthatók.

Vizsgáljuk először a geometriai feltételt: a gömböv térfogata a gömb térfogatának fele. (A gömböv térfogata képletgyűjteményekből kikereshető, vagy integrálással könnyen kiszámítható.)

$$\pi r^2(h_1+h_2)-\frac{\pi}{3}(h_1^3+h_2^3)=\frac{2\pi}{3}r^3.$$

A numerikus megoldáshoz érdemes bevezetni az $x_1=\frac{h_1}{r}$ és $x_2=\frac{h_2}{r}$ dimenziótlan változókat, így áttekinthetőbbé válik az egyenlet.

$$x_1^3+x_2^3-3(x_1+x_2)+2=0. \tag{3}$$

Ez egy kétismeretlenes (harmadfokú) egyenlet. A másik egyenletet a fizikai feltétel matematikai megfogalmazásával kapjuk meg. Erre két lehetséges utat mutatunk meg.

I. megoldás. Az erőegyensúly alapján: a lapra kifejtett nyomóerő megegyezik a labdára ható felhajtóerővel.

$$(p-p_0)r_1^2\pi=\frac{2r^3\pi}{3}\varrho g,$$

ahol p a labdában lévő nyomás, p_0 a külső légnyomás, r_1 a gömböv felső lapjának sugara, ϱ pedig a víz sűrűsége.

Ahogy a *3. ábrán* is látható, a labda belsejében a levegő nyomása a külső légnyomás és a h magasságú vízoszlop hidrosztatikai nyomásának összegével egyenlő:

$$p=p_0+\varrho gh=p_0+\varrho g(h_1+h_2).$$

Ezt beírva az előző egyenletbe, és kihasználva, hogy $r_1^2=r^2-h_1^2$, megkapjuk a fizikai feltételt:

$$\varrho g(h_1+h_2)\big(r^2-h_1^2\big)\pi=\frac{2r^3\pi}{3}\varrho g,$$

amelyet a korábban bevezetett dimenziótlan változókkal ismét áttekinthetőbb alakra hozhatunk:

$$(x_1 + x_2)\big(1 - x_1^2\big) = \frac{2}{3}. \tag{4}$$

Ezután a kétismeretlenes (3)–(4) egyenletrendszert kell megoldanunk.

Az egyenletrendszert legegyszerűbb numerikusan, „próbálgatással" megoldani. x_1 és x_2 értéke 0 és 1 között lehet, értéküket durván megbecsülve behelyettesíthetjük az egyenletekbe, majd az értékeket úgy finomítjuk, hogy az egyenletek minél inkább teljesüljenek. Az egyenletrendszer megoldása (itt 3 értékes jegyre, de természetesen a versenyen kevésbé pontos megoldás is elég lett volna) és az összenyomott labda 4. ábrán látható geometriai paraméterei:

$$x_1 = 0{,}235, \quad x_2 = 0{,}470,$$

$$h_1 = 4{,}7\ \mathrm{cm}, \quad h_2 = 9{,}4\ \mathrm{cm},$$

$$h = h_1 + h_2 = 14{,}1\ \mathrm{cm},$$

$$r_1 = 19{,}4\ \mathrm{cm}, \quad r_2 = 17{,}6\ \mathrm{cm}.$$

II. megoldás. Energetikai megfontolás alapján: a kiszorított víz tömegközéppontja a lehető legmagasabban legyen.

A gömböv tömegközéppontjának távolsága a laptól (a gömböv tömegközéppontjának helye képletgyűjteményekből kikereshető, vagy integrálással könnyen meghatározható):

$$d = \frac{3\big(h_2^2 - h_1^2\big)}{4r} - \frac{3\big(h_2^4 - h_1^4\big)}{8r^3},$$

a korábbi módon dimenziótlanítva

$$\delta = \frac{d}{r} = \frac{3\big(x_2^2 - x_1^2\big)}{4} - \frac{3\big(x_2^4 - x_1^4\big)}{8}.$$

Ezután δ minimumát keressük, figyelembe véve a korábban felírt

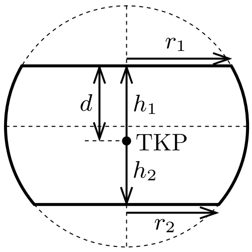
$$x_1^3 + x_2^3 - 3(x_1 + x_2) + 2 = 0$$

geometriai feltételt is.

Legegyszerűbben ismét „próbálgatással" oldhatjuk meg a feladatot. Eszerint

$$\delta_{\min} = 0{,}343, \quad \text{ha} \quad x_1 = 0{,}235 \quad \text{és} \quad x_2 = 0{,}470,$$

az előző megoldással összhangban.



5. ábra

A tömegközéppont minimális távolsága a laptól $d_{\min} = r\delta_{\min} = 6{,}9$ cm.

Megjegyzés. Több versenyző is észrevette, hogy a feladat ekvivalens azzal, hogy a labdát félig megtöltjük *vízzel,* és egy sima, vízszintes felületre helyezzük. Ilyenkor értelemszerűen a víz tömegközéppontjának a lehető legalacsonyabban kell lennie.

❄

Az ünnepélyes eredményhirdetésre és díjkiosztásra 2021. november 26-án délután került sor az ELTE TTK Eötvös-termében. Meghívást kaptak az 50 és 25 évvel ezelőtti Eötvös-verseny nyertesei is. A 25 évvel ezelőtti díjazottak közül *Tóth Gábor Zsolt* jött el – ő pár mondatban beszélt a pályafutásáról.

Ezután következett a 2021. évi verseny feladatainak és megoldásainak bemutatása. Az 1. feladat megoldását *Gnädig Péter,* a 2. feladatét *Széchenyi Gábor,* a 3. feladatét *Vankó Péter* ismertette.

Az esemény végén került sor az eredményhirdetésre. A díjakat *Ormos Pál,* az Eötvös Loránd Fizikai Társulat elnöke adta át.

Egyetlen versenyző sem oldotta meg mindhárom feladatot, így a versenybizottság nem adott ki első díjat.

Az első feladat helyes megoldásáért, valamint a második és harmadik feladatban elért lényeges eredményekért *második díjat* nyert **Tóth Ábel,** az ELTE fizika BSc szakos hallgatója, aki a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnáziumban érettségizett *Schramek Anikó* tanítványaként.

Az első feladat helyes, vagy lényegében helyes megoldásáért, valamint a második vagy a harmadik feladatban elért lényeges eredményekért *harmadik díjat* nyert **Kertész Balázs Zoltán,** a Debreceni Református Kollégium Dóczy Gimnáziumának 12. osztályos tanulója, *Tófalusi Péter* tanítványa; **Szépvölgyi Gergely,** a Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Székely György* és *Rakovszky Andorás* tanítványa, valamint **Takács Bendegúz,** a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Nagy Piroska Mária* és *Csefkó Zoltán* tanítványa.

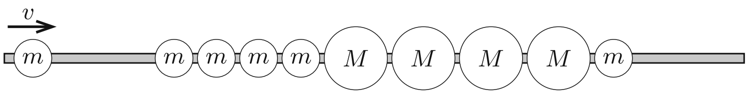
Az első feladat helyes, vagy lényegében helyes megoldásáért, valamint a második feladatban elért részeredményekért *dicséretet* kapott **Bonifert Balázs,** az ELTE fizika BSc szakos hallgatója, aki a Baár-Madas Református Gimnázium, Általános Iskola és Diákotthonban érettségizett *Horváth Norbert* tanítványaként; **Csordás Kevin,** a Bajai III. Béla Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Lakner Attila* és *Pálfalvi László* tanítványa; **Dékány Csaba,** a győri Révai Miklós Gimnázium és Kollégium 12. osztályos tanulója, *Juhász Zoltán* tanítványa; **Fonyi Máté Sándor,** a BME fizika BSc szakos hallgatója, aki a szolnoki Verseghy Ferenc Gimnáziumban érettségizett *Veres Dénes* tanítványaként; **Gurzó József,** a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Nagy Piroska Mária* tanítványa, valamint **Toronyi András,** a Baár-Madas Református Gimnázium, Általános Iskola és Diákotthon 12. osztályos tanulója, *Horváth Norbert* tanítványa.

A második díjjal *Zimányi Gergely* adományából 60 ezer, a harmadik díjjal 40 ezer, a dicsérettel 25 ezer forint pénzjutalom járt. A díjazottak tanárai a *Hazalátogatott Wigner Jenő,* illetve az *Az Eötvös kísérlet történelmi keretben* című könyveket kapták az Eötvös Loránd Fizikai Társulat ajándékaként. Köszönjük az adományozók önzetlen támogatását!

Gnädig Péter, Széchenyi Gábor, Vankó Péter, Vigh Máté

Fizika gyakorlat megoldása

G. 759. *Egy vízszintes, súrlódásmentes, rögzített pálcára felfűzve négy darab m tömegű, négy darab M tömegű ($m<M$), majd ismét egy m tömegű, tökéletesen rugalmas golyó áll közel egymáshoz az* ábrán *látható elrendezésben. Balról egy m tömegű, szintén tökéletesen rugalmas golyó érkezik v sebességgel, és ütközik a golyósor első tagjával.*



A további ütközések lezajlása után mely golyók maradnak nyugalomban, és a többiek milyen irányban fognak mozogni?

(*4 pont*)

Megoldás. A megoldásban a pálca menti sebességeket előjelesen értjük, és a jobbra haladó testek sebességét tekintjük pozitívnak. Minden rugalmas ütközésnél teljesül a lendületmegmaradás és az energiamegmaradás törvénye. Ezek szerint ha egy m_1 tömegű test v sebességgel ütközik egy m_2 tömegű álló testtel, akkor az ütközés utáni v_1 és v_2 sebességekre fennáll, hogy

$$m_1v=m_1v_1+m_2v_2, \qquad \text{valamint} \qquad m_1v^2=m_1v_1^2+m_2v_2^2.$$

Ennek az egyenletrendszernek 2 megoldása van:

$$v_1=v, \qquad v_2=0,$$

valamint

$$v_1=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v, \qquad v_2=\frac{2m_1}{m_1+m_2}v.$$

Az első megoldás fizikailag elfogadhatatlan (ekkor az első golyó ütközés nélkül menne át a másodikon), ezért a második adja meg helyesen az ütközés utáni sebességeket.

Esetünkben háromféle ütközés képzelhető el, és mindegyik meg is történik.

1. Amikor az érkező golyó vele azonos tömegű golyóval ütközik, vagyis $m_1 = m_2$, akkor $v_1 = 0$ és $v_2 = v$. Tehát ha két azonos tömegű golyó ütközik, azok sebességet cserélnek. A folyamat első 4 ütközése ilyen lesz.

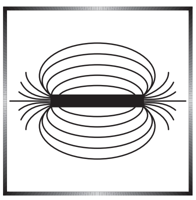
2. Ha a kisebb (m) tömegű golyó ütközik egy nagyobb (M) tömegűvel, akkor ($v > 0$ esetén) v_1 negatív lesz, tehát a kisebb tömegű golyó balra fog visszapattanni, a nagyobb tömegű golyó pedig az ütközés után jobbra halad, hiszen annak pozitív lesz a sebessége. A balra haladó kis golyó (az 1. esetnek megfelelően) sorra sebességet cserél a tőle balra lévő golyókkal, ezért a bal oldali legszélső golyó végül balra fog mozogni, a többi kis golyó pedig megáll. Ha két, egyenként M tömegű golyó ütközik, akkor azok is csak sebességet cserélnek (1. eset).

3. Amikor a jobb oldali utolsó nagy golyó ütközik a sor végén álló kis golyóval, akkor $m_1 = M$ és $m_2 = m$, tehát $m_1 > m_2$. Ebben az esetben v_1 is és v_2 is pozitív lesz, azaz mindkét golyó jobbra fog mozogni az ütközés után, és természetesen $v_1 < v_2$ is teljesül.

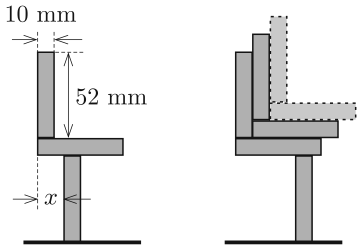
Az ütközéssorozat után a bal oldali legszélső (m tömegű) golyó *balra,* a sor jobb oldali szélén lévő (M és m tömegű) két golyó *jobbra* fog mozogni, a többi golyó pedig *egyhelyben marad.*

Beke Botond (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 9. évf.)

34 dolgozat érkezett. Helyes 16 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 3, hiányos (1 pont) 7, hibás 7, nem versenyszerű 1 dolgozat.



Fizika feladatok megoldása



P. 5338. *A bal oldali ábrán látható módon egy dominópárt helyezünk el egy harmadikon.*

a) Határozzuk meg x lehetséges értékeit, hogy a dominók egyensúlyban legyenek.

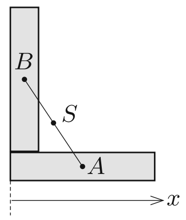
b) Ezt követően további dominópárokat helyezünk el a jobb oldali ábrának *megfelelően. Legfeljebb hány dominót helyezhetünk el a legalsóra, hogy az egyensúlyi állapot fennmaradjon?*

(*5 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

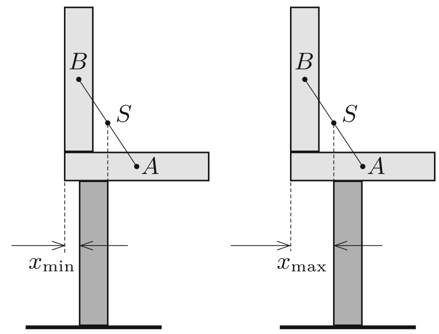
Megoldás. *a*) Az alátámasztás bal oldalán kilógó rész x hosszát úgy kell megválasztanunk, hogy a dominópár tömegközéppontja a függőleges „tartóhasáb" fölé essen. A két felső dominó S tömegközéppontjának elegendő a „vízszintes" x_S koordinátáját kiszámítanunk, hiszen a stabilitás feltételében csak ez szerepel. A dominókat egyforma, homogén tömegeloszlású hasáboknak tekintjük. Az *1. ábráról* leolvasható, hogy $x_A = \frac{52}{2} = 26$, $x_B = \frac{10}{2} = 5$ és

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} = 15{,}5 \text{ mm}.$$

A távolságokat milliméter egységekben mérjük, és ezt a dimenziót a továbbiakban nem jelezzük.



1. ábra

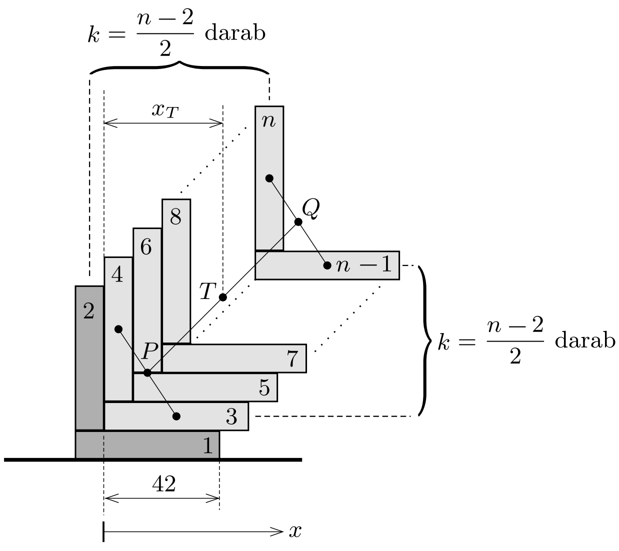


2. ábra

A *2. ábrán* látszik, hogy $x_{\min} = x_S - 10 = 5{,}5$ és $x_{\max} = x_S = 15{,}5$. A dominópár egyensúlyának feltétele ezek szerint:

$$5{,}5 \leqslant x \leqslant 15{,}5.$$

(A két szélső helyzet labilis (instabil) egyensúlynak felel meg.)



3. ábra

b) Helyezzük el először a dominópárokat a vízszintes asztallapra a *3. ábrán* látható módon. Ha a dominók n száma meghalad egy $n_{\max}$ értéket, akkor a $3, 4, 5, 6, \ldots, n-1, n$ jelzésű (halványszürke) dominókból álló építmény lebillen, elfordul az 1 jelű dominó jobb felső éle körül. Ez mindaddig nem következik be, ameddig az építmény tömegközéppontjának x_T koordinátája nem haladja meg az alátámasztó felület 42 milliméteres hosszát. (Az x koordinátákat most a 4-es jelű dominó bal oldali lapjától mérjük.)

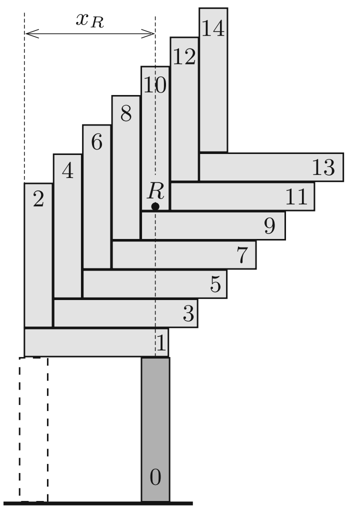
A 3–4 dominópár tömegközéppontja – mint láttuk – az $x_P = 15{,}5$ adattal adható meg. A további dominópárok tömegközéppontja vízszintesen 10-10 milliméterrel tolódik el jobbra, tehát az $(n-1)$-edik és az n-edik dominóra

$$x_Q = x_P + (k-1)\cdot 10 = 5{,}5 + 10\,k,$$

ahol $k = \frac{n-2}{2}$ a halványszürke dominópárok száma. A stabilitás szempontjából fontos T tömegközéppontra fennáll, hogy

$$x_T = \frac{x_P + x_Q}{2} = 10{,}5 + 5k = 5{,}5 + 2{,}5\,n.$$

Az $x_T \leqslant 42$ feltétel akkor teljesül, ha $n \leqslant 14{,}6$, vagyis a természetes számok körében $n \leqslant 14$. A vízszintes asztalon tehát legfeljebb 14 dominót (7 párat) helyezhetünk el úgy, hogy stabil egyensúlyban legyenek. (Amennyiben még egy további vízszintes dominót rakunk fel, a tömegközéppont 2 mm-rel túlnyúlik a megengedett határon. Könnyen belátható, hogy ha az építmény nem billen le a legalsó dominóról, akkor máshol sem billenhet le.)



4. ábra

Vajon ráállítható-e (ráemelhető-e) ez a 14 dominó egyetlen, a legkisebb lapján álló (0-val jelölt) dominóra? Ez akkor tehető meg, ha a 14 dominóból álló rendszer R tömegközéppontja nincs messzebb az 1-es jelű dominó bal oldali lapjától, mint a dominó 52 milliméteres hossza. A fenti képletekből kiszámíthatjuk, hogy $x_R = 45{,}5 < 52$, tehát a *4. ábrán* látható állapot megvalósítható.

Megjegyzés. Amennyiben a 14 dominót nem az asztalon rakjuk egymásra, hanem a 0-val jelölt elemre egyesével pakoljuk rá a többi dominót, akkor az építkezés közben – átmenetileg – stabilizálnunk kell az ingatag szerkezetet. Ezt például a 4. ábrán látható, szaggatott vonallal jelölt dominóval oldhatjuk meg. Az „állványt” az építmény elkészülte után óvatosan eltávolíthatjuk.

Szabó Márton (Szeghalom, Péter András Gimn. és Kollégium, 11. évf.) dolgozata alapján

55 dolgozat érkezett. Helyes Szabó Márton megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 14, hiányos (1–3 pont) 34, hibás 6 dolgozat.

P. 5354. *Motoros játékvonat halad R sugarú, kör alakú pályán, állandó nagyságú v sebességgel. A kör középpontjától $d<R$ távolságra egy állandó, f_0 frekvenciájú hangot kibocsátó, pontszerű hangforrás helyezkedik el. A vonatra egy mikrofont rögzítünk. Milyen határok között változik a mikrofon által észlelt hang frekvenciája? (A hang sebessége c.)*

(*6 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Biatorbágy

I. megoldás. Legyen a vonat kör alakú pályájának középpontja O, a rögzített hangforrás helye F, a vonat pillanatnyi helye pedig a körpálya P pontja (lásd az *1. ábrát*). Álló, f_0 frekvenciájú hangot kibocsátó hangforrás hangját egy mozgó megfigyelő (esetünkben a mikrofon) a Doppler-effektus szerint

$$f=f_0\left(1+\frac{u}{c}\right)$$

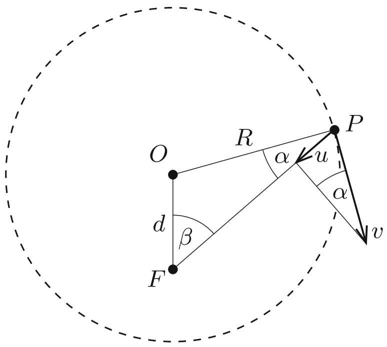
frekvenciájúnak észleli, ahol u az észlelő sebességének a *hangforrás irányába* mutató komponense.

A hangforrás helyét pl. az ábrán látható β szöggel adhatjuk meg. Bontsuk fel a mikrofon v nagyságú sebességvektorát egy PF-fel párhuzamos és egy arra merőleges komponensre. A párhuzamos összetevőt jelöljük u-val. A hangforrás és a mikrofon távolsága $u=v\sin\alpha$ sebességgel *csökken,* ahol α az OPF szög. A legnagyobb észlelt frekvencia u legnagyobb értékének, vagyis α legnagyobb értékének felel meg. Mivel az OPF háromszögre felírható szinusztétel szerint

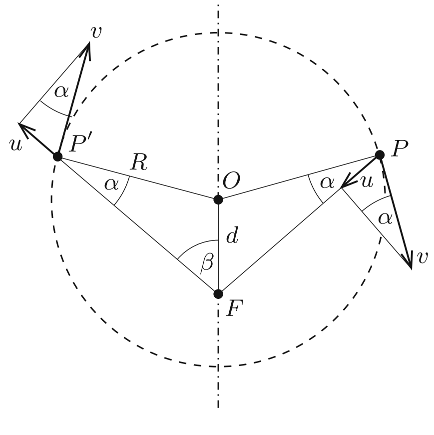
$$\sin\alpha=\frac{d}{R}\sin\beta,$$

ez a maximumát $\sin\beta=1$, vagyis $\beta=90°$-nál veszi fel. Ezek szerint $(\sin\alpha)_{\max}=\frac{d}{R}$, $u_{\max}=\frac{d}{R}v$, tehát a mikrofon által észlelt legnagyobb frekvencia

$$f_{\max}=f_0\left(1+\frac{v}{c}\,\frac{d}{R}\right).$$



1. ábra



2. ábra

Hasonló módon kapjuk a hangforrástól távolodó mikrofon által észlelt frekvenciacsökkenést is. Ha tükrözzük a P pontot az OF egyenesre, az F és P' pontok *távolodásának* sebessége ugyanakkora lesz, mint F és P *közeledésének* sebessége volt (*2. ábra*). Mivel u legnagyobb értéke $\frac{d}{R}v$, az észlelt frekvencia legkisebb értéke:

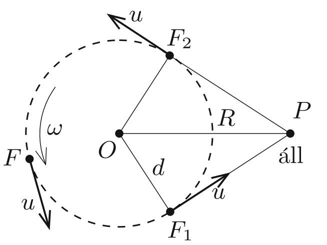
$$f_{\min} = f_0\left(1 - \frac{v}{c}\,\frac{d}{R}\right).$$

Köpenczei Csanád (Bonyhád, Petőfi S. Ev. Gimn. és Koll., 11. évf.) és *Yokota Adan* (Gödöllői Török Ignác Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

II. megoldás. A hangmagasság változását a Doppler-effektussal magyarázzuk. Eszerint az f_0 frekvenciájú, a levegőhöz képest álló hangforrás frekvenciáját egy, a hangforráshoz u sebességgel közeledő (vagy távolodó) mikrofon

$$f = f_0\left(1 \pm \frac{u}{c}\right)$$

nagyságúnak rögzíti. A feladatunk tehát u legnagyobb értékének meghatározása.



3. ábra

Két test távolsága nem függ attól, hogy milyen koordináta-rendszerben számítjuk ki azt. Válasszuk azt a koordináta-rendszert, amelynek origója a körpálya O középpontjában van, és $\omega = \frac{v}{R}$ szögsebességgel forog az O pont körül a vonat körmozgásával megegyező irányban. A játékvonat – ebben a forgó vonatkoztatási rendszerben – mindig ugyanazon a helyen áll, a hangforrás pedig egy d sugarú körpályán $u = d\omega = \frac{vd}{R}$ sebességgel egyenletesen mozog (*3. ábra*).

A vonat és a hangforrás távolsága akkor változik a leggyorsabban, amikor a hangforrás éppen az F_1 pontban van, ahol a sebessége az álló vonat irányába mutat, vagy az F_2 pontban, ahol a sebessége a vonattal ellentétes irányú. Ilyenkor F és P közeledésének, illetve távolodásának sebessége u, a megváltozott frekvencia legnagyobb és legkisebb értéke tehát

$$f_{\max} = f_0\left(1 + \frac{vd}{Rc}\right), \qquad \text{illetve} \qquad f_{\min} = f_0\left(1 - \frac{vd}{Rc}\right).$$

Megjegyzés. A forgó koordináta-rendszerben a hangforrás mozog, az észlelő (mikrofon) pedig áll. Ennek ellenére a Doppler-effektusnak nem az $f = f_0\frac{c}{c-u}$ képletét alkalmaztuk, hanem az álló hangforrásra vonatkozó $f = f_0\frac{c+u}{c}$ összefüggéssel számoltunk. Ezt azért tehettük meg, mert a forgó vonatkoztatási rendszerben a levegő is mozog (forog), és a Doppler-effektusnál mindig a közeghez viszonyított sebességek számítanak.

(G. P.)

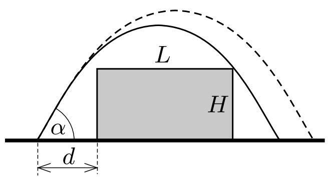
28 dolgozat érkezett. Helyes 14 megoldás. Kicsit hiányos (4–5 pont) 9, hiányos (1–3 pont) 3, hibás 1, nem versenyszerű 1 dolgozat.

P. 5356. *Vízszintes talajon fekszik egy téglalap keresztmetszetű gerenda. A téglalap vízszintes oldala L, függőleges oldala H hosszúságú. Elhanyagolva a közegellenállást, honnan és hogyan kell elugrania egy szöcskének, hogy a lehető legkisebb energiaráfordítással sikerüljön átugrania ezt a gerendát? Hol lesz az ugrási parabola fókuszpontja ebben az esetben?*

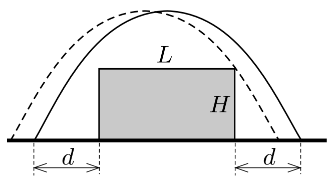
(*5 pont*) *Radnai Gyula* (1939–2021) feladata

Megoldás. A szöcske az elugrása után parabolapályán fog mozogni. Ez a parabola nyilván a gerenda leghosszabb oldalélére merőleges síkban fekszik, elegendő tehát ezt a síkot vizsgálni. (Ha a szöcskének lenne „hosszanti" irányú sebessége, akkor ennek nullára csökkentésével csökkenthetné az energiaráfordítást.)

Ha a szöcske pályagörbéje a gerenda felső éleitől véges távolságra haladna, akkor az elugrás helyének és irányának változatlanul tartása mellett kisebb kezdősebesség (kisebb energiaráfordítás) is elegendő lenne (*1. ábra*). A szaggatott vonallal jelölt parabolapályánál kedvezőbb a folytonos vonallal jelölt pályához tartozó mozgás. A pályagörbének tehát legalább az egyik felső élet „érintenie" kell, annak közvetlen közelében kell elhaladnia. Ha ugyanekkor nem érintené a gerenda másik felső élét, akkor (a kezdősebességet és az elugrás szögét változatlannak tartva) az elugrás helyének megváltoztatásával olyan parabolához juthatnánk, amelyik a gerenda felett, attól véges távolságban halad, tehát ez sem lehet a legkedvezőbb elrendezés (*2. ábra*).



1. ábra



2. ábra

Optimális esetben a parabola szimmetriatengelye a gerenda téglalap alakú keresztmetszetének függőleges középvonalánál található, és a parabola illeszkedik a téglalap mindkét felső csúcsára. A *3. ábra* jelöléseit használva felírhatjuk, hogy

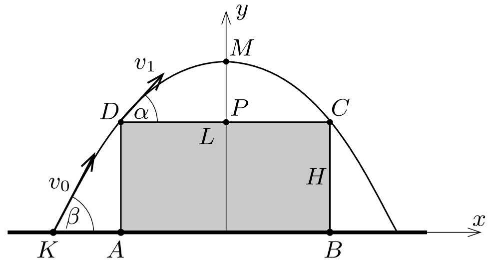
$$v_1 t \cos\alpha = \frac{L}{2}, \qquad \text{valamint} \qquad v_1 \sin\alpha = gt,$$

ahol t azt az időt jelöli, amennyi alatt a szöcske a D pontból a pályagörbe legmagasabb (M-mel jelölt) pontjába kerül. Ebből a két egyenletből t kiküszöbölése után kapjuk, hogy

$$v_1^2 = \frac{gL}{\sin(2\alpha)}.$$

Írjuk fel most az energiamegmaradás törvényét a K és D pontok közötti mozgásra:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgH,$$



3. ábra

vagyis

$$v_0^2 = 2gH + v_1^2 = 2gH + \frac{gL}{\sin(2\alpha)}.$$

Innen leolvashatjuk, hogy v_0 akkor minimális (akkor legkisebb a szöcske energiaráfordítása az elugráskor), amikor $\sin(2\alpha) = 1$, vagyis $\alpha = 45°$.

Határozzuk meg a parabola

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

alakban keresett egyenletét a 3. ábrán látható koordináta-rendszerben. Mivel a $C = \left(\frac{L}{2}, H\right)$ és a $D = \left(-\frac{L}{2}, H\right)$ pontok rajta vannak a parabolán, teljesül, hogy

$$H = a\left(\frac{L}{2}\right)^2 + b\frac{L}{2} + c, \quad \text{illetve} \quad H = a\left(-\frac{L}{2}\right)^2 - b\frac{L}{2} + c.$$

Ezekből következik, hogy $b = 0$ és $c = H - a\frac{L^2}{4}$, vagyis a parabola egyenlete:

$$f(x) = a\left(x^2 - \frac{L^2}{4}\right) + H.$$

Láttuk, hogy a parabola meredeksége a D pontban $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 45° = 1$. A parabola ismert tulajdonsága szerint ez a meredekség éppen kétszerese a DM szelő meredekségének:

$$1 = 2\frac{-aL^2/4}{L/2}, \qquad \text{ahonnan} \qquad a = -\frac{1}{L},$$

tehát a pályagörbe egyenlete:

$$f(x) = H + \frac{L}{4} - \frac{x^2}{L}.$$

Megjegyzés. Ugyanezt az összefüggést differenciálszámítással is megkaphatjuk. $f'(x) = 2ax$, ami az $x_D = -L/2$ helyen $-2aL/2 = 1$, vagyis $a = -1/L$.

A szöcske elugrásának $x_K<0$ koordinátáját az $f(x_K)=0$ feltételből kapjuk meg:

$$x_K=-\sqrt{HL+\frac{L^2}{4}}\,,$$

vagyis az elugrási hely és a gerenda szélének KA távolsága

$$d=\sqrt{HL+\frac{L^2}{4}}-\frac{L}{2}.$$

Az elugrás szögét a vízszintes irányú sebesség állandóságát kifejező $v_0\cos\beta=$ $=v_1\cos 45^\circ$ összefüggésből kaphatjuk meg:

$$\cos\beta=\frac{v_1}{\sqrt{2}\,v_0}=\sqrt{\frac{L}{2(L+2H)}},$$

amit így is kifejezhetünk:

$$\operatorname{tg}\beta=\sqrt{1+\frac{4H}{L}}\,.$$

Megjegyzés. Ezt az összefüggést differenciálszámítással is megkaphatjuk. Az $f(x)$ függvény deriváltja az $x_K=-\sqrt{HL+(L^2/4)}$ helyen:

$$\operatorname{tg}\beta=f'(x_K)=-2ax_K=\sqrt{1+\frac{4H}{L}}.$$

Hátra van még a legkisebb energiaráfordításhoz tartozó parabolapálya fókuszpontjának meghatározása. A szimmetria miatt ez a pont a gerenda MP szimmetriatengelyén, vagyis az y tengelyen található. Egy optikai analógia segítségével könnyen beláthatjuk, hogy a fókuszpont éppen a DC szakasz felezőpontja, vagyis a gerenda felső lapjának P pontja. Képzeljük el, hogy a szöcske pályagörbéje egy parabolatükörnek (forgásparaboloidnak) a szimmetriatengelyére illeszkedő síkkal való metszete. Ha erre a tükörre az AD egyenes mentén haladó fénysugár esik, az ($\alpha=45^\circ$ miatt) vízszintesen halad tovább. Másrészt a tükör szimmetriatengelyével párhuzamos fénysugarak a fókuszpont irányába verődnek vissza, a fókuszpont tehát csakis a P pont lehet. (Ennél a megfontolásnál hallgatólagosan felhasználtuk azt a tényt is, hogy a parabola *geometriai* értelemben vett fókuszpontja és a parabolatükör *fizikai* értelemben vett fókuszpontja egybeesik.)

Gábriel Tamás (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) és
Seprődi Barnabás Bendegúz (Budapest, Óbudai Árpád Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

43 dolgozat érkezett. Helyes 13 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 6, hiányos (1–3 pont) 18, hibás 6 dolgozat.

Felhívás a Kunfalvi Rezső Olimpiai Válogatóversenyre

A Nemzetközi Fizikai Diákolimpián (IPhO) és az Európai Fizikai Diákolimpián (EuPhO) szereplő magyar csapat tagjait minden évben a Kunfalvi Rezső Olimpiai Válogatóverseny keretében választjuk ki a budapesti és vidéki diákolimpiai szakkörökre járó diákok közül. A járványhelyzet miatt a Kunfalvi-verseny első (elméleti) fordulóját idén is online szervezzük meg.

A verseny teljesen nyitott: részt vehet bárki, aki jelenleg középiskolai tanuló. A feladatsor **2022. március 21-én (hétfőn), 15:00 órától** lesz elérhető a `http://ipho.elte.hu` honlap főoldalán. A versenyre előzetesen jelentkezni nem kell, elég a feladatsoron található szabályzatnak megfelelően elkészíteni a dolgozatot, és annak szkennelt változatát legkésőbb március 21. 18:30-ig elküldeni az `iphoteamhun@gmail.com` címre.

A feladatok tematikája azonos az IPhO hivatalos tematikájával[1]. A versenyen zsebszámológépen kívül semmilyen segédeszköz sem használható (tehát függvénytáblázat, könyvek, füzetek és internet se). Felkészüléshez javasoljuk a korábbi évek feladatsorait és a budapesti szakkör YouTube-csatornáján (IPhO Hungary) található videókat.

A versenybizottság

Fizikából kitűzött feladatok

M. 411. Mérjük meg egy üres sörösüvegnek a szimmetriatengelyére vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát! A mérés pontosítása érdekében végezzük el a mérést legalább kétféle módon! Hasonlítsuk össze az alkalmazott módszerek pontosságát!

(*6 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

G. 769. Vízszintes úton egyenletesen haladó autó fogyasztásmérője 5 liter/100 km értéket mutat. Ha ugyanez az autó ugyanezen az úton gyorsulva mozog, akkor a fogyasztásmérő 10 liter/100 km-t mutat abban a pillanatban, amikor a kocsi eléri az egyenletes haladás sebességét. Ha az autó ugyanekkora sebességgel egy emelkedőn halad, akkor a fogyasztása 12 liter/100 km. Mit mutat a fogyasztásmérő, ha az autó ugyanezen az emelkedőn az előzőekben leírt gyorsulással mozog felfelé, és a sebessége is éppen megegyezik az előzőekben leírtakkal?

(*3 pont*)

[1]Lásd a `https://www.ipho-new.org/statutes-syllabus` weboldalt.

G. 770. A legelterjedtebb fűtési energiahordozó a földgáz. A gázszolgáltató a következő módszerrel határozza meg a havonta fizetendő díjat, amit a gázszámlán tüntet fel: az elfogyasztott gáz mennyiségét megszorozza egy úgynevezett korrekciós tényezővel, majd kiszámítja az így kapott gázmennyiség fűtőértékét MJ mértékegységben, és végül a fűtőérték szerint számítják ki a fizetendő összeget. Ehhez még hozzáadják a havi háztartási alapdíjat is. Keressünk egy nem túlságosan régi gázszámlát és villanyszámlát, és válaszoljunk az alábbi kérdésekre! (A válaszban mindig a bruttó értékeket tüntessük fel!)

a) Miért van szükség korrekciós tényezőre?

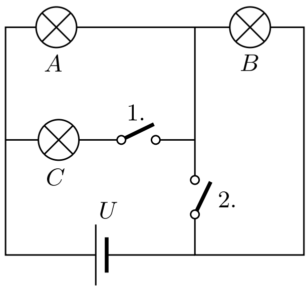
b) Mennyibe kerül 1 m^3 normál állapotú gáz?

c) Mennyibe kerül 1 MJ energia, ha gáz-, illetve ha elektromos energia formájában érkezik a lakásunkba?

(*4 pont*) *Tarján Imre emlékverseny nyomán,* Szolnok

G. 771. Az *ábrán* látható kapcsolásban a fogyasztók azonos R ellenállásúak, és U feszültség esetén a teljesítményük P.

Mekkora az egyes fogyasztók teljesítményfelvétele a kapcsolók nyitott (ny), illetve zárt (z) állásánál? Töltsük ki a táblázatot!



1.	2.	A	B	C
ny	ny			
ny	z			
z	ny			
z	z			

(*4 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

G. 772. A gyerekek körjátékot játszanak a mezőn. Szerencsétlen módon a kör közepén álló társuk darázsfészekbe lép, és a mérges darazsak szétrepülnek. A mezőn keleti irányból 4,5 m/s sebességű szél fúj, a gyerekek 6 m/s nagyságú sebességgel sugárirányban menekülnek. A tudósok vizsgálata szerint ezek a darazsak szélcsendben 8 m/s sebességgel tudnak repülni. Becsüljük meg, hogy a gyerekek hány százaléka menekül meg biztosan a darázscsípésektől! A válasz megadásához használhatunk akár vonalzót, körzőt és szögmérőt is.

(*4 pont*)

P. 5382. Egy régi szalagos magnetofon gyors áttekercseléskor a szedőorsót állandó fordulatszámmal forgatja. A két orsó belső átmérője 5 cm, a külső átmérőjük pedig 15 cm. A teljesen teli orsóról a magnószalag átcsévélési ideje 3 perc. A szalagot az üres orsóra tekercselik át. Indítástól számítva mennyi idő múlva lesz a két orsón éppen egyenlő hosszúságú magnószalag?

(*4 pont*) Közli: *Holics László*, Budapest

P. 5383. Mekkorának kellene lennie – változatlan tengelyforgás és átmérő mellett – a Föld tömegének ahhoz, hogy Budapesten ne lehessen parabolaantennával műholdas tévéadásokat fogni?

(*5 pont*) Közli: *Kis Tamás,* Heves

P. 5384. Egy vékony, homogén, függőleges pálca tetején kicsiny golyó helyezkedik el. A pálca tömegéhez képest a golyó tömege elhanyagolható, és a pálca súrlódásmentesnek tekinthető asztalon áll. A pálca egyszer csak eldől. Mikor csapódik a golyó nagyobb sebességgel az asztallapra, ha a pálca tetejére van ragasztva, vagy ha egyszerűen csak rátettük a pálcára, ahonnan nagyon könnyen lebillenhet?

(A merev testek forgómozgásáról rövid cikk olvasható a KöMaL honlapján.[1])

(*4 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

P. 5385. Hányadrészére csökken az ablakon kiszökő hőáram, ha az egyrétegű, $d_{\text{üveg}} = 3$ mm vastag üvegből készült ablakot ugyanilyen üvegtáblából készült, kétrétegű ablakra cseréljük, melynek üvegei között $d_{\text{levegő}} = 7$ mm-es levegőrés van? A levegő és az üveg hővezetési tényezője $\kappa_{\text{levegő}} = 0{,}025$ W/(m K) és $\kappa_{\text{üveg}} = 1{,}2$ W/(m K).

(*4 pont*) Példatári feladat nyomán

P. 5386. Egy $\alpha = 30°$-os lejtésű, $d = 2$ méter hosszú, szigetelő anyagból készült vályú aljához $Q = 5{,}55$ μC töltésű kis golyót rögzítünk. A vályú tetejéről $m = 100$ g tömegű, $q = 10$ μC töltésű kis golyót engedünk el. Milyen messzire jut el ez a golyó, ha tisztán gördül? (A mozgása során a golyó töltése nem változik meg.)

(*3 pont*) Közli: *Kobzos Ferenc,* Dunaújváros

P. 5387. Egy U_0 üresjárási feszültségű, R_{b} belső ellenállású telepre különböző R nagyságú külső ellenállásokat kapcsolunk.

a) Mekkora maximális „hasznos" (a külső ellenállásra jutó) teljesítményt nyújthat ez a telep? Milyen R esetén érhetjük el a legnagyobb $P_{\max}$ teljesítményt?

b) Mutassuk meg, hogy bármely, $P_{\max}$-nál kisebb P hasznos teljesítmény két különböző, $R_1 \neq R_2$ nagyságú külső ellenállás esetén is megvalósulhat. Mekkora az R_1 és R_2 számtani, illetve mértani középértéke?

c) Mekkora a fenti két esetben mérhető kapocsfeszültségek összege?

d) Mekkora az R_1, illetve R_2 ellenálláson folyó áramok összege?

e) Az energialeadás hatásfokát a hasznos teljesítmény és a telep által leadott összes teljesítmény hányadosaként értelmezzük. Mekkora a fenti két eset hatásfokának összege?

(*4 pont*) Közli: *Siposs András,* Budapest

P. 5388. Egy 15 mW-os lézer $\lambda = 632{,}8$ nm hullámhosszú, lineárisan polarizált fénye egy 2 mm átmérőjű körkörös apertúrán lép ki a lézer dobozából.

a) Mekkora az elektromos térerősség maximális értéke a lézernyalábban?

b) Mekkora az impulzusa a lézernyaláb 1 méter hosszú darabjának?

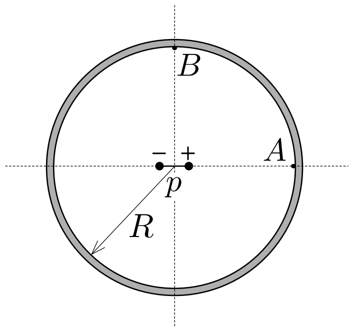
(*4 pont*) Példatári feladat nyomán

[1] `https://www.komal.hu/cikkek/cikklista.h.shtml`.

P. 5389. Egy (pontszerűnek tekinthető) légy repül állandó v sebességgel az f fókusztávolságú lencse optikai tengelyével párhuzamosan, attól d távolságra. Legalább mekkora nagyságú a légy és a légy képének relatív sebessége?

(*5 pont*) *Észtországi versenyfeladat* nyomán

P. 5390. Az *ábrán* látható R sugarú, vékony falú, töltetlen fémgömbhéj középpontjában egy kicsiny, p dipólmomentumú elektromos dipólus helyezkedik el. Határozzuk meg a gömbhéj belső felületén lévő A és B pontokban a felületi töltéssűrűséget! Adjuk meg a fémgömbhéj külső felületén lévő töltéssűrűséget is!



(*Útmutatás*: Alkalmazhatjuk a gömbi tükörtöltés módszerét. Hasznos lehet még a dipólus elektromos terének ismerete az ún. Gauss-féle főhelyzetekben.)

(*6 pont*) Közli: *Szász Krisztián,* Budapest

❄

Beküldési határidő: 2022. március 15.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 72. No. 2. February 2022)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 89): **K. 719.** Each integer on the number line is coloured either red or blue. Is it certain for all possible colourings that a) there will be two numbers of the same colour separated by a distance of 3; b) there will be two numbers of the same colour separated by a distance of 3 or 4? **K. 720.** Divide the area of a regular hexagon into three equal parts with two lines passing through the same vertex. **K. 721.** Alex made some wooden sticks of integer lengths such that no three of them could be used to form a triangle. Given that there were sticks of lengths 1 and 10 and that the longest stick was 100 units long, what is the maximum possible number of sticks that Alex may have made? **K/C. 722.** The arithmetic mean of two three-digit numbers equals the number obtained by writing them next to each other, separated by a decimal point. What may be the two numbers? **K/C. 723.** The Hungarian Handball Federation nominated 17 players for women's handball in the Tokyo Olympic Games: 3 goalkeepers, 1 right winger, 4 right backs, 2 playmakers, 3 pivots, 2 left backs and 2 left wingers. In how many different ways may the players line up for the anthem if players of the same position must stand together? (During the anthem, players line up next to each other in a single line.) (Proposed by *B. Róka* Budapest)

New exercises for practice – competition C (see page 90): **Exercises up to grade 10: K/C. 722.** See the text at Exercises **K. K/C. 723.** See the text at Exercises **K. Exercises**

for everyone: C. 1704. For which real numbers a will the minimum of the function $f(x)=4x^2-4ax+a^2-2a+2$ defined on the segment $[0;2]$ be equal to 3? (*MC&IC*) **C. 1705.** Given that a certain quadrilateral is a kite, it is cyclic and its sides are 42 and 56 units long, what is the distance between the centres of the inscribed and circumscribed circles? (Proposed by *A. Siposs,* Budapest) **C. 1706.** Prove that in every set of 2022 positive integers there exist two numbers such that their difference or sum is divisible by 4040. (Proposed by *L. Sáfár,* Ráckeve) **Exercises upwards of grade 11: C. 1707.** In a triangle ABC (with the usual notations) $b=6$, $a=2$ and they enclose an angle of $\gamma=120^\circ$. Find the exact length of the interior angle bisector of angle γ. (*MC&IC*) **C. 1708.** Solve the following equation over the set of real number pairs: $\log_2^2(x+y)+\log_2^2(xy)+1=2\log_2(x+y)$. (*MC&IC*)

New exercises – competition B (see page 91): **B. 5222.** Let A denote the set of even positive integers for which the sum of the digits decreases by 2 if the number is halved. Let B denote the set of positive integers for which the sum of the digits increases by 5 if the number is multiplied by 5. What is the number of elements in the set $A\cap B$ and in the set $B\setminus A$? (*3 points*) (Proposed by *T. Káspári,* Paks) **B. 5223.** Define the sequence $\{a_n\}$ as follows: $a_1=-3$, $a_{n+1}=4+a_n+4\sqrt{a_n+4}$. Determine the value of a_{2022}. (*3 points*) (Proposed by *T. Káspári,* Paks) **B. 5224.** P is a point on side BC of a unit square $ABCD$, and Q is a point on side CD, such that $\angle PAQ=45^\circ$. For which positions of points P and Q will the sum $BP+PQ+QD$ be minimal? (*4 points*) (Proposed by *J. Szoldatics,* Budapest) **B. 5225.** The inscribed circle of triangle ABC is centred at I and has a radius ϱ, the radius of the circumscribed circle is R. Prove that if $\overline{AI}=R$, then the area of the triangle ABC is $\frac{a\cdot R}{4}+\varrho\cdot a$, where a denotes the length of the side opposite to vertex A. (*4 points*) (Proposed by *Sz. Kocsis,* Budapest) **B. 5226.** The length of each side of a triangle is at most 2 units. Each pair of vertices is joined with an arc of a unit circle, not longer than a semicircle. Prove that $a'+b'>2c'/3$, where a', b', c' denote the lengths of the arcs. (*5 points*) **B. 5227.** Give an example of a positive integer k, along with a finite tree graph F of at least k vertices in which the degree of each vertex is at most 3, and F will fall apart into at least 2022 components if an arbitrary connected subgraph of k vertices is deleted from F. (*6 points*) (Based on a *Monthly problem*) **B. 5228.** A parabola intersects side AB of a triangle ABC at interior points C_1 and C_2, side BC at interior points A_1 and A_2, and it intersects side CA at interior points B_1 and B_2. Prove that if $AC_1=C_2B$ and $BA_1=A_2C$ then $CB_1=B_2A$. (*5 points*) (Proposed by *G. Holló,* Budapest) **B. 5229.** Let $a\neq 0$ be a real number, and let $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be a function, such that $f\big(x+f(y)\big)=f(x)+f(y)+ay$ for all $x,y\in\mathbb{R}$. Prove that f is additive, that is, $f(x+y)=f(x)+f(y)$ for all $x,y\in\mathbb{R}$. (*6 points*) (Proposed by *G. Stoica,* Saint John, New Brunswick, Canada)

New problems – competition A (see page 92): **A. 818.** Find all pairs of positive integers m, n such that $9^{|m-n|}+3^{|m-n|}+1$ is divisible by m and n simultaneously. (Submitted by *Géza Kós,* Budapest) **A. 819.** Let G be an arbitrarily chosen finite simple graph. We write non-negative integers on the vertices of the graph such that for each vertex v in G the number written on v is equal to the number of vertices adjacent to v where an even number is written. Prove that the number of ways to achieve this is a power of 2. **A. 820.** Let ABC be an arbitrary triangle. Let the excircle tangent to side a be tangent to lines AB, BC and CA at points C_a, A_a and B_a, respectively. Similarly, let the excircle tangent to side b be tangent to lines AB, BC and CA at points B_c, B_a and B_b, respectively. Finally, let the excircle tangent to side c be tangent to lines AB, BC and CA at points C_c, A_c and B_c, respectively. Let A' be the intersection of lines A_bC_b and A_cB_c. Similarly, let B' be the intersection of lines B_aC_a and A_cB_c, and let C' be the intersection of lines B_aC_a and A_bC_b. Finally, let the incircle be tangent to sides a, b and c at points T_a, T_b

and T_c, respectively. *a*) Prove that lines $A'A_a$, $B'B_b$ and $C'C_c$ are concurrent. *b*) Prove that lines $A'T_a$ and $B'T_b$ and $C'T_c$ are also concurrent, and their point of intersection is on the line defined by the orthocentre and the incentre of triangle ABC. (Submitted by *Viktor Csaplár,* Bátorkeszi and *Dániel Hegedűs,* Gyöngyös)

Problems in Physics

(see page 122)

M. 411. Measure the rotational inertia of an empty beer bottle about its symmetry axis. In order to make the measurement more accurate, carry out the measurement in two different ways. Compare the accuracy of the two measurements.

G. 769. The fuel consumption meter of a car, moving uniformly along a level road, reads 5 litres/100 km. If the same car is moving along the same road, and accelerates uniformly, then the reading on the fuel consumption meter at the moment when the car reaches the speed of the uniform motion is 10 litres/100 km. When the car goes at the same speed on a hill the fuel consumption is 12 litres/100 km. What does the meter read when the car is driving up the same hill at the acceleration as described before at the moment when its speed also reaches the value described above? **G. 770.** The most common heating fuel is natural gas. The gas utility company uses the following method to determine the monthly price to be paid, which is shown on the gas bill (in Hungarian): the amount of consumed gas is multiplied by a so-called correction factor, then the heating value of the gas in MJ is calculated, and finally the heating value is used to calculate the amount of money to be paid. To this, a basic monthly household charge is added. Find a recent gas bill and a recent electricity bill and answer the following questions (in your answers always give the gross values!) *a*) Why is it necessary to use the correction factor? *b*) What is the price of 1 m^3 natural gas at standard conditions? *c*) How much does 1 MJ of energy cost if it comes into your home as gas or as electricity? **G. 771.** In the connection shown in the *figure,* the resistors have the same resistance R, and at a voltage U the their power is P. What is the power dissipated in each resistor with the switches open (O) or closed (C)? Fill in the table!

1.	2.	A	B	C
O	O			
O	C			
C	O			
C	C			

G. 772. Children play a circle game in the field. Unfortunately, the child in the middle of the circle steps in a wasps' nest and the angry wasps fly away. The wind is blowing from the east at a speed of 4.5 m/s in the field, and the children are running radially outward at a speed of 6 m/s. According to the measurements of scientists these wasps in calm conditions can fly at a speed of 8 m/s. Estimate the percentage of children who are surely safe from wasp stings! You can also use a ruler, a pair of compasses and a protractor to find out the answer.

P. 5382. An old tape magnetophone spins the takeup reel at a constant speed during a fast rewind. The inner diameter of both reels is 5 cm and their outer diameter is 15 cm. From the fully loaded feed reel, the rewinding time of the tape is 3 minutes. The tape is wound onto the initially empty takeup reel. How much time elapses from the start until the two reels have equal lengths of tape wound on them? **P. 5383.** What would the mass of the Earth have to be — with unchanged rotation and diameter — so that we would not be able to receive the satellite TV broadcast with a parabolic dish in Budapest. **P. 5384.** There is a small ball placed on top of a thin, uniform, vertical stick. Compared to the mass of the stick, the mass of the ball is negligible and the stick stands on a table which can be considered frictionless. Suddenly the stick falls over. In which case will the ball strike the tabletop at a higher speed, if it is glued to the top of the stick, or if it is simply put on the stick, from where it can fall off very easily? **P. 5385.** To what fraction does the heat flux released through a window, which has a single glass layer in it, decreases if the window is replaced by a double pane one? The thickness of each glass layer in both cases is $d_{\text{glass}} = 3$ mm, and in the case of the double pane window there is a $d_{\text{air}} = 7$ mm air gap between the two glass layers. The thermal conductivity of air is $\kappa_{\text{air}} = 0.025$ W/(m K) and the thermal conductivity of glass is $\kappa_{\text{glass}} = 1.2$ W/(m K). **P. 5386.** There is a small ball of charge $Q = 5.55$ μC fixed at the bottom of a 2 m long trough made of some insulating material. The trough makes an angle of elevation of $\alpha = 30^\circ$ with the horizontal. From the top of the trough another small ball of mass $m = 100$ g with charge $q = 10$ μC is released from rest. How far does this ball can move if it rolls without slipping? (The charge of the ball does not change during its motion.) **P. 5387.** Different resistors of resistances R are connected to a battery of electromotive force U_0 and of internal resistance R_{b}. *a*) What is the maximum "useful" power (dissipated in the external resistor) that this battery can deliver? At what external resistance value R can we achieve this maximum power $P_{\max}$? *b*) Show that for any other power P which is smaller than $P_{\max}$, there are two external resistors of resistances $R_1 \neq R_2$ at which the dissipated power is P. What is the arithmetic and the geometric mean of R_1 and R_2? *c*) What is the sum of the terminal voltages across the battery in the above two cases? *d*) What is the sum of the currents through R_1 and R_2? *e*) The efficiency of the delivered energy is defined as the ratio of the useful power to the total power delivered by the battery. What is the sum of the efficiencies in the above two cases? **P. 5388.** Linearly polarized light from a 15 mW laser having a wavelength of $\lambda = 632.8$ nm is emitted from the 2 mm diameter circular aperture of the laser box. *a*) What is the maximum value of the electric field in the laser beam? *b*) What is the total linear momentum of a one metre long piece of the laser beam? **P. 5389.** A (point-like) fly flies at a constant speed of v parallel to the principal axis of a lens, having a focal length of f, at a distance of d from it. What is the least speed of the fly with respect to its image? **P. 5390.** There is a small electric dipole of dipole moment p at the centre of the thin-walled uncharged metal spherical shell of radius R, shown in the *figure*. Determine the surface charge density at points A and B, which are interior points of the shell. Determine the surface density of the charge on the outer surface of the shell as well. (*Hint*: Use the method of image charges applied for a sphere. It might be also useful to know the electric field due to a dipole at a point on the axial and equatorial lines.)

Problems of the 2021 Kürschák competition

1. In the Cartesian coordinate system of the plane, the triangle determined by the points $P_i = (a_i, b_i)$ $(i = 0, 1, 2)$ contains the origin $O = (0, 0)$ in its interior. Show that the areas of the triangles P_0OP_1, P_0OP_2, P_1OP_2 (in this order) form a geometric sequence if and only if the system of equations $a_0x^2 + a_1x + a_2 = b_0x^2 + b_1x + b_2 = 0$ has a real solution x.

2. In Wonderland, n airlines operate flights between n cities. For each airline, there are an odd number of cities, say, $v_1, v_2, \ldots, v_i$ such that the airline operates the following flights: v_jv_{j+1} and $v_{j+1}v_j$ for $1 \leqslant j \leqslant i$, where $v_{i+1} = v_i$. Prove that we may choose an odd number of cities, say, $u_1, u_2, \ldots, u_k$ in such a way that it is possible to buy tickets for the flights $u_1u_2, u_2u_3, \ldots, u_{k-1}u_k, u_ku_1$ from pairwise different airlines.

3. In the cyclic hexagon $A_1B_3A_2B_1A_3B_2$, the diagonals A_1B_1, A_2B_2 and A_3B_3 are concurrent. For $i = 1, 2, 3$, let C_i be the intersection of the diagonals A_iB_i and $A_{i+1}A_{i+2}$, and let D_i be a point on the circumscribed circle, different from B_i, such that the circle $B_iC_iD_i$ is tangent to the line $A_{i+1}A_{i+2}$. (The points are indexed modulo 3, that is, $A_4 = A_1$ and $A_5 = A_2$.) Prove that the segments A_1D_1, A_2D_2 and A_3D_3 are concurrent.