KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE

ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

72. évfolyam 3. szám Budapest, 2022. március

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 1050 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

Főszerkesztő: RATKÓ ÉVA
Fizikus szerkesztő: GNÄDIG PÉTER
Műszaki szerkesztő: MIKLÓS ILDIKÓ
Borító: BURGHARDT ZSUZSA
Kiadja: MATFUND ALAPÍTVÁNY
Alapítványi képviselő: KÓS RITA
Felelős kiadó: KATONA GYULA
Nyomda: OOK-PRESS Kft.
Felelős vezető: SZATHMÁRY ATTILA
INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
Telefon: 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten: `www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8800 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office: Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405. 1117–Budapest, Hungary telephone: +36 (1) 372-2850 or on the Postal address H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary, or on the Internet: `www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. *a*) Oldjuk meg a $2^{x+1}+3=2^{1-x}$ egyenletet a valós számok halmazán.

A $H=\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ alaphalmaz A, B, C részhalmazairól az alábbiakat ismerjük:

$$B\subset A;\quad \overline{A\cup C}=\{0;8\};\quad A\cap C=\{3;4;7\};\quad \overline{C}=\{0;1;2;8;9\};\quad A\setminus B=\{2;7;9\}.$$

b) Elemeinek felsorolásával adjuk meg az A, B, C halmazokat. (*11 pont*)

2. Egy 10 cm oldalú négyzet minden oldalára kifelé egyenlő szárú háromszögeket rajzoltunk, melyeknek szárai 13 cm-esek, így egy csillagszerű alakzatot kaptunk.

a) Mekkora a csillag területe?

Felhajtogatva az egyenlő szárú háromszögeket, egy négyzet alapú egyenes gúla keletkezett.

b) Mekkora a gúlába írható gömb sugara? (*13 pont*)

3. András és Balázs „zsíroznak”. A „zsírozás” a 32 lapos magyar kártya egyik egyszerű játéka, amelynek az a lényege, hogy a végén az „ütések” során megszerzett lapok „zsír” tartalma alapján dől el, ki nyerte a játékot.

A magyar kártyában négy „szín”: piros, zöld, makk, tök; mindegyik színen belül ász, király, felső, alsó, tízes, kilences, nyolcas, hetes található. „Zsírnak” számít az ász és a tízes, az nyer, akinek több a „zsírja”. (Ha mindketten 4 – 4 „zsírt” szereztek, akkor az nyert, aki utoljára „ütött”; döntetlen nincs.)

Az első leosztásnál egyszerre négy-négy lapot kapnak a játékosok.

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy András első leosztáskor kapott négy lapja között legalább egy „zsír”, és legalább egy hetes található?

Azért, hogy eldöntsék, ki kezdi a játékot, sorsolnak úgy, hogy a megkevert csomagból felváltva visszatevés nélkül leemelnek egy-egy lapot. Aki az első hetest húzza, az kapja először a négy lapot, és kezdi meg a játékot. (Ha pl. András húz először hetest, akkor Balázs kever, és oszt előbb Andrásnak négy lapot, majd saját magának négyet; András kezdi a játékot. Később ez a keverés, osztás- kezdés felváltva történik.)

András kezdte a sorsolást, és Balázsnak a második húzására sikerült hetest húznia.

b) Mennyi ennek a valószínűsége? (*13 pont*)

4. Vegyük az alábbi kijelentéseket:

A) Ha egy mértani sorozatnak van véges határértéke, akkor hányadosa egynél kisebb.

B) Ha $f(x) = x + 1$, és $g \circ f = x^2 + 2x + 1$, akkor $g(x) = x^2$.
($g \circ f = g\big(f(x)\big)$, a g függvény az f függvénynek közvetett függvénye.)

C) Ha két sorozat összege és szorzata konvergens, akkor a sorozatok különkülön is konvergensek.

a) Állapítsuk meg a kijelentések logikai értékét (igaz, hamis). Állításainkat igazoljuk.

D) Ha egy n csúcsú egyszerű gráf minden csúcsa legalább $\left[\frac{n}{2}\right]$ fokú, akkor a gráf összefüggő. ($\left[\frac{n}{2}\right]$ az $\frac{n}{2}$ egész részét jelenti.)

b) Fogalmazzuk meg a *D*) állítás megfordítását, majd döntsük el, hogy ez igaz, vagy hamis. Megállapításunkat indokoljuk. (*14 pont*)

II. rész

5. *a*) Függvény-transzformációk felhasználásával ábrázoljuk az $f(x) = 4|x| - x^2$ függvényt a $[-5; 5]$ intervallumon.

A H halmaz elemeit az $f(x)$ függvény zérushelyei és lokális maximumhelyei alkotják. Ismétlés nélkül, véletlenszerűen kiválasztunk három elemet H-ból.

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a három elem összege osztható 9-cel?

Egy korlátos síkidomot a $g(x) = 4x - x^2$, $x \in \mathbb{R}$ függvény grafikonja és az x tengely zár közre.

c) Számítsuk ki a síkidom területét. (*16 pont*)

6. Egy vitorlázórepülő pilóta teljesítményrepülést tervez a következőképpen: Szombathelyről indul, délkelet felé repül, majd Kaposvár környékén irányt vált É-ÉK felé. Mikor Székesfehérvár légterét elérte, nyugatra tart, így érkezik vissza a kiinduló repülőtérre. (É-ÉK az északi és északkeleti irány szögfelezőjébe mutató irány.)

Az 1 : 450 000-es méretarányú térképen a Kaposvár-Székesfehérvár távolság 22 cm. (Az 1 : 450 000-es méretarány azt jelenti, hogy a térképen mért távolság 450 000-szerese van a valóságban a két objektum között.)

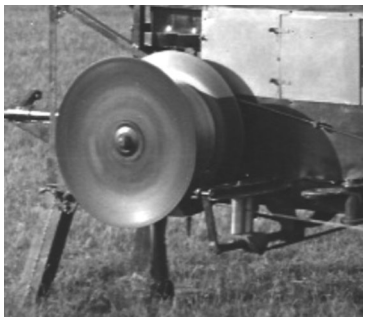
a) Mekkora a tervezett távrepülés hossza légvonalban? A végeredményt 10 km-es pontosságúra kerekítve km-ben adjuk meg.

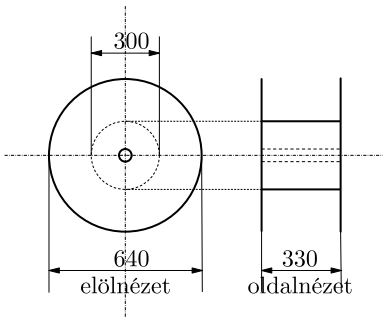
A repülőgép hagyományos magasságmérője a p légköri nyomásból határozza meg a tengerszint feletti magasságot a $p = p_0 \cdot 2^{-\frac{h}{5500}}$ képlet alapján, ahol p_0 a tengerszinten mért nyomást, h pedig a tengerszint feletti magasságot jelenti méter mértékegységben megadva.

b) Milyen magasan van a repülőgép, ha $p_0 = 103$ kPa, $p = 88$ kPa?

A vitorlázó repülőgépek levegőbe emelésének leggyakrabban alkalmazott módja a csörlővel vontatás. Ez úgy történik, hogy a csörlőaggregátor egy kötéldobra rétegenként szorosan feltekercseli a drótkötelet, amelynek végén a vitorlázó repülőgép van. A mellékelt *ábrán* a kötéldob legfontosabb méreteit milliméter mértékegységben tüntettük fel. A drótkötél átmérője 6 mm.

c) Legfeljebb milyen hosszú drótkötelet lehet feltekerni erre a dobra? (*16 pont*)





7. Egy trapéz rövidebbik alapja 1, egy másik oldala 7 egység hosszú. A trapéz oldalainak hosszát megfelelő sorrendbe rakva egy számtani sorozat szomszédos elemeit kapjuk.

a) Mekkora a trapéz nagyobbik alapja, mekkorák a szárak?

Az alábbi adatsokaságban néhány trapéz oldalhosszának mérőszámát soroltuk fel véletlenszerűen: 1, 3, 5, 7, 1, 4, 7, 10, 1, 7, 13, 19, 1, 6, 12, 15.

b) Számítsuk ki az adatok átlagát, szórását, határozzuk meg a móduszt és a mediánt.

Az egy síkban levő 1, 3, 7, 5 egység hosszú szakaszokat ebben a sorrendben csuklósan rögzítettük egymáshoz, majd addig mozgattuk, míg egy húrnégyszöget sikerült kialakítani.

c) Mekkora szöget zár be egymással ekkor az 5 és 7 egység hosszú szakasz?

(*16 pont*)

8. Egy vegyi anyagokat gyártó vállalat egy bizonyos terméket, melynek összetétele csak hatóanyagának koncentrációjában különbözik, kétféle kiszerelésben forgalmaz az alábbiak szerint.

A változat: 60%-os töménységű, 2 kg-os, 3 dm^3-es dobozban;

B változat: 20%-os töménységű, 5 kg-os, 8 dm^3-es dobozban.

A vállalat mintaboltjában a fenti árukból árkedvezményt adnak azoknak a vevőknek, akik összesen legalább 40 kg-ot vásárolnak ezekből. Egy vevő, akinek 50%-os keverékre van szüksége, vásárolni szeretne belőlük úgy, hogy minden megvásárolt doboz tartalmát teljes mértékben felhasználja.

a) Hány dobozzal vegyen az egyes változatokból, ha részesülni kíván az árkedvezményben, szállítóeszközére legfeljebb összesen 120 kilogrammnyi terhet rakhat, a megvásárolt áru teljes térfogata nem haladhatja meg a 130 dm^3-t, és a kedvezmény mértéke egyenesen arányos a megvásárolt áru össztömegével?

Ez a vállalat egyike annak az öt vállalatból álló csoportnak, melyben mindegyik vállalat bármelyik másikkal üzleti kapcsolatban áll, és az egymással szembeni követeléseiket forintban, vagy euróban egyenlítik ki. Két szereplő egymás között ugyanabban a pénznemben fizeti ki a számlát. A szerződések megkötése után észrevették, hogy nincs három olyan vállalat, melyek egymás között azonos valutában rendezik tartozásaikat.

b) Igazoljuk, hogy mindegyik vállalat kettőnek forinttal, a másik kettőnek pedig euróval fizet. (*16 pont*)

9. *a*) A p valós paraméter mely értéke esetén lesz az $f(x) = x^3 - 3x^2 + \frac{9}{4}x + p$ ($x \in \mathbb{R}$) függvénynek három különböző zérushelye a valós számok halmazán?

A $g(x) = x^3 + bx^2 + cx + 2022$ ($x \in \mathbb{R}$) függvény b és c együtthatóit szabályos dobókockával sorsoljuk ki; az első dobás b-t, a második c-t eredményezi.

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az így kapott függvénynek nem lesz helyi szélsőértéke? (*16 pont*)

Németh László
Fonyód

Megoldásvázlatok a 2022/2. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a*) *Határozzuk meg a következő kifejezés előjelét, ha n tetszőleges természetes szám:*

$$\frac{2^{n-1}+1}{2^n+1} - \frac{2^n+1}{2^{n+1}+1}.$$ (*6 pont*)

b) *Hány valós megoldása van a*

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

trigonometrikus egyenletnek a $]0;\pi[$ *intervallumon?* (*7 pont*)

Megoldás. *a*) *Egyik lehetőség.* Osszuk el az első (pozitív) törtkifejezést a második (pozitív) törtkifejezéssel, felhasználva a hatványozás ismert azonosságait:

$$\frac{2^{n-1}+1}{2^n+1} : \frac{2^n+1}{2^{n+1}+1} = \frac{2^{n-1}+1}{2^n+1} \cdot \frac{2^{n+1}+1}{2^n+1} = \frac{2^{2n}+2^{n+1}+1+2^{n-1}}{2^{2n}+2^{n+1}+1} =$$

$$= 1 + \frac{2^{n-1}}{2^{2n}+2^{n+1}+1} > 1,$$

mert az összegben szereplő tört számlálója és nevezője is, így maga a törtkifejezés is pozitív előjelű (az exponenciális függvény tulajdonsága miatt), amiből az következik, hogy az eredeti különbségben az első (pozitív) tag nagyobb, mint a második (pozitív) tag, így a különbségük előjele pozitív.

Másik lehetőség. Hozzunk közös nevezőre, ismét felhasználva a hatványozás ismert azonosságait:

$$\frac{(2^{n-1}+1)(2^{n+1}+1) - (2^n+1)^2}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)} = \frac{2^{2n}+2^{n-1}+2^{n+1}+1-2^{2n}-2\cdot 2^n-1}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)} =$$

$$= \frac{2^{n-1}+2^{n+1}-2\cdot 2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)} = \frac{2^{n-1}}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)} > 0,$$

hiszen a számláló pozitív, a nevező mindkét tényezője, így maga nevező is pozitív, vagyis a tört pozitív előjelű, ami azt jelenti, hogy az eredeti kifejezés előjele is pozitív.

b) A $\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ összefüggés miatt:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$$

A $\sin\alpha = \sin\beta$ típusú egyenletek megoldási sémája alapján:

1. lehetőség:

$$x + \frac{\pi}{3} = 2x + \frac{\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} - k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ezen megoldások közül a $\frac{\pi}{6}$ esik a $]0;\pi[$ intervallumba.

2. lehetőség:

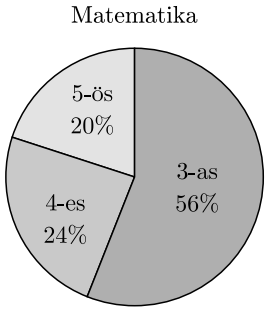
$$x + \frac{\pi}{3} = \pi - \left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + l2\pi \quad (l \in \mathbb{Z}),$$

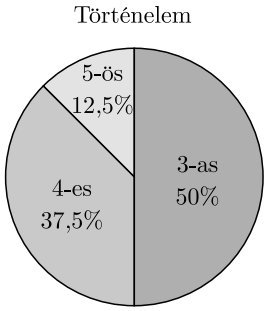
$$x_2 = \frac{\pi}{6} + l\frac{2\pi}{3} \quad (l \in \mathbb{Z}).$$

Ezen megoldások közül csak az $l = 0$ és az $l = 1$ esetén kapunk olyan megoldást, ami a $]0;\pi[$ intervallumba esik. Ezek a megoldások: $\frac{\pi}{6}$ és $\frac{5\pi}{6}$, amelyek ellenőrzéssel igazolhatók.

Az egyenletnek tehát két valós megoldása esik a $]0;\pi[$ inervallumba.

2. *A* 12. *évfolyam tanulói közül* 25*-en matematikából,* 40*-en pedig történelemből tettek emelt szintű érettségi vizsgát. Az érdemjegyek eloszlását a következő kördiagramokon látjuk:*





a) *A kördiagramok alapján töltsük ki az alábbi gyakorisági táblázatot.* (*4 pont*)

Tantárgy \ jegyek	**3**	**4**	**5**
Matematika			
Történelem			

b) Határozzuk meg a történelem eredmények átlagát, mediánját és szórását. (*3 pont*)

c) A matematikából 3*-ast szerzők közül legalább hány tanulónak kellett volna* 4*-est kapnia, hogy a többiek változatlan teljesítménye mellett a matematika átlag legalább* 3,8 *legyen?* (*6 pont*)

Megoldás.

a) Matematika: $0{,}56 \cdot 25 = 14$, $0{,}24 \cdot 25 = 6$, $25 - (14 + 6) = 5$.
Történelem: $0{,}5 \cdot 40 = 20$, $0{,}375 \cdot 40 = 15$, $40 - (15 + 20) = 5$.

Tantárgy \ jegyek	**3**	**4**	**5**
Matematika	14	6	5
Történelem	20	15	5

b)
$$\overline{x} = \frac{20 \cdot 3 + 15 \cdot 4 + 5 \cdot 5}{40} = 3{,}625,$$
$$\text{medián: } \frac{3+4}{2} = 3{,}5,$$
$$\text{szórás: } \sigma = \sqrt{\frac{20 \cdot (3 - 3{,}625)^2 + 15 \cdot (4 - 3{,}625)^2 + 5 \cdot (5 - 3{,}625)^2}{40}} = 0{,}695 \approx 0{,}7.$$

c) A kérdéses tanulók száma legyen x, ahol $0 < x \leqslant 14$, $x \in \mathbb{Z}$.

Velük együtt a közös átlagtól elvárt érték:

$$\frac{(14 - x) \cdot 3 + (6 + x) \cdot 4 + 5 \cdot 5}{25} \geqslant 3{,}8,$$
$$\frac{42 - 3x + 24 + 4x + 25}{25} \geqslant 3{,}8,$$
$$(*) \qquad \frac{91 + x}{25} \geqslant 3{,}8,$$
$$91 + x \geqslant 95,$$
$$x \geqslant 4.$$

Legalább 4 tanulónak kellett volna még 4-est kapnia matematikából.

Ellenőrzés: $x = 4$-re számított átlag $\frac{10 \cdot 3 + 10 \cdot 4 + 5 \cdot 5}{25} = 3{,}8$.

A $(*)$ egyenlőtlenség bal oldalán álló $\frac{91+x}{25}$ függvény, az átlag függvénye, szigorúan monoton növő, így az x növelésekor az átlag is növekszik. Így a válaszunk helyes.

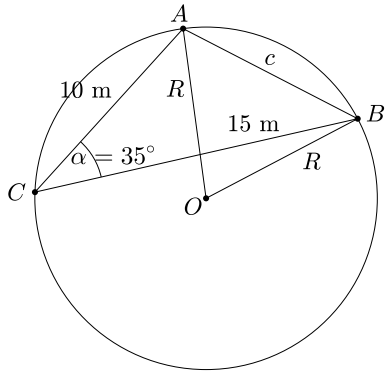
3. *Az Andrássy gimnázium gólyatáborának egy sportversenyéhez a következő pálya készült el az udvar betonján: egy körben az egy pontból kiinduló* 10 m *és* 15 m *hosszú húrok egymással* $35°$*-os szöget zárnak be. A játékosoknak a húrok (nem közös) végpontjából indulva kell megszerezni a kör középpontjában lévő labdát, majd visszafutni a kiindulási helyükre.*

a) Készítsünk a szövegnek megfelelő ábrát a lényeges adatok feltüntetésével. (*2 pont*)

b) Legalább mekkora utat kell megtenni egy-egy játékosnak? (*4 pont*)

c) Kata azt állítja, hogy a játékosok kiindulási helye és a labda alkotta háromszög területe legfeljebb 25 m^2*. Igaza van-e Katának?* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) (Lásd az *ábrát.*)



b) Az $AOB\sphericalangle = 2\alpha = 70°$, mert az AB íven nyugvó középponti szög. Az ACB háromszögben alkalmazzuk a koszinusz-tételt:

$$c^2 = 10^2 + 15^2 - 2 \cdot 10 \cdot 15 \cdot \cos 35°,$$

$$c^2 = 79{,}25, \quad c > 0,$$

$$c = 8{,}9 \text{ m}.$$

A húr, a hozzá tartozó kerületi szög és a sugár közötti összefüggést felhasználva:

$$\frac{c}{\sin 35°} = 2R \Longrightarrow \frac{8{,}9}{0{,}5736} = 2R \Longrightarrow R = 7{,}76 \text{ m}.$$

Így egy-egy játékosnak $2 \cdot R = 2 \cdot 7{,}76 = 15{,}52$ m-t kell megtennie.

c) A háromszög trigonometrikus területképlete alapján:

$$t_{AOB\triangle} = \frac{7{,}76^2 \cdot \sin 70°}{2} = 28{,}29 \text{ m}^2.$$

Mivel $28{,}29 \text{ m}^2 > 25 \text{ m}^2$, így a kerekítések mértékére is figyelve, nincs igaza Katának.

4. *Adott az* $x^2 + y^2 - 14x - 12y + 65 = 0$ *egyenletű kör és a* $P(3; 9)$ *pont.*

a) A „rajta”, „kívül”, „belül” szavak közül írjuk a pontozott vonalra azt, amelyikkel az alábbi állítás igaz lesz. Számolással is igazoljuk a választ. (*3 pont*)

A P pont ..... *van a fent megadott egyenletű körvonalon.*

b) Határozzuk meg az origón és a P ponton átmenő g egyenesnek az x tengely pozitív felével bezárt szögét. A szög értékét egy tizedesjegy pontossággal adjuk meg. (*3 pont*)

c) Írjuk fel a megadott kör azon érintőjének egyenletét, amelynek nincs közös pontja a III. síknegyeddel, nem megy át az origón, és ami az y tengelyt az origótól kétszer olyan távolságban metszi, mint az x tengelyt, továbbá a tengelyekkel alkotott háromszög területe a legkisebb. (*7 pont*)

Megoldás. *a*) A kör középpontjának koordinátái és a sugara az egyenletének teljes négyzetes alakra hozása után közvetlenül leolvashatók:

$$(x-7)^2+(y-6)^2=20 \implies C(7;6) \text{ és } r=\sqrt{20}\,.$$

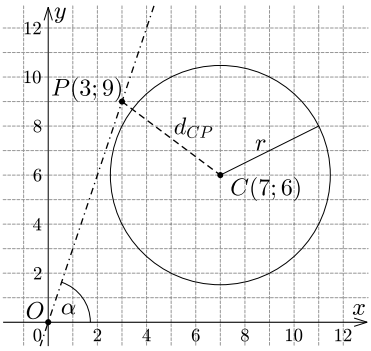
Számítsuk ki a $C(7;6)$ és a $P(3;9)$ pont d_{CP} távolságát:

$$d_{CP}=\sqrt{(3-7)^2+(9-6)^2}=\sqrt{25}=5>\sqrt{20}\,.$$

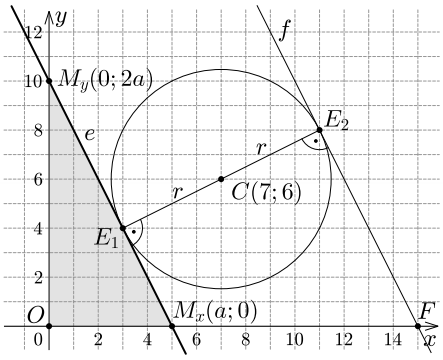
A P pont ..... kívül ..... van a fent megadott egyenletű körvonalon.

b) Mivel az origó koordinátái $O(0;0)$, ezért a keresett szög tangense (g egyenes iránytangense) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{9-0}{3-0}=\frac{9}{3}=3$, amiből a megfelelő kerekítéssel $\alpha\approx 71{,}6^\circ$ adódik.

Ugyanezt a megoldást kapjuk, ha felírjuk a g egyenes egyenletét (egyenes arányosság függvény): $y=3x$, ahonnan $m=\operatorname{tg}\alpha=3$ egyenlőségekből ismét a várt $\alpha\approx 71{,}6^\circ$ adódik.



4.*b*)



4.*c*)

c) Készítsünk *vázlatot* egy érintő és a tengelymetszetek (távolságok) berajzolásával. A feltételek miatt az érintő mindkét tengelyt a pozitív felén (nem az origóban) metszi. Legyen $M_x(a;0)$ és $M_y(0;2a)$.

Így az érintő egyenlete ($a>0$ paraméterrel):

$$y=-2x+2a.$$

Keressük a kör és az érintő közös pontját, az érintési pontot (pontokat). Ezt az egyenleteikből alkotott egyenletrendszer megoldása adja:

$$(x-7)^2+(y-6)^2=20,$$
$$y=-2x+2a.$$

A behelyettesítő módszert alkalmazva, a zárójelek felbontása, összevonás és rendezés után a következő másodfokú, paraméteres (a) egyenletet kapjuk:

$$5x^2+(10-8a)x+4a^2-24a+65=0.$$

Mivel egy érintőnek a körrel pontosan egy közös pontja van, ezért ennek a másodfokú, paraméteres egyenletnek a diszkriminánsa 0 kell, hogy legyen:

$$D = (10 - 8a)^2 - 4 \cdot 5(4a^2 - 24a + 65) = 0,$$

$$a^2 - 20a + 75 = 0.$$

Ennek az a-ban másodfokú egyenletnek a megoldásai: $a_1 = 5$ és $a_2 = 15$, melyek helyességét az azonos átalakítások biztosítják, vagy az ellenőrzések igazolják.

A minimális területű derékszögű háromszög az $a_1 = 5$ megoldással adódik ($t_1 = 25 < t_2 = 225$), ennek az érintőnek az egyenletét kell csak felírni. A feltételeknek megfelelő e érintő egyenlete:

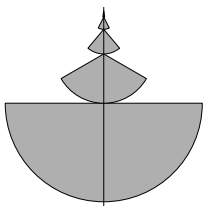
$$y = -2x + 10.$$

II. rész

5. *a) Egy $\{a_n\}$ számtani sorozat differenciája 4, az első n tag összege 1825, és az első tag megegyezik ezen összeadott tagok számával. Tagja-e ennek az $\{a_n\}$ sorozatnak a 8115?* (*6 pont*)

Julcsi 2018. január 1-jén betett a bankba egy bizonyos összeget, évi 5%-os kamatra úgy, hogy a bankszámláján a minden év végén esedékes kamatokat tőkésítette (nem vette ki). Három év elteltekor megemelte a megtakarított pénzét az éppen bent lévőnek a 20%-ával. Ettől kezdve már csak 4%-os évi kamatot kapott a bankintézettől. A következő év első napján pedig kivette az addig megtakarított pénzének a 10%-át. 2025. január 1-jén szeretné felvenni az összes pénzét. Testvére, Anna egyszerre kezdett vele takarékoskodni ugyanakkora összeggel.

b) Hány %-os, állandó évi kamatot kellene kapnia ahhoz Annának betét és kivét nélküli takarékosság esetén, hogy a két testvérnek ugyanannyi megtakarított pénze legyen 2025 első napján? A kamatláb értékét egy tizedes pontossággal adjuk meg. (*4 pont*)



Karácsonyra Franci az ábrán látható, négy cikkből álló, tengelyesen szimmetrikus fenyőfa díszt kezdte el rajzolni egy papírra. Egy 5 cm sugarú félkörből indult ki, eggyel feljebb lépve, a körcikk sugarát a felére, középponti szögét $\frac{2}{3}$ részére változtatta, miközben a körcikk középpontját a felette lévő körív felezési pontjába tette. Elgondolkodott azon, ha ezt az eljárást végtelen sokáig tudná folytatni, lenne-e a mintának véges területe.

c) Ha igen, pontosan mekkora lenne, és az hány %-a annak a minimális területű téglalap területének, amelynek két oldala párhuzamos a fenyőfa tengelyével? (*6 pont*)

Megoldás. *a)* A számtani sorozat jelöléseit felhasználva: $a_1 = n$; $d = 4$; $S_n = 1825$; $a_1 = n = ?$. A számtani sorozatok összegére vonatkozó szabály a fel-

tételeket figyelembe véve:

$$S_n = \frac{n}{2}\big[2a_1 + (n-1)d\big] = \frac{n}{2}\big[2n + (n-1)d\big] = 3n^2 - 2n = 1825,$$

$$3n^2 - 2n - 1825 = 0,$$

$$n_1 = 25, \quad n_2 = -24\frac{1}{3}.$$

A negatív szám tartalmi ellentmondás (sorszám) miatt nem megoldás, így a sorozat első tagja: $a_1 = 25$.

A számtani sorozat m-edik elemére felírható összefüggést alkalmazva:

$$8115 = 25 + (m-1)4,$$

$$m = 2023{,}5 \notin \mathbb{Z}^+.$$

Ebből az következik, hogy a 8115 nem eleme a sorozatnak.

Ellenőrzés:

$$S_n = \frac{n}{2}\big[2a_1 + (n-1)d\big] = \frac{25}{2}\big[2\cdot 25 + (25-1)\cdot 4\big] = 1825 = S_{25}.$$

A megoldásunk így helyes.

b) Julcsi megtakarítása (a_j; a_0; $p_1 = 5\%$; $p_2 = 4\%$) a kivételkor a pénzügyi folyamatot is szemléltetve a műveletek sorrendjével:

$$a_j = a_0 \cdot 1{,}05^3 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}04 \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}04^3 \approx 1{,}463a_0.$$

Anna megtakarítása (a_a; a_0; p) a kivételkor:

$$a_a = a_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^7.$$

Mivel

$$a_j \approx 1{,}463a_0 = a_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^7 = a_a,$$

$p \approx 5{,}6\%$. Tehát Annának megközelítőleg 5,6%-os, állandó éves kamatot kell kapnia ahhoz, hogy a két testvérnek (közel) azonos megtakarított pénze legyen 2025 első napján.

c) A körcikkek területe arányos a sugár négyzetével és a középponti szögével, ezért a részterületek a következők lesznek (csökkenő sorrendben):

$$5^2\pi\frac{180^\circ}{360^\circ};\quad 2{,}5^2\pi\frac{\frac{2}{3}\cdot 180^\circ}{360^\circ};\quad 1{,}25^2\pi\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot 180^\circ}{360^\circ};\quad 0{,}625^2\pi\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot 180^\circ}{360^\circ};\ \ldots.$$

A képzési szabály alapján ezek a számok egy $q_t = \frac{1}{6}$ kvóciensű mértani sorozatot alkotnak. Mivel $|q_t| < 1$, így ezekből az elemekből képzett végtelen mértani sornak van véges összege:

$$t = \frac{t_1}{1 - q_t} = \frac{12{,}5\pi}{1 - \frac{1}{6}} = 15\pi\ \text{cm}^2.$$

A cikkek sugarai, a részmagasságok rendre: 5 cm, 2,5 cm, 1,25 cm, 0,625 cm, ...

A képzési szabály alapján ezek a számok egy $q_m = \frac{1}{2}$ kvóciensű mértani sorozatot alkotnak. Mivel $|q_m| < 1$, így ezekből az elemekből képzett végtelen mértani sornak szintén van véges összege, amely a képzeletbeli díszünk magassága, egyben a minimális területű (érintkező) téglalap egyik oldala lenne:

$$m = \frac{r_1}{1 - q_m} = \frac{5}{1 - 0{,}5} = 10 \text{ cm}.$$

A kérdéses két terület aránya %-ban kifejezve, ahol $t_t = 2r_1 m$:

$$\frac{t}{t_t} = \frac{15\pi}{2r_1 m} = \frac{15\pi}{2 \cdot 5 \cdot 10} = \frac{3\pi}{20} \Rightarrow 15\pi\%.$$

Válasz: Ha Franci el tudná készíteni végtelen sok lépésből ezt a mintát, akkor a dísz területe 15π%-a ($\approx 47\%$) lenne a téglalap területének.

6. *a) A JÁTÉK Kft. új homokozó vödre csonkakúp alakú. Ha a vödörbe beleteszünk egy* 14 cm *átmérőjű labdát, akkor az érinti a vödör alját, és egy körben a vödör oldalát is. A vödör aljának átmérője* 12 cm*, felső nyílásának átmérője* 18 cm*. A vödröt kívül is, belül is vízálló réteggel festik be. Hány liter festékre van szükség* 1000 *darab vödör elkészítésekor, ha* 1 *négyzetméternyi felület festéséhez* 0,5 dl *festéket használnak, és a vödör falvastagsága elhanyagolható?* (*8 pont*)

b) Panni és Peti koktélos poharakból bodzaszörpöt iszik. A pohár felső része forgáskúp alakú, melynek magassága 8 cm*, alkotója* 10 cm*, és* 7 cm *„magasan áll benne" az üdítő. Hány milliméterrel emelkedik meg a bodzaszörp „szintje", ha a pohárba három darab,* 2 cm *élű jégkockát teszünk, és azok már teljesen elolvadtak? A választ egészre kerekítve adjuk meg. (Tekintsünk el a jég olvadásakor közismerten bekövetkező térfogatváltozástól.)* (*8 pont*)

Megoldás. *a)* Készítsük el a vödörnek (szimmetrikus csonka kúp) egy tengelymetszetét, ami egy szimmetrikus trapéz lesz, és azon jelöljük be a lényeges adatokat.

Felhasználva, hogy az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra, valamint azt, hogy adott körhöz külső pontból húzott érintő szakaszok hossza egyenlő:

$$OA = OE = r = 7 \text{ cm} \quad \text{és} \quad BA = BE = 6 \text{ cm}.$$

Mivel az adott kör középpontja rajta van az $ABE\sphericalangle = \beta$ szögfelezőjén, és az alapokat felező szimmetriatengely $DA \perp AB$, az OAB derékszögű háromszögben:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{7}{6} \Rightarrow \beta = 98{,}8^\circ.$$

Toljuk el párhuzamosan AD-t B-be, így $AD \parallel BM$, és

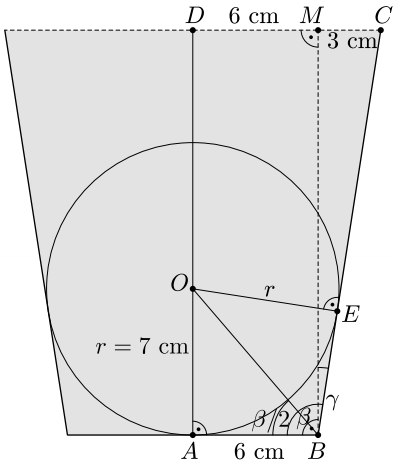
$$MBC\sphericalangle = \gamma = 98{,}8^\circ - 90^\circ = 8{,}8^\circ, \quad \text{illetve} \quad MC = 9 - 6 = 3 \text{ cm}.$$

A BMC derékszögű háromszögben: $\sin 8{,}8^\circ = \frac{3}{BC} \Longrightarrow BC = 19{,}61$ cm (ez az alkotó). A felül nyitott csonkakúp felszínét kétszer kell vennünk (kívül-belül):

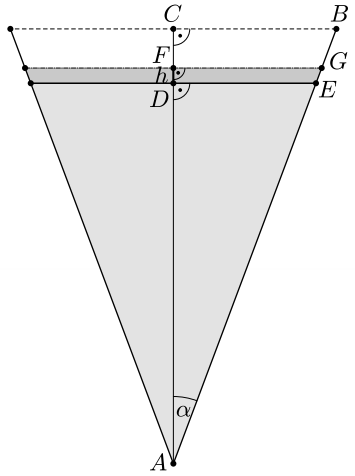
$$2A = 2\left[6^2\pi + (6+9)\pi \cdot 19{,}61\right] = 2074{,}4 \text{ cm}^2.$$

Befestendő felület: $1000 \cdot 2A = 1000 \cdot 2074{,}4 = 2\,074\,400$ cm^2 $= 207{,}44$ m^2. A felhasználandó festék térfogata: $207{,}44 \cdot 0{,}5 = 103{,}72$ dl $= 10{,}372$ liter.

Tehát megközelítően 10,4 liter festékre van szükség.



6.a)



6.b)

b) Rajzoljuk meg a pohár felső részének (forgáskúp) a tengelymetszetét, amely egy tengelyesen szimmetrikus, egyenlő szárú háromszög lesz. Mivel $AC = 8$ és $AB = 10$, így alkalmazva az ABC derékszögű háromszögre a Pitagorasz-tételt: $CB = 6$ (cm). Mivel $AD = 7$ és $ADE\triangle \sim ACB\triangle$ (szögek páronként egyenlőek), így:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{CB} \Longrightarrow \frac{7}{8} = \frac{DE}{6} \Longrightarrow DE = \frac{42}{8} = 5{,}25 \text{ (cm)}.$$

A bodzaszörp térfogata:

$$V_b = \frac{5{,}25^2 \cdot \pi \cdot 7}{3} = \frac{1029}{16}\pi \approx 202{,}04 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

A jégkockák térfogatának összege: $3V_\mathrm{k} = 3a^3 = 3{\cdot}2^3 = 3 \cdot 8 = 24$ (cm^3). A koktél (bodza és az elolvadt jég keveréke) térfogata:

$$V = V_\mathrm{b} + 3V_\mathrm{k} = 202{,}04 + 24 = 226{,}04 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Mivel $ADE\triangle \sim AFG\triangle$ (szögek páronként egyenlőek), ezért:

$$\frac{AF}{AD} = \frac{AD + DF}{AD} = \frac{AD + h}{AD} = \frac{7 + h}{7} = k$$

(hasonlósági arány). Felírva a térfogatok arányát, és kihasználva a közismert tételt:

$$\frac{V}{V_b} = \frac{226{,}04}{202{,}04} \approx 1{,}12 = k^3 \Rightarrow k \approx 1{,}038.$$

Ezt behelyettesítve az oldalak arányába:

$$\frac{7+h}{7} = 1{,}038 \implies h = 0{,}266 \approx 0{,}3 \text{ (cm)} = 3 \text{ mm}.$$

Tehát a pohárban megközelítően 3 mm-t fog emelkedni a bodzaszörp szintje a jégkockák elolvadása után.

Megjegyzések: 1. Ez az érték csekély mértékben változhat, ha a szokásos és megengedett kerekítéseket már korábban elvégezzük, de az biztos, hogy a pohárba még belefér a koktél.

2. Az olvadást azért kell megemlíteni, ez fontos feltétel, mert a jég sűrűsége kisebb a víz sűrűségénél, és ezért a feladat megoldása más lesz, ha a jég nem olvad el (jéghegy), ebben az esetben a térfogatok nem adódnak össze.

7. *Adott két teljes gráf. Az első gráfnak* 4*-gyel több csúcsa és* 62*-vel több éle van, mint a másodiknak.*

a) Hány csúcsa van annak a teljes gráfnak, amelynek annyi éle van, mint az adott két teljes gráf élei és csúcsai számának összege? (*6 pont*)

Legyen az A halmaz az $f(x) = \sqrt{-2x^2+5x+3}$ függvény értelmezési tartománya, a B halmaz pedig a $\log_{\frac{3}{\pi}}(4x-3) > \log_{\frac{3}{\pi}}(2x+7)$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza.

b) Határozzuk meg az $A \cap B$, az $A \cup B$ és az $A \setminus B$ halmazokat. (*6 pont*)

Tíz barát, Anna, Bea, Cili, Dóri, Emese, Fruzsi, Gábor, Huba, István és János moziba megy. A jegyek az első sorba egymás mellé szólnak.

c) Hányféleképpen ülhetnek le, ha a négy fiú azt kérte, hogy mindegyikük közvetlenül két lány között ülhessen? (*4 pont*)

Megoldás. *a)* Legyen rendre x, y és z a három teljes gráf csúcsainak száma, ahol $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$.

A megoldás során felhasználjuk azt a tényt, hogy ha egy teljes gráfnak n darab csúcsa van, akkor az éleinek száma $\frac{n(n-1)}{2}$. A feladat feltételei alapján a következő összefüggések írhatók fel:

$$x = y + 4,$$

$$\frac{x(x-1)}{2} = \frac{y(y-1)}{2} + 62,$$

$$\frac{z(z-1)}{2} = x + y + \frac{x(x-1)}{2} + \frac{y(y-1)}{2}.$$

Felhasználva, hogy $x = y + 4$, a második összefüggés átírható az alábbi alakra:

$$\frac{(y+4)(y+3)}{2} = \frac{y(y-1)}{2} + 62,$$

$$y^2 + 7y + 12 = y^2 - y + 124,$$

$$8y = 112,$$

$$y = 14 \;\Rightarrow\; x = 18.$$

Ezeket az értékeket beírva a harmadik egyenletbe:

$$\frac{z(z-1)}{2} = 18 + 14 + \frac{18 \cdot 17}{2} + \frac{14 \cdot 13}{2} \;\Rightarrow\; \frac{z(z-1)}{2} = 276 \;\Rightarrow\; z(z-1) = 552.$$

Ez megoldható másodfokú egyenletként ($z^2 - z - 552 = 0 \implies z_1 = 24$ és $z_2 = -23$), de kereshetjük egymást követő két pozitív egész szám szorzataként is a megoldást. Így csak a $24 \cdot 23 = 552$ megoldás lehetséges, amiből $z = 24$.

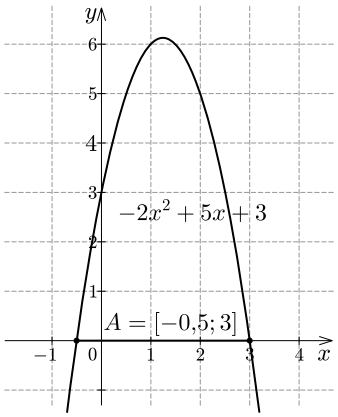
Így a gráfnak 24 csúcsa és $\frac{24 \cdot 23}{2} = 276$ éle van.

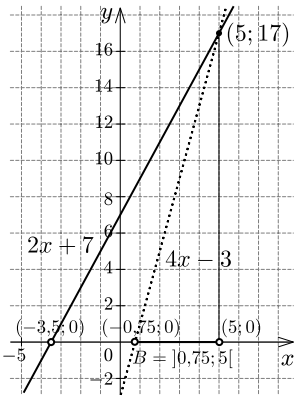
b) Az A halmaz meghatározásához a négyzetgyökfüggvény értelmezési tartományát figyelembe véve, meg kell oldanunk a következő egyenlőtlenséget:

$$-2x^2 + 5x + 3 \geqslant 0.$$

Az egyenlőtlenség megoldása: $\frac{-1}{2} \leqslant x \leqslant 3$, másképpen $x \in \left[\frac{-1}{2}; 3\right]$, azaz:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 3 \right\}.$$





A B halmaz meghatározásához figyelembe kell venni a logaritmusfüggvény értelmezési tartományát és a $0 < \frac{3}{\pi} < 1$ miatti szigorú monoton csökkenő tulajdonságát, így a következő lineáris egyenlőtlenségrendszert kell megoldani:

$$\begin{aligned} 4x - 3 > 0, &\quad \Rightarrow\ x > \frac{3}{4}, \\ 2x + 7 > 0, &\quad \Rightarrow\ x > -3{,}5, \\ 4x - 3 < 2x + 7; &\quad \Rightarrow\ x < 5. \end{aligned}$$

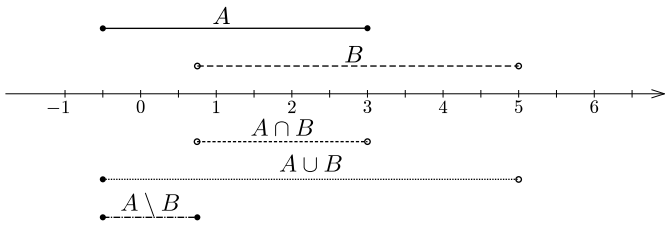
Az egyenlőtlenségrendszer megoldása: $\frac{3}{4} < x < 5$, másképpen $x \in \left]\frac{3}{4}; 5\right[$, azaz: $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{4} < x < 5\right\}$.

A keresett halmazműveletek eredményei:

$$A \cap B = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{3}{4} < x \leqslant 3\right\} = \left]\frac{3}{4}; 3\right],$$

$$A \cup B = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -\frac{1}{2} \leqslant x < 5\right\} = \left[-\frac{1}{2}; 5\right[,$$

$$A \setminus B = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}\right\} = \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right].$$



c) A 6 lány között 5 hely van L_L_L_L_L_L, ahová a fiúk ülhetnek. A négy fiúnak a „helye” ezáltal $\binom{5}{4}$-féleképpen „választható ki”. A lányok egymáshoz viszonyítva $6! = 720$, míg a fiúk $4! = 24$ különböző sorrendben ülhetnek le a székekre. Így az összes lehetőség száma:

$$\binom{5}{4} \cdot 6! \cdot 4! = 5 \cdot 720 \cdot 25 = 86\,400.$$

8. *Adott a NoSelejt cég által gyártott valamely termék $K(x) = x^3 - 12x^2 + 48x$ költségfüggvénye és a $B(x) = 300x$ bevételfüggvénye, ahol x az előállított mennyiséget jelenti (száz darabban), míg a $K(x)$ és a $B(x)$ értékei millió forintban értendők. A nyereséget a bevételek és a költségek különbsége adja.*

a) *Határozzuk meg azt a termékmennyiséget, amely esetén a cég nyeresége maximális.* (*5 pont*)

b) Határozzuk meg a $K(x)$ függvény grafikonja és a grafikon $x = 3$ abszcisszájú pontjához tartozó érintő által határolt korlátos, zárt síkidom területének mérőszámát. (*9 pont*)

c) Adjunk példát olyan egyváltozós valós f függvényre (ha létezik), amely differenciálható a valós számok halmazán, és $f'(3) = 0$, de az $x = 3$ nem szélsőértékhelye f-nek. (*2 pont*)

Megoldás. *a*) Jelölje $N(x)$ a nyereségfüggvényt, ekkor:

$$N(x) = B(x) - K(x) = 300x - (x^3 - 12x^2 + 48x) = -x^3 + 12x^2 + 252x \quad (x > 0).$$

A kapott $N(x)$ függvény maximumhelyét kell megkeresnünk. A szélsőértéket (az elsőrendű) derivált segítségével határozzuk meg:

$$N'(x) = -3x^2 + 24x + 252.$$

Megoldjuk az $N'(x) = 0$ egyenletet: $-3x^2 + 24x + 252 = 0$, ahonnan az egyenlet megoldásai $x_1 = -6$ (nem jó az $x > 0$ feltétel miatt), az $x_2 = 14$ teljesíti a feltételt.

Az „eredményeket” táblázatba foglalva:

x	$]0;14[$	14	$]14;\infty[$
$N'(x)$	$+$	0	$-$
$N(x)$	$\nearrow$	max.	$\searrow$

Az $x = 14$ (globális) maximumhelye az $N(x)$ függvénynek.

Tehát 1400 darab termék értékesítése után lesz a cég nyeresége maximális. (Ekkor a maximális nyereség: $N_{\max} = N(14) = -14^3 + 12 \cdot 14^2 + 252 \cdot 14 = 3136$ millió Ft.)

b) $K(3) = 3^3 - 12 \cdot 3^2 + 48 \cdot 3 = 63$, tehát a pont, ahová az érintőt húzzuk, a $P(3; 63)$.

Az érintő meredekségét a deriváltfüggvény adott pontbeli helyettesítési értéke adja meg. Mivel $K'(x) = 3x^2 - 24x + 48$, ezért az érintő meredeksége:

$$m = K'(3) = 3 \cdot 3^2 - 24 \cdot 3 + 48 = 3.$$

Így az érintő egyenlete: $y - 63 = 3(x - 3)$, ahonnan $y = 3x + 54$.

A továbbiakban először határozzuk meg, hogy hol metszi (még) egymást az érintő és a függvény grafikonja. Ehhez meg kell oldanunk az $x^3 - 12x^2 + 48x = 3x + 54$ (harmadfokú) egyenletet. A megoldásban „segítségünkre lesz”, hogy tudjuk, az $x = 3$ megoldása az egyenletnek (hiszen az $x = 3$ abszcisszájú pontjában érinti az érintő a függvény grafikonját).

$$x^3 - 12x^2 + 48x = 3x + 54 \;\Rightarrow\; x^3 - 12x^2 + 45x - 54 = 0.$$

Megfelelő csoportosítással szorzattá alakíthatunk:

$$x^3 - 13x^2 + 45x - 54 = \underbrace{x^3 - 3x^2}\underbrace{-9x^2 + 27x}\underbrace{+18x - 54} =$$

$$= x^2 \cdot (x - 3) - 9x \cdot (x - 3) + 18 \cdot (x - 3) = (x - 3)(x - 3)(x - 6) =$$

$$= (x - 3)^2(x - 6).$$

Tehát: $(x-3)^2(x-6)=0 \;\Rightarrow\; x=6$ (lesz a másik metszéspont abszcisszája).

A szorzattá alakítás megtörténhet a polinomok osztásának, a másodfokú egyenletek megoldásának, majd a polinomok gyöktényezős alakjának a felhasználásával is.

Figyelembe véve, hogy a $[3;6]$ intervallumon $(x-3)^2(x-6)\leqslant 0$, könnyen belátható, hogy ezen az intervallumon a $K(x)$ függvény grafikonja mindvégig az érintő alatt halad, hiszen:

$$x^3-12x^2+45x-54=(x-3)^2(x-6)\leqslant 0 \;\Rightarrow\; x^3-12x^2+48x\leqslant 3x+54.$$

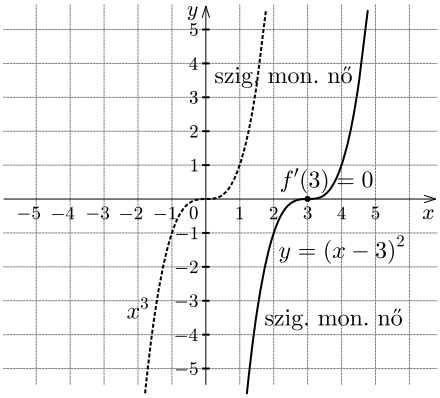
Így a kérdéses korlátos, zárt síkidom területének mérőszáma:

$$\int_3^6 \left[-(x^3-12x^2+45x-54)\right]\mathrm{d}x=\int_3^6(-x^3+12x^2-45x+54)\,\mathrm{d}x=$$

$$=\left[-\frac{x^4}{4}+12\cdot\frac{x^3}{3}-45\cdot\frac{x^2}{2}+54x\right]_3^6=$$

$$=\left(-\frac{6^4}{4}+4\cdot 6^3-45\cdot\frac{6^2}{2}+54\cdot 6\right)-\left(-\frac{3^4}{4}+4\cdot 3^3-45\cdot\frac{3^2}{2}+54\cdot 3\right)=$$

$$=(-324+864-810+324)-\left(-\frac{81}{4}+108-\frac{405}{2}+162\right)=54-\frac{189}{4}=\frac{27}{4}.$$



c) Olyan f^* függvényt „kell keresnünk”, amely (például) szigorúan növekvő, és $(f^*)'$ nullával egyenlő egyes pontokban.

Van ilyen függvény, pl. az

$$f^*:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f^*(x)=x^3.$$

Ebből egyszerű függvénytranszformációval megkapható a feladat feltételeinek megfelelő függvény:

$$f(x)=(x-3)^3.$$

Megjegyzés. Bár a feladat nem kér részletes indoklást, de ellenőrizhetjük, megfelel-e a feltételeknek az $f(x)$:

$$f(x)=(x-3)^3 \;\Rightarrow\; f'(x)=3(x-3)^2 \;\Rightarrow\; f'(3)=0.$$

Továbbá $f'(x)>0$ minden $x\neq 3$ esetén, így $f(x)$ szigorúan monoton növekvő minden $x\in\mathbb{R}$-re, tehát nem lesz szélsőértéke az $x=3$ helyen, annak ellenére, hogy $f'(3)=0$.

9. *Peches Pál nagyon szereti a kaparós sorsjegyeket. Kedvence a Lutri sorsjegy, melynek ára* 500 *Ft, és a sorsjegyek* 25%*-a nyerő. Pálnak (most csak) négy darab* 500 *forintosa van. Bemegy egy lottózóba, és elhatározza, hogy addig vásárolja kedvenc sorsjegyét, amíg nem nyer, vagy ameddig a pénze el nem fogy.*

a) Határozzuk meg a Pál által a sorsjegy(ek)re elköltött 500 *forintosok számának várható értékét és szórását.* (*7 pont*)

Pál háromféle tömegközlekedési eszközzel tudja munkahelyét megközelíteni, éspedig busszal, metróval, illetve villamossal, ezért (is) kombinált bérlettel rendelkezik. Az esetek 25%*-ában busszal megy, a metrót pedig négyszer olyan gyakran használja, mint a villamost. A buszon átlagosan minden negyedik, a villamoson átlagosan minden tizedik alkalommal ellenőrzik a bérletét, míg annak a valószínűsége, hogy a metrón kap ellenőrzést,* 0,85.

b) Egyik alkalommal ellenőrizték a bérletét. Mennyi annak a valószínűsége, hogy villamossal utazott? (*6 pont*)

Egyik nap (a munkanap végén) Pál egy ötfős baráti társaság tagjaként busszal utazott haza. Az egyik megállóban ellenőrök szálltak fel, és a buszon (aktuálisan) tartózkodó 48 *utasból találomra kiválasztott tíz embernek a bérletét (vagy jegyét) ellenőrizték.*

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az ötfős baráti társaságból legalább két főt ellenőriztek? (*3 pont*)

Megoldás. *a)* A ξ valószínűségi változó jelentse a sorsjegyért elköltött 500 forintosok számát. Annak a valószínűsége, hogy egy sorsjegy nyerő, $\frac{1}{4}$, míg annak, hogy nem nyerő, $\frac{3}{4}$. A ξ valószínűségi változó lehetséges értékei: 1; 2; 3; 4 (a $\xi = 4$ eset „magában foglalja” azt az esetet is, amikor az utolsó vásárolt sorsjegy nyerő, illetve azt is, amikor nem nyerő).

$P(\xi = 1) = \dfrac{1}{4}\left(= \dfrac{16}{64}\right)$ (már az első megvásárolt sorsjegy nyerő).

$P(\xi = 2) = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{16}\left(= \dfrac{12}{64}\right)$ (az első megvásárolt sorsjegy nem nyerő, de a második igen).

$P(\xi = 3) = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{9}{64}$ (az első két sorsjegy nem nyerő, de a harmadik nyerő).

$P(\xi = 4) = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{108}{256} = \dfrac{27}{64}$ (az első három sorsjegy nem nyerő, de a negyedik nyerő, illetve egyik vásárolt sorsjegy sem nyerő).

A ξ valószínűségi változó eloszlása:

x_i	1	2	3	4	$\sum$
$P(\xi = x_i)$	$\frac{16}{64}$	$\frac{12}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	1

A ξ valószínűségi változó várható értéke:

$$M(\xi)=\sum_{i=1}^{4} x_i\cdot P(\xi=x_i)=1\cdot\frac{16}{64}+2\cdot\frac{12}{64}+3\cdot\frac{9}{64}+4\cdot\frac{27}{64}=\frac{175}{64}\approx 2{,}73.$$

A szóráshoz szükséges (a ξ valószínűségi változó második momentuma):

$$M(\xi^2)=\sum_{i=1}^{4} x_i^2\cdot P(\xi=x_i)=1^2\cdot\frac{16}{64}+2^2\cdot\frac{12}{64}+3^2\cdot\frac{9}{64}+4^2\cdot\frac{27}{64}=\frac{577}{64}\approx 9{,}02.$$

A ξ valószínűségi változó szórása:

$$D(\xi)=\sqrt{D^2(\xi)}=\sqrt{M(\xi^2)-M^2(\xi)}=\sqrt{\frac{577}{64}-\left(\frac{175}{64}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{6303}{4096}}=\frac{\sqrt{6303}}{64}\approx 1{,}24.$$

b) Jelölje B azt az eseményt, hogy busszal, M azt, hogy metróval, illetve V azt, hogy villamossal közelíti meg Pál a munkahelyét. A feladat feltételei alapján: $P(\mathrm{B})=0{,}25$, $P(\mathrm{V})=x$, $P(\mathrm{M})=4x$ ($x\in\mathbb{R}^+$).

Mivel a B, M és V események teljes eseményrendszert alkotnak, így:

$$P(\mathrm{B})+P(\mathrm{M})+P(\mathrm{V})=1 \;\Rightarrow\; 0{,}25+4x+x+1=1\Rightarrow 5x=0{,}75 \;\Rightarrow\; x=0{,}15.$$

Ebből következik, hogy: $P(\mathrm{B})=0{,}25$, $P(\mathrm{M})=0{,}60$, $P(\mathrm{V})=0{,}15$.

Jelölje E azt az eseményt, hogy Pál ellenőrzést kap valamelyik (általa használt) közlekedési eszközön. Így (feltételes valószínűségekkel van dolgunk):

$$P(\mathrm{E}\mid\mathrm{B})=\frac{1}{4}=0{,}25,\quad P(\mathrm{E}\mid\mathrm{M})=0{,}85,\quad P(\mathrm{E}\mid\mathrm{V})=\frac{1}{10}=0{,}10.$$

A feladat „kérdése”: $P(\mathrm{V}\mid\mathrm{E})=?$. Figyelembe véve, hogy $P(\mathrm{V}\mid\mathrm{E})=\frac{P(\mathrm{V}\cdot\mathrm{E})}{P(\mathrm{E})}$, a megadott és kiszámított adatok alapján (alkalmazva a teljes valószínűség tételét):

$$P(\mathrm{E})=P(\mathrm{E}\mid\mathrm{B})\cdot P(\mathrm{B})+P(\mathrm{E}\mid\mathrm{M})\cdot P(\mathrm{M})+P(\mathrm{E}\mid\mathrm{V})\cdot P(\mathrm{V})=$$

$$=0{,}25\cdot 0{,}25+0{,}85\cdot 0{,}60+0{,}10\cdot 0{,}15=0{,}5875.$$

Mindezek alapján:

$$P(\mathrm{V}\mid\mathrm{E})=\frac{P(\mathrm{V}\mid\mathrm{E})}{P(\mathrm{E})}=\frac{P(\mathrm{E}\mid\mathrm{V})\cdot P(\mathrm{V})}{P(\mathrm{E})}=\frac{0{,}10\cdot 0{,}15}{0{,}5875}=\frac{0{,}0150}{0{,}5875}=\frac{6}{235}\approx 0{,}0255.$$

Tehát annak a valószínűsége, hogy Peches Pál villamossal utazott:

$$P(\mathrm{V}\mid\mathrm{E})\approx 0{,}0255.$$

c) Jelölje C azt az eseményt, hogy legalább két főt ellenőriztek. Ekkor a $\overline{C}$: az ötfős baráti társaságból kettőnél kevesebb főt (azaz 0-t vagy 1-et) ellenőriztek.

A nem ellenőriztek senkit a baráti társaságból (esemény) valószínűsége:

$$\frac{\binom{5}{0}\cdot\binom{43}{10}}{\binom{48}{10}} \approx 0{,}2931.$$

Az egy főt ellenőriztek esemény valószínűsége:

$$\frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{43}{9}}{\binom{48}{10}} \approx 0{,}4311.$$

Az ötfős baráti társaságból kettőnél kevesebb főt (azaz 0-t vagy 1-et) ellenőriztek valószínűsége:

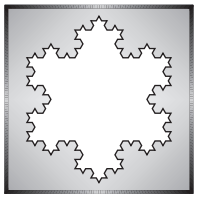
$$\frac{\binom{5}{0}\cdot\binom{43}{10}}{\binom{48}{10}} + \frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{43}{9}}{\binom{48}{10}} \approx 0{,}7242.$$

Mindezek alapján: $P(C) = 1 - P(\overline{C}) \approx 0{,}2758$. Tehát annak a valószínűsége, hogy az ötfős baráti társaságból legalább két főt ellenőriztek:

$$P(C) \approx 0{,}2758.$$

Marczis György (Gyula)
Molnár István (Gyula)
Molnár Judit (Gyula)
Rókáné Rózsa Anikó (Békéscsaba)

C gyakorlat megoldása



C. 1685. *Egy királyi család nyolc gyermeke közül a legidősebb uralkodik. A testvérek mindegyike pontosan akkor uralkodik, amikor ő a legidősebb még élő személy közülük. Viszont ezen a királyi családon átok ül: ha három testvér, kik korban egymást követik, mind trónra kerülnek, akkor a rákövetkező testvérük meghal reménytelenségében. Hányféleképpen uralkodhatnak, ha csak arra vagyunk tekintettel, hogy kik kerülnek trónra a testvérek közül?*

I. megoldás. Ha nem ülne átok a királyi családon, azaz uralkodhatnának a korban egymást követő testvérek közül 3-nál többen is egymás után, akkor az első kivételével minden gyermek vagy trónra kerül, vagy nem (az első uralkodik éppen, ezért ő biztosan trónra kerül). Így ekkor $2^7 = 128$-féleképp kerülhetnének trónra. Viszont

azokat az eseteket ebből ki kell vonnunk, amikor 3-nál több, korban egymást követő testvér kerül trónra, hiszen a családon átok ül, így ezek nem lehetségesek. Ezeket a kivonandó lehetőségeket esetekre bontottam aszerint, hogy mennyi a legnagyobb m száma azon testvéreknek, akik korban egymást követik, és egymás után uralkodnak. Ezek a testvérek megkapják az M címkét is. A táblázatokban az x-szel jelölt testvérek uralkodnak, míg a többiek nem.

1	2	3	4	5	6	7	8
x	x	x	x	x	x	x	x

$m = 8$

Az első esetben $m = 8$, tehát mindenki trónra kerül, ami 1-féleképp történhet meg.

A második esetben $m = 7$, ami csak úgy lehetséges, hogy az utolsót kivéve mindenki uralkodik (hiszen az első biztosan uralkodik). Ez szintén 1 lehetőség.

1	2	3	4	5	6	7	8
x	x	x	x	x	x	x	

$m = 7$

1	2	3	4	5	6	7	8
x	x	x	x	x	x		
x	x	x	x	x	x		x
x		x	x	x	x	x	x

$m = 6$

1	2	3	4	5	6	7	8
x	x	x	x	x			
x	x	x	x	x			x
x	x	x	x	x		x	
x	x	x	x	x		x	x
x		x	x	x	x	x	
x			x	x	x	x	x
x	x		x	x	x	x	x

$m = 5$

A harmadik esetben $m = 6$. Ekkor vagy az első 6 M címkéjű, vagy az utolsó 6, hiszen ha a középső 6 lenne M, akkor közülük az első a legidősebb gyermek melletti, ezért $m = 7$ lenne. Ha az első 6 M címkéjű, akkor az utolsó gyermek vagy uralkodik, vagy nem, ami 2 lehetőség, míg ha az utolsó 6 az M címkéjű, csak egy lehetőség van, mivel az első gyermek biztosan uralkodik. Ez összesen 3 lehetőség.

A következő esetben $m = 5$. Ekkor M címkéjű lehet az első 5, ekkor az utolsó kettő vagy uralkodik, vagy nem, ami $2^2 = 4$ lehetőség; a 3.-tól a 7. gyermek, ekkor (az elsőn kívül) más nem uralkodhat; vagy az utolsó 5, amikor a 2. vagy uralkodik, vagy nem (2 lehetőség). Ez összesen $4 + 1 + 2 = 7$ lehetőség.

1	2	3	4	5	6	7	8
x	x	x	x		x	x	x
x		x	x	x	x		
x		x	x	x	x		x
x			x	x	x	x	
x	x		x	x	x	x	
x				x	x	x	x
x	x			x	x	x	x
x		x		x	x	x	x
x	x	x		x	x	x	x

$m = 4$

Az utolsó esetben $m = 4$. Ekkor ha az első 4 M címkéjű, az utolsó 3 vagy uralkodik, vagy nem, ami $2^3 = 8$-féle lehetőség (ezekből csak egyet tüntettem fel a táblázatban). Ha a 3.-tól a 6.-ig M címkéjűek, az utolsó vagy uralkodik, vagy nem, ami 2-féleképp történhet. Ha M címkés a 4.-től a 7., akkor a 2. vagy uralkodik, vagy nem, ez szintén 2 lehetőség. Ha pedig az utolsó 4 uralkodik, akkor a 2. és a 3. vagy uralkodik, vagy nem, ami $2^2 = 4$-féleképp valósulhat meg. Azaz $m = 4$ összesen $8 + 2 + 2 + 4 = 16$-féleképp lehetséges.

Tehát összesen $1+1+3+7+16=28$-féleképp lehet $m>3$. Így valójában a testvérek $128-28=100$-féleképp kerülhetnek trónra.

Egyházi Hanna (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 12. évf.)

II. megoldás. Jelöljük a 8 gyereket betűkkel életkor szerint csökkenő sorrendben: A, B, C, D, E, F, G, H. Tudjuk, hogy a legidősebb, azaz A uralkodik először.

Bontsuk csoportokra azokat az eseteket, ahol különböző számú gyerek uralkodik. Helyes uralkodó kiválasztás alatt olyan kiválasztást értek, ahol maximum 3, életkorban egymást követő személy van kiválasztva.

Ha helyesen kiválasztjuk az uralkodókat, akkor egyértelműen meghatároztuk az esetet, mert a kiválasztott emberek életkor szerint csökkenő sorrendben fognak uralkodni. Ezért minden különböző kiválasztás különböző esetet fog jelenteni.

– Ha pontosan 1 fő uralkodott a 8 fő közül: Mivel A biztosan először uralkodott, ezért itt csak 1 lehetséges helyes kiválasztás van.

– Ha pontosan 2 fő uralkodott a 8 fő közül: Az első uralkodó biztosan A, a második pedig bárki lehet a többi 7 gyerek közül. Ezért ez 7 lehetséges helyes kiválasztás.

– Ha pontosan 3 fő uralkodott a 8 fő közül: Az első uralkodó biztosan A, a második és a harmadik uralkodót pedig $\binom{7}{2}=\frac{7\cdot 6}{2!}=21$-féleképpen választhatjuk ki. (Az A-n kívüli 7 főből 2-t kell kiválasztani úgy, hogy a kiválasztás sorrendje nem számít). Ezek közül az esetek közül mindegyik kiválasztás helyes, mert egyik esetben sem volt 4, életkorban egymást követő uralkodó. 21 lehetséges helyes kiválasztás van.

– Ha pontosan 4 fő uralkodott a 8 fő közül: Az első uralkodó biztosan A. A másik 3 uralkodót $\binom{7}{3}=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3!}=35$-féleképpen választhatjuk ki. Mivel A biztosan a kiválasztottak között van, ezért pontosan 1 eset lesz helytelen kiválasztás, amikor a 4 kiválasztott fő A, B, C és D. A többi 34 esetben nem lesz 3-nál több, életkorban egymást követő személy a kiválasztottak között. Azaz 34 helyes kiválasztás van.

– Ha pontosan 5 fő uralkodott a 8 fő közül: Az első uralkodó biztosan A. A másik 4 uralkodót $\binom{7}{4}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{4!}=35$-féleképpen választhatjuk ki. A helytelen kiválasztások, amikor az A-n kívüli 4 uralkodó életkorban egymást követi, ebből 4 eset van ($B-C-D-E$, $C-D-E-F$, $D-E-F-G$, $E-F-G-H$); illetve, amikor A miatt létezik egy 4 főből életkorban egymást követő személyekből álló uralkodó négyes, ebből 3 eset van ($A-B-C-D-F$, $A-B-C-D-G$, $A-B-C-D-H$). $(4+3=)7$ helytelen kiválasztás van. Vonjuk ki az összes kiválasztásból a helytelen kiválasztásokat, és megkapjuk a helyeseket: $35-7=28$ helyes kiválasztás van.

– Ha pontosan 6 fő uralkodott a 8 fő közül: Ekkor pontosan 2 fő nem fog uralkodni. Ha őket meghatározzuk, akkor egyben az uralkodó 6 főt is meghatározuk. A két fő lehet: $B-E$, $B-F$, $C-E$, $C-F$, $C-G$, $D-E$, $D-F$, $D-G$, $D-H$. Ez 9 eset, 9 helyes kiválasztás van.

Egymást követő életkorú 3 gyerek esetén meghal az életkorban csökkenő sorrendben rákövetkező személy, így elmondható, hogy bármely 4 egymást követő gyerek közül legfeljebb 3 uralkodhat.

Ez alapján, ha kiválasztjuk az $A-B-C-D$ négy főből álló csoportot, tudjuk, hogy közülük legfeljebb 3 fog uralkodni. Ugyanez elmondható az $E-F-G-H$ csoportra is, ezért legfeljebb $(3+3=)$ 6 fő uralkodhat a 8 gyerek közül.

Adjuk össze a kapott lehetséges eseteket:

$$1+7+21+34+28+9=100.$$

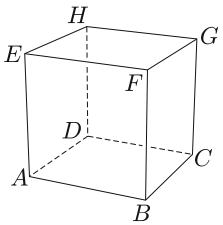
A királyi család 8 gyermeke 100-féleképpen uralkodhatott.

Nagy Korina (Kecskeméti Bányai Júlia Gimn., 9. évf.)

Megjegyzés. A honlapon ezektől különböző megoldások olvashatók, azonban a versenyzők zöme a két fenti megoldásmenet egyikét választotta.

159 dolgozat érkezett. 5 pontos 77 versenyző. 4 pontos 22, 3 pontos 15, 2 pontos 8, 1 pontos 8, 0 pontos 9 dolgozat. Nem versenyszerű 1 dolgozat. Nem számítjuk a versenybe a születési dátum vagy a szülői nyilatkozat hiánya miatt: 1 dolgozat.

Matematika feladatok megoldása



B. 5114. *Az $ABCDEFGH$ egységkockát elmetszettük egy síkkal úgy, hogy az AB és AD éleket az A-tól azonos, x távolságra levő P és Q belső pontjaikban, a BF élt pedig az R pontban metszi. Mekkora a BR távolság, ha $QPR\sphericalangle = 120°$?*

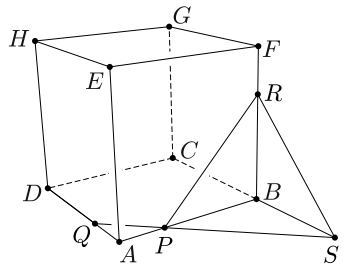
(4 pont)

I. megoldás. A feladatban egységkocka szerepel, ezért a BP szakasz $1-x$ hosszúságú. Hosszabbítsuk meg a kocka CB élét a B csúcson túl az $1-x$ hosszúságú szakasszal, legyen ez a pont S (*1. ábra*).

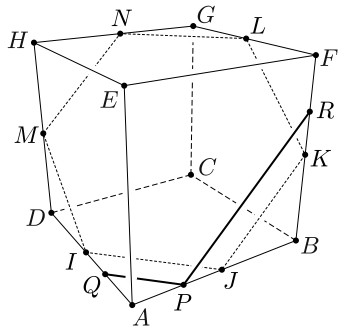
A szakaszok egyenlősége alapján QAP és PBS egyenlő szárú derékszögű háromszögek, $APQ\sphericalangle = BPS\sphericalangle = 45°$. Tehát a Q, P és az S pontok egy egyenesbe esnek. Ehhez hozzávéve az R pontot, azt is látjuk, hogy a Q, P, S és R pontok egy síkban vannak. A PS szakasz felezőmerőleges síkjára illeszkedik a BF él, így $PR=SR$. A PSR egyenlő szárú háromszög alapon fekvő RPS szögének külső szöge a feladat feltétele alapján 120°; vagyis az alapon fekvő szögek 60°-osak, a PSR háromszög szabályos.

Végül tekintsük a BPS és BPR derékszögű háromszögeket. A BP befogójuk közös, átfogóik egyenlő hosszúak, tehát a két háromszög egybevágó. Ezzel beláttuk, hogy a BR szakasz $BR=BS=1-x$ hosszúságú.

Varga Boldizsár (Verőce, Géza Fejedelem Ref. Ált. Isk., 8. évf.)
dolgozata alapján



1. ábra



2. ábra

II. megoldás. Ismert, hogy az AB, AD, DH, HG, GF és FB oldalak felezőpontjai egy szabályos hatszöget határoznak meg (hiszen egyenlő hosszúak, a hatszög szemköztes oldalai párhuzamosak és 120°-ra forgásszimmetrikus).

Ez a hatszög megkapható úgy is, ha vesszük a kocka felszínének és a középpontján áthaladó, CE főátlójára merőleges síkjának a metszetét (*2. ábra*).

Könnyen látható, hogy a középpont helyett más pontot véve a CE átlón szintén olyan hatszög lesz a metszet (persze csak olyan esetben, ha az így kapott sík metszi az oldalakat), melynek minden belső szöge 120°-os. Ez amiatt van így, mert az oldalai páronként párhuzamosak lesznek azzal az esettel összevetve, amikor a középpontot választjuk ki, és a hatszög szabályos.

Vegyük fel tehát azt a hatszöget ilyen módon, melynek AB és AD oldalon lévő P és Q csúcsai x távolságra vannak az A ponttól. Ekkor a párhuzamos eltolás miatt $RPB\sphericalangle = 45°$, PBR egyenlő szárú derékszögű háromszög, vagyis

$$BR = 1 - x.$$

Másik R pontra tudjuk, hogy nem lesz igaz, hogy $QPR\sphericalangle = 120°$, hiszen ahogy az R pont távolodik B-től, úgy a $QPR\sphericalangle$ szög szigorúan monoton csökken, ezért csak egy olyan helyzet lehet, melyre éppen 120° a szög és a korábbiak miatt ez pontosan az, amikor

$$BR = BP = 1 - x.$$

Hervay Bence (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

Megjegyzés: A feladat rövid számolással is megoldható. BR hosszát, mint változót bevezetve, Pitagorasz-tétellel BR-ből és x-ből kifejezhető a PQ, PR és RQ szakaszok hossza, majd a PQR háromszögre felírt koszinusztételben a QPR szög koszinusza $-0{,}5$. Kapunk egy paraméteres másodfokú egyenletet BR-re, melynek egyetlen 0 és 1 közötti megoldása $1 - x$.

Hervay Bence (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

Összesen 106 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 84 versenyző, 3 pontos 10, 2 pontos 3, 1 pontos 3 tanuló dolgozata. 0 pontot kapott 1 tanuló. Nem versenyszerű 5 dolgozat.

B. 5207. *Bizonyítsuk be, hogy minden $n \geqslant 2$ természetes számra léteznek olyan $2 \leqslant x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n$ pozitív egész számok, amelyekre*

$$x_1! \cdot x_2! \cdot x_3! \cdot \ldots \cdot x_n!$$

négyzetszám.

(*4 pont*) Javasolta: *Szoldatics József* (Budapest)

Megoldás.

Lemma. *Minden* 1*-nél nagyobb pozitív egész a-ra $(a^2-1)! \cdot a^2!$ négyzetszám.*

A lemma bizonyítása. Mivel $a^2! = a^2 \cdot (a^2-1)!$, ezért

$$(a^2-1)! \cdot a^2! = (a^2-1)! \cdot a^2 \cdot (a^2-1)! = a^2 \cdot \big((a^2-1)!\big)^2 = \big(a \cdot (a^2-1)!\big)^2.$$

Most rátérünk a feladat állításának bizonyítására.

1. eset: Ha n páros, akkor az $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n$ számokat párokba rendezem úgy, hogy minden x_{2k} az x_{2k-1}-gyel áll párban, ahol x_{2k} a $(k+1)$-edik pozitív négyzetszám és x_{2k-1} a $(k+1)$-edik pozitív négyzetszámnál 1-gyel kisebb szám. Mivel végtelen sok négyzetszám van, ezért mindig ki tudunk k darab négyzetszámot választani.

Ekkor a lemma szerint mindegyik $x_{2k-1}! \cdot x_{2k}!$ szorzat négyzetszám, ezért a párok szorzata is négyzetszám.

2. eset: Ha n páratlan, akkor legyen $x_1 = 4$, $x_2 = 5$, $x_3 = 6$. Ezek faktoriálisainak szorzata:

$$4! \cdot 5! \cdot 6! = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5^2,$$

amelynek prímtényezős felbontásában az összes kitevő páros, így négyzetszám, ezzel $n = 3$-ra készen vagyunk. Ha $n \geqslant 5$, akkor legyen továbbra is $x_1 = 4$, $x_2 = 5$, $x_3 = 6$, és x_4-től x_n-ig szintén párba rendezzük a számokat az előző esetben mutatott módszerrel, az $x_4 = 8$, $x_5 = 9$ párral kezdve, utána pedig minden x_{2k+1} a $(k+1)$-edik pozitív négyzetszám, minden x_{2k} pedig 1-gyel kisebb x_{2k+1}-nél, így az $x_1! \cdot x_2! \cdot x_3! \cdot \ldots \cdot x_n!$ szorzat ebben az esetben is négyzetszám.

Ezzel a feladat állítását mindkét esetben beláttuk.

Andai Márk (Tata, Eötvös J. Gimn., 10. évf.)

Összesen 131 dolgozat érkezett. 4 pontos 99, 3 pontos 17, 2 pontos 8 dolgozat. 1 pontot 3 versenyző kapott. Nem versenyszerű: 4 dolgozat.

B. 5212. *Igazoljuk, hogy létezik olyan pozitív egész szám, amely legalább* 2021*-féleképpen állítható elő úgy, hogy egy (tízes számrendszerben felírt) pozitív egész számhoz hozzáadjuk a számjegyeinek összegét.*

(*6 pont*) Javasolta: *Sándor Csaba* (Budapest)

Megoldás. Teljes indukcióval fogunk bizonyítani. A legnagyobb szám, ami n-féleképpen előáll, mindig $10^k + 1$ alakú lesz, a legnagyobb számból való előállítása

pedig az, ha 10^k-hoz adjuk hozzá számjegyeinek összegét, ami 1 (ennél nagyobb számhoz a számjegyei összegét adva biztos nagyobbat kapunk, ezért mondhatjuk, hogy ez a legnagyobb számból való előállítás).

$n = 2$-re $10^2 + 1 = 100 + 1 = 91 + 9 + 1$ a két előállítás.

Tegyük fel, hogy van egy $10^k + 1$ szám, ami n különböző számból előállítható, amelyek közül a legnagyobb 10^k. Azt akarjuk tehát most belátni, hogy van egy olyan $10^K + 1$ szám, ami $(n + 1)$-féleképpen is előáll.

Minden eddigi számhoz, ami a $10^k + 1$ különböző előállításaiban szerepelt, adjuk hozzá a

$$9 \cdot 10^{k+1} + 9 \cdot 10^{k+2} + 9 \cdot 10^{k+3} + \ldots + 9 \cdot 10^{k+10^k} = 10^{10^k+k+1} - 10^{k+1}$$

számot. Mivel a $10^k + 1$ előállításaiban szereplő legnagyobb szám a 10^k volt, így ezekkel a számokkal annyi történt, hogy a számok elé a 10^{k+1}-es helyiértéktől kezdve a 10^{k+10^k}-es helyiértékig 9-eseket írtunk (és utánuk esetleg valahány 0-t), ez 10^k darab 9-es. Így az összes eddigi n szám és számjegyeinek összege a hozzáadott számmal és annak számjegyeinek összegével, $9 \cdot 10^k$-nal nőtt, így minden kapott új szám és számjegyeinek összege

$$(10^k + 1) + \left(10^{10^k+k+1} - 10^{k+1}\right) + 9 \cdot 10^k = 10^{10^k+k+1} - 10^{k+1} + 10 \cdot 10^k + 1 =$$
$$= 10^{10^k+k+1} + 1.$$

Ez a szám pedig úgy is előáll, ha a 10^{10^k+k+1} számhoz hozzáadjuk számjegyeinek összegét, 1-et. Vagyis a keresett $10^K + 1$ szám, ami $(n + 1)$-féleképpen előáll: $10^{10^k+k+1} + 1$.

Így minden pozitív egész n-re létezik olyan szám, ami n-féleképpen előáll egy szám és a számjegyösszegének összeadásával, vagyis $n = 2021$-re is.

Jánosik Máté (Győr, Révai Miklós Gimn., 12. évf.)

42 dolgozat érkezett. 6 pontos 34, 5 pontos 1, 4 pontos 3, 3 pontos 1, 0 pontos 1 dolgozat. Nem számítjuk a versenybe a születési dátum vagy a szülői nyilatkozat hiánya miatt: 2 dolgozat.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (724–728.)

K. 724. Juli felvágott egy pizzát egyforma szeletekre. Ezután néhány szeletet megevett, 3 szelet viszont megmaradt. Kicsit számolgatva azt vette észre, hogy az egész pizza 3/4 részét plusz egy szelet 3/4 részét ette meg. Hány szeletre vágta a pizzát?

K. 725. Egy 3×3-as táblázat kilenc mezőjére valamilyen sorrendben egy-egy számot írunk a következő szabály szerint: minden mezőre azt a számot írjuk, amely megmutatja, hogy annak a mezőnek hány olyan oldalszomszédja van, amire már írtunk számot. Milyen sorrendben töltöttük ki a táblázat mezőit? Hány lehetőség van? (A mezőket $a1, a2, \ldots, c2, c3$ kódokkal jelöljük.)

a)

3	0	1	1
2	2	3	1
1	2	1	1
	a	*b*	*c*

b)

3	2	1	0
2	1	2	3
1	2	0	1
	a	*b*	*c*

K. 726. Rendezzük el az $1, 2, 3, 4, \ldots, 31, 32$ számokat egy kör mentén úgy, hogy bármely két szomszédos szám összege négyzetszám legyen. Írjuk le azt is, hogy hogyan gondolkoztunk.

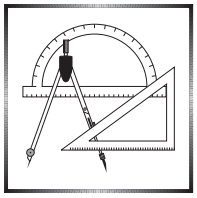
K/C. 727. Egy $n \times n$-es táblázat mezőire egy-egy pénzérmét helyezünk el úgy, hogy mindegyik érmén a „fej” van felül. Egy lépésben bármelyik sorban vagy oszlopban pontosan három érmét fordíthatunk meg, így azokon a fejből írás lesz, az írásból pedig fej. Elérhetjük-e így valahány lépésben, hogy minden érmén írás legyen felül, ha $n > 2$? Válaszunkat indokoljuk.

K/C. 728. Van 10 darab számkártyánk, rajtuk az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számok. A számkártyákat letesszük egy sorba az asztalra és rájuk írjuk a sorszámukat, azaz 1-től 10-ig beszámozzuk a lapokat. Így minden lapon két szám szerepel. Minden lapon összeszorozzuk a két számot, majd a szorzatokat összeadjuk. Mennyi lesz a kapott érték,

a) ha ez a lehető legkisebb,

b) ha ez a lehető legnagyobb?

Beküldési határidő: 2022. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`



A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (727–728., 1709–1713.)

Feladatok 10. évfolyamig

K/C. 727. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

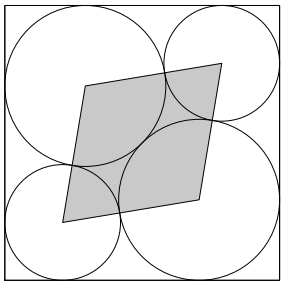
K/C. 728. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

Feladatok mindenkinek

C. 1709. Az a és b egész számok osztói a 720-nak, ab pedig nem osztója 720-nak. Hány ilyen rendezett $(a; b)$ számpár van?

Javasolta: *Róka Sándor* Nyíregyháza)

C. 1710. Egy egységnyi oldalú négyzetbe négy kört rajzolunk az *ábrán* látható módon. A két nagyobbik kör egyforma méretű és érintik egymást és a négyzet oldalait is. A két kisebbik egybevágó, ezek szintén érintik a négyzet oldalait és a nagy köröket is. Mekkora a körök középpontjai által meghatározott rombusz területe?



C. 1711. Oldjuk meg az

$$\sqrt{x-1801}+\sqrt{y-1860}=2-\frac{1}{\sqrt{x-1801}}$$

egyenletet, ha x és y valós számok.

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1712. Mekkorák lehetnek annak az ötszögnek az ismeretlen szögei, melynek minden oldala egyforma hosszúságú és van két derékszöge?

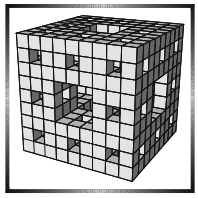
Javasolta: *Károlyi Gergely* (Budajenő)

C. 1713. Az x és a olyan valós számok, amelyekre teljesül, hogy $x+\frac{1}{x}=a$. Határozzuk meg a függvényében az $x^{13}+\frac{1}{x^{13}}$ értékét.

Beküldési határidő: 2022. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

A B pontversenyben kitűzött feladatok (5230–5237.)



B. 5230. Az AB átmérőjű félköríven kijelöltük a C és D pontokat. Az A és B pontból a CD egyenesre állított merőlegesek talppontját jelölje A', illetve B'. Bizonyítsuk be, hogy az $A'C$ és $B'D$ szakaszok hossza egyenlő.

(*3 pont*) Javasolta: *Surányi László* (Budapest)

B. 5231. Bizonyítsuk be, hogy minden n pozitív egészre teljesül, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} \cdot (2^k - 1).$$

(*4 pont*)

B. 5232. Az ABC hegyesszögű háromszög belsejében, a C-ből induló súlyvonalon vegyük fel a P pontot úgy, hogy $APB\sphericalangle = 180^\circ - ACB\sphericalangle$ teljesüljön. Igazoljuk, hogy az AB egyenes érinti az APC kört.

(*4 pont*) Javasolta: *Kocsis Szilveszter* (Budapest)

B. 5233. Egy szabályos hatszög csúcsaira véletlenszerű sorrendben felírjuk az $1, 2, \ldots, 6$ számokat. Ezután a hatszög minden oldalára ráírjuk a két végpontján szereplő számok különbségének abszolútértékét. Határozzuk meg az oldalakra írt hat szám összegének várható értékét.

(*4 pont*) Javasolta: *Szoldatics József* (Budapest)

B. 5234. Az n pozitív egész számot nevezzük *mitikusnak,* ha minden osztója 2-vel kisebb egy prímszámnál. Például a 15 mitikus szám. Legfeljebb hány osztója lehet egy mitikus számnak? Adjuk meg az összes olyan mitikus számot, amelynek maximális számú osztója van.

(*5 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

B. 5235. Mutassuk meg, hogy a Fibonacci-sorozatban minden 3-nál nagyobb prímszám $4k + 1$ alakú.

(*5 pont*)

B. 5236. Legyen a, b, c három pozitív valós szám úgy, hogy $abc = 1$. Mutassuk meg, hogy

$$a + a^2 + a^3 + b + b^2 + b^3 + c + c^2 + c^3 \leqslant \left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2.$$

(*6 pont*) Javasolta: *Lovas Márton* (Budapest) és *Michael Rozenberg* (Izrael)

B. 5237. Egy háromszögben r a beírt kör sugarát, R a köré írt kör sugarát, s pedig a háromszög félkerületét jelöli. Mutassuk meg, hogy ha $r + 2R = s$, akkor a háromszög derékszögű.

(*6 pont*) Javasolta: *Fridrik Richárd* Szeged)

❄

Beküldési határidő: 2022. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (821–823.)

A. 821. *a*) Létezik-e olyan $f:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ függvény, melyre minden $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ függvény és m pozitív egész esetén létezik $n\in\mathbb{N}$, melyre a $\{k\in\mathbb{N}:\ f(n,k)=g(k)\}$ halmaz elemszáma legalább m?

b) Létezik-e olyan $f:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ függvény, melyre minden $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ függvény esetén létezik $n\in\mathbb{N}$, melyre a $\{k\in\mathbb{N}:\ f(n,k)=g(k)\}$ halmaz elemszáma végtelen?

A. 822. Léteznek-e p, q, r racionális számok, melyekre $p+q+r=0$ és $pqr=1$?

Javasolta: *Weisz Máté* (Cambridge)

A. 823. Legyen n pozitív egész, és tekintsük az $S_n=\{(x,y,z):\ 1\leqslant x\leqslant n,\ 1\leqslant y\leqslant n,\ 1\leqslant z\leqslant n,\ x,y,z\in\mathbb{N}\}$ kockarácsot. Létezik-e olyan n pozitív egész, melyre ki lehet választani S_n elemei közül több, mint $n\sqrt{n}$-t úgy, hogy bármely két kiválasztott rácspont közül az egyiknek legalább két koordinátája szigorúan nagyobb legyen, mint a másik megfelelő két koordinátája?

Javasolta: *Csóka Endre* (Budapest)

Beküldési határidő: 2022. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

A matematikai logika logikusabb, mint gondolnánk II.

Ha alaposan megfigyeljük a cikk első részében kapott ábrát, egy további nyereséget is elkönyvelhetünk: ahogy az algebrában, úgy a logikában is vannak azonosságok. Ezek egyike-másika közismert, ahogy az algebrában is vannak nevezetes azonosságok, például $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. A logikában ilyen a $\neg(A\wedge B)=$ $=\neg A\vee\neg B$, vagy $(A\to B)\wedge(B\to A)=A\Leftrightarrow B$.

Ez utóbbi kapcsán felmerül, hogy miként lehet összetettebb logikai kifejezéseket egyszerűbb alakra hozni. Nos, ez egyáltalán nem bonyolult. A könnyebb megértés kedvéért foglaljuk táblázatba az öt alapművelet eredményének szabályát. Elég csak az egyik állapotot megjegyezni, a többi esetben mindig a tagadása lesz az eredmény: az *és* művelet igaz, ha mind a két részállítás igaz, a *vagy* művelet hamis, ha mind a két részállítás hamis, a *kizáró vagy* művelet igaz, ha a két részállítás logikai értéke különböző, az *azonosság* művelet igaz, ha a két részállítás logikai értéke

azonos, végül a *következtetés* művelet hamis, ha az, amiről következtetünk igaz, de az, amire következtetünk hamis. Összefoglalva:

a művelet	az egyik	a másik	az eredmény
	részállítás		
És ($A \wedge B$)	i	i	i
Vagy ($A \vee B$)	h	h	h
Kizáró vagy ($A \otimes B$)	x	y	i
Azonosság ($A \Leftrightarrow B$)	x	x	i
Következtetés ($A \to B$)	i	h	h

Végezetül a tagadások okozta cseréket is rendszerezzük:

$A \wedge B$	$\neg A \wedge B$	$A \wedge \neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge B)$
$A \wedge B$ | A: i h; B: i: i h, h: h h	$\neg A \wedge B$ | A: i h; B: i: h i, h: h h	$A \wedge \neg B$ | A: i h; B: i: h h, h: i h	$\neg A \wedge \neg B$ | A: i h; B: i: h h, h: h i	$\neg(A \wedge B)$ | A: i h; B: i: h i, h: i i
i h / h h	h i / h h	h h / i h	h h / h i	h i / i i
$A \wedge B$	$\neg(B \to A)$	$\neg(A \to B)$	$\neg(A \vee B)$	$\neg(A \wedge B)$
az eredetihez képest	oszlopcsere (OCS)	sorcsere (SCS)	átlós csere (ÁCS)	betűcsere (BCS)

amit tagadunk	mozgatás
A	oszlopcsere (OCS)
B	sorcsere (SCS)
A és B	átlós csere (ÁCS)
a művelet	betűcsere (BCS)

Az összetett állításoktól a számítógépig

$(A \wedge B) \otimes (B \to A)$

$(A \wedge B)$								$(B \to A)$
i	h							i h
h	h							i i
		i	$\otimes$	i	h	$\otimes$	h	
		h	$\otimes$	i	h	$\otimes$	i	

A formalizálás banálisan egyszerű, a szomszédos *ábra* a modell. A bal felső részbe a bal oldalon lévő kifejezés ($A \wedge B$), a jobb felső részbe pedig a jobb oldali ($B \to A$) logikai sakktáblában található értékei kerüljenek, ezeket a középső mező négy szegmensének bal és jobb felső részébe másoljuk át, középre pedig a két oldal közötti művelet jelét ($\otimes$) illesszük be.

Ezek után szegmensenként különkülön értékeljük ki a műveleti szabályokban foglaltak alapján: $i \otimes i$ $(= h)$, $h \otimes h$ $(= h)$, $h \otimes i$ $(= i)$ és $h \otimes i$ $(= i)$.

Az eredményt rögzítsük az eddig üres cellákba, majd a logikai sakktáblában keressük ki, hogy ez melyik művelet értéktáblázata ($\neg B$).

$(A \wedge B) \otimes (B \to A)$

$(A \wedge B)$									$(B \to A)$	
i	h								i	h
h	h								i	i
		i	$\otimes$	i	h	$\otimes$	h			
		h			h					
		h	$\otimes$	i	h	$\otimes$	i	$\neg B$		
		i			i					

$(A \to B) \wedge (B \to A)$

$(A \to B)$									$(B \to A)$	
i	i								i	h
h	i								i	i
		i	$\wedge$	i	i	$\wedge$	h			
		i			h					
		h	$\wedge$	i	i	$\wedge$	i	$A \Leftrightarrow B$		
		h			i					

Nézzük meg egy olyan kifejezés kiértékelését, ahol az előbbieket kicsit módosítva jutunk el a megoldáshoz.

Egyszerűsítsük le a

$$\neg(B \to \neg A) \wedge (\neg B \to \neg A)$$

kifejezést. Elsőre talán ijesztőnek tűnhet, de a tagadásokat könnyen megoldhatjuk cserékkel.

Egyszer érdemes belegondolni, hogy ez mit is jelent. A cikk előző részében az A állítás az volt, hogy *Kedd van,* a B állítás pedig az, hogy *Esik az eső.* Ezeket felhasználva ez a kifejezés így szól: *Nem igaz az, hogy, ha esik az eső, akkor nem kedd van, és ha nem esik az eső, akkor nem kedd van.* Leegyszerűsítve: *Kedd van és esik az eső.*

Másik magyarázó példaként álljon itt az $(A \to B) \wedge (B \to A) = A \Leftrightarrow B$ nevezetes logikai azonosság igazolása.

$\neg(B \to \neg A) \wedge (\neg B \to \neg A)$

$B \to A$												
i	h											
i	i	OCS									$B \to A$	
h	i	$= B \to \neg A$									i	h
i	i	BCS							ÁCS		i	i
i	h	$=\neg(B \to \neg A)$							$=\neg B \to \neg A$		i	i
h	h										h	i
		i	$\wedge$	i	h	$\wedge$	i					
		i			h							
		h	$\wedge$	h	h	$\wedge$	i	$A \wedge B$				
		h			h							

A vállalkozó kedvűeknek ajánlok néhány feladatot:

1. $(A \wedge B) \vee (A \otimes B)$.

2. $(A \vee B) \wedge (B \to A)$.

3. $\neg(B \to A) \otimes A$.

4. $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \neg A$.

5. $(A \vee \neg B) \to \neg(\neg A \vee B)$.

6. $\neg\big[A \to (A \otimes B)\big]$.

7. $\big[\neg B \otimes (A \wedge B)\big] \wedge \big[B \to \neg(A \wedge B)\big]$.

Ideje rátérnünk arra, hogy ez az egész miként kapcsolódik a számítógépekhez.

A számítógépek elektromos árammal működnek. És nem csak energiaforrásként használják az elektromos energiát, az információt is elektromosan továbbítják. Feldolgozáskor a leggyorsabb eldöntési technika a nyerő, márpedig az elektromos technológiában a folyik vagy nem folyik áram eldöntése lényegesen gyorsabb és még egyszerűbb is, mint az áram nagyságát megmérni. Ez két állapot megkülönböztetését jelenti, tehát a kétállapotú rendszerek használata gyorsabb és egyszerűbb is.

Ilyen rendszert kettőt is ismerünk, a matematikai logika igaz/hamis rendszere és a kettes számrendszer, ahol két különböző számjegy, a 0 és az 1 létezik. Már az elektronika hajnalán képesek voltak olyan áramköröket készíteni, amelyek modellezik a logikai műveleteket, ezeket *logikai kapuknak* nevezik. A teljesség igénye nélkül említsünk meg néhányat. A *tagadás* megfelelője az egy bemenettel és egy kimenettel rendelkező NOT kapu, a kimenetén folyik áram, ha a bemenetén nem, és a kimeneten nem folyik áram, ha a bemeneten igen. A két bemenettel és egy kimenettel rendelkező AND, OR, XOR kapu pedig az *és,* a *vagy* és a *kizáró vagy* művelet szabálya szerint működik.

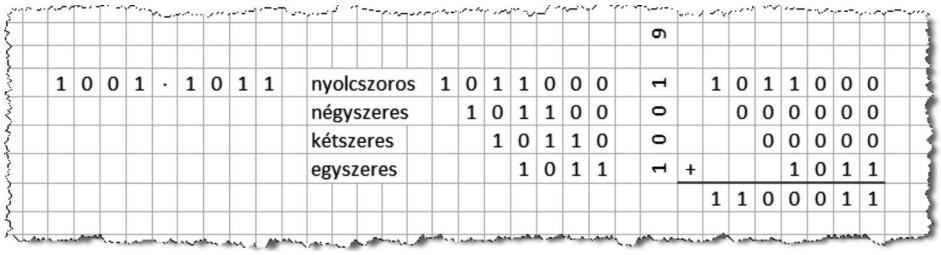
A számítógép neve a számításra és nem a matematikai logikára utal, hiszen akkor talán itélőgépnek hívnánk. De az állítások kiértékelése a mindennapokban sokkal kisebb szerephez jut, mint a számítások elvégzése. Abba azonban ritkán gondolunk bele, hogy a kettes számrendszerben mennyire egyszerű a műveletek elvégzése, ezért ehhez mondanék néhány adalékot.

A kettes számrendszerben az összeadás és a szorzás szabálya is elég egyszerű egy számjegy esetén, akár egy sorban el is mondható: $0+0=0$, $0+1=1$, $1+0=1$ és $1+1=0$, valamint $0\cdot 0=0$, $0\cdot 1=0$, $1\cdot 0=0$ és $1\cdot 1=1$.

Az algebra szabályai függetlenek a számrendszertől: a számrendszer alapszámának k-adik hatványával szorzás k darab 0 számjegynek a szám végére írását jelenti, így például kettes számrendszerben az $101_{(2)}(=5_{(10)})$ kétszerese, négyszerese, nyolcszorosa: $1010_{(2)}$, $10100_{(2)}$ és $101000_{(2)}$.

A kettes számrendszerben a szorzás könnyen kiváltható összeadással. Az egyik tényező kettes számrendszerbeli alakja pont azt mutatja meg a különböző helyiértékeken álló 1 számjegyeivel, hogy a másik tényezőnek melyek azok kettőhatvány-szorosai, amelyeket össze kell adnunk. Nézzük meg a $9 \cdot 11_{(10)}$ szorzást.

> $1001 \cdot 1011_{(2)}$. Ebben az $1011_{(2)}$ szám egyszeresét és nyolcszorosát kell összeadni, hiszen $9 = 1 + 8_{(10)}$. Csak három nullát kell a végére biggyeszteni, hogy meglegyen a nyolcszoros, és azt az eredetivel összeadni. $101000_{(2)} + 1011_{(2)}$.



Ez valóban nagy könnyebbség, csak ki kell dolgozni azokat az áramköröket, amelyek kettes számrendszerben elvégzik az összeadást. Vagy mégsem?

Nem bizony.

Elég csak szemrevételezni az alábbi *ábrát,* és feltűnik, hogy az imént említett AND és XOR logikai kapuk lehetővé teszik az összeadást. Tehát nem kell ezeket kidolgozni, hiszen ezek a logikai kapuk már megvannak.

$A \wedge B$		A	
		i	h
B	i	i	h
	h	h	h

és

$h \wedge h = h$

$h \wedge i = h$

$i \wedge h = h$

$i \wedge i = i$

$A \otimes B$		A	
		i	h
B	i	h	i
	h	i	h

kizáró vagy

$h \otimes h = h$

$h \otimes i = i$

$i \otimes h = i$

$i \otimes i = h$

összeadás: $A + B$		A	
		1	0
B	1	1	0
	0	0	0

átvitel

összeadás: $A + B$		A	
		1	0
B	1	0	1
	0	1	0

eredmény

bináris összeadás:

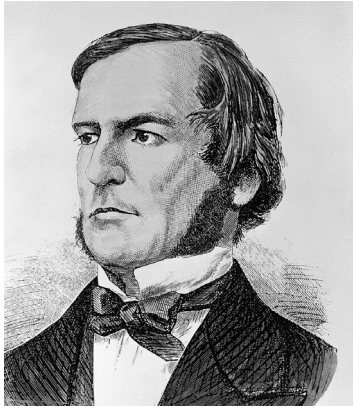
$0 + 0 = 00$

$0 + 1 = 01$

$1 + 0 = 01$

$1 + 1 = 10$

Ha elég sok, elég apró és elég gyors logikai kaput tudunk összedolgozni, akkor a $9 \cdot 11_{(10)}$ szorzásnál lényegesen összetettebb műveleteket is el tudunk végezni.

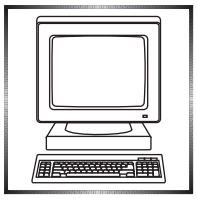


És a mikroprocesszor icipici logikai kapuk millióit hordozza, és többszáz milliárd műveletre képes másodpercenként, ezért tudnak ezek a gépek többféle, az ember számára bonyolult vagy unalmas munkát kiváltani.

Ezért is érdemes legalább egy főhajtással tisztelegni *George Boole* (1815. november 2.– 1864. december 8.) angol matematikus előtt, aki lerakta a matematikai logika alapjait.

Az arckép forrása: `https://www.sciencephoto.com/media/223560/view/english-mathematician-george-boole`.

Tóth Tamás
Budapest



Informatikából kitűzött feladatok

I. 559. Egy számítógépes játékban két háromfős csapat játszik egymással. A játékosok a korábbi játszmák eredményei alapján pontszámokkal rendelkeznek, melyeket a győzelmeik és vereségeik alapján számít ki a játékprogram. A kapott pontok minden esetben pozitív egész számok.

A számítógépes játékban egy játszmába hat játékos jelentkezik be. Kezdetben az első három bejelentkező játékos az első, a másik három pedig a második csapatba kerül. A program igyekszik a pontszámok alapján egyenlő erősségű csapatokat létrehozni. A csapatok erősségét a játékosok pontszámának összegével adjuk meg. A csapatok elosztását úgy végzi a program, hogy legföljebb egy játékost az egyik csapatból kicserél egy másik játékosra a másik csapatból. A játszmában a 6 játékos úgy alkot két csapatot, hogy legföljebb egy ilyen cserével a két csapat erőssége a lehető legkevésbé térjen el egymástól.

Készítsünk programot, amely a 6 játékos pontszáma alapján megad egy elosztást. Ha több ilyen elosztás lehetséges, akkor bármelyik megadható.

A bemenet egyetlen sorában a játékosok pontszáma szerepel egy-egy szóközzel elválasztva. Az i-edik szám az i-edik játékos pontszáma.

A kimenet egyetlen sorában a csapatok elosztása szerepel: az első három szám az egyik csapat, míg a második három szám a második csapat tagjait jelenti. Amennyiben nem szükséges cserélni, akkor az `1 2 3 4 5 6` számsorozatot kell kiírni szóközzel elválasztva. Ha történt csere, akkor a megfelelő helyen lévő sorszámokat kell cserélni.

Bemenet	Kimenet
125 68 93 77 83 119	6 2 3 4 5 1

Magyarázat: az 1. játékost cseréltük a 6. játékosra. Így a 6., a 2. és a 3. játékos alkotja az egyik csapatot, melynek erőssége $119 + 68 + 93 = 280$, valamint a 4., 5. és 1. játékos alkotja a másik csapatot, melynek erőssége $77 + 83 + 125 = 285$.

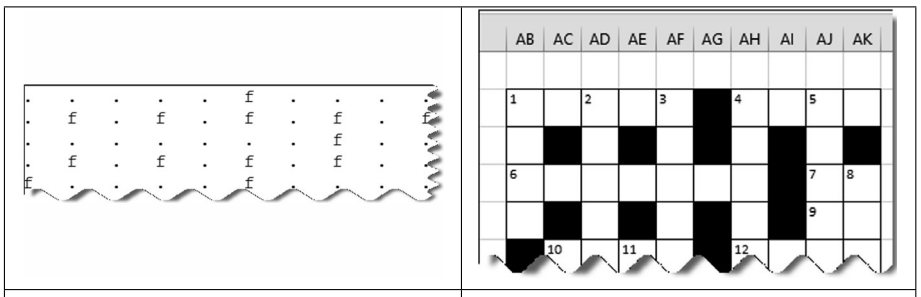
Beküldendő egy `i559.zip` tömörített állományban a forrásprogram és egy rövid dokumentáció, amely megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

I. 560. A hagyományos keresztrejtvényben a szavak elválasztására fekete mezők szolgálnak. A megfejtésekkel az üres mezők vízszintesen balról jobbra, illetve függőlegesen felülről lefelé tölthetők ki. A mezők számozása a bal felső sarokból indul. Minden olyan mező számot kap, ahol vízszintesen, vagy függőlegesen megfejtés kezdődik, tehát egy mezőt akkor kell számozni, ha üres, és teljesül rá, hogy felette fekete, alatta pedig üres mező van, vagy hogy tőle balra fekete, jobbra pedig üres mező található. A keresztrejtvény egybetűs szavakat általában nem tartalmaz. Ha a mező a keresztrejtvény szélénél van, akkor a keresztrejtvény szélét fekete mezőnek tekintjük.

A honlapunkról letölthető `keresztrejtveny.txt` tabulátorokkal tagolt adatfájlban egy 10×10-es keresztrejtvény hálója van leírva. A fekete mezőket „`f`” az üreseket pedig „`.`” karakter ábrázolja.

Feladatunk, hogy táblázatkezelő program segítségével a szabályoknak megfelelően számozzuk be a keresztrejtvény mezőit és jelenítsük meg a mintának megfelelően.

Minta:



Forrás részlete | Megoldás részlete

A megoldás során tetszőleges oszlopokban végezhetünk segédszámításokat, de ezek értelmezését segítsük elő feliratokkal. A formázást a mintának megfelelően végezzük el, úgy, hogy a megjelenés kövesse a forrás esetleges változását. A megoldásban saját függvény vagy makró nem használható.

Beküldendő egy tömörített `i560.zip` állományban a megoldást tartalmazó munkafüzet és a megoldás rövid leírását bemutató dokumentáció.

I. 561 (É). Egy nagy, nemzetközi ékszerforgalmazó cég elérkezettnek látta az időt, hogy Magyarországon is megjelenjen. Kezdetben a budapesti plázákban

nyitottak négy boltot. Ezek négyhavi forgalmi adatai alapján készítsünk adatbázist `ekszerboltok` néven.

1. Importáljuk az adatbázisba a szövegfájlok nevével megegyező táblákba a `boltok.txt`, a `forgalom.txt` és a `honap.txt` szövegfájlok tartalmát. A fájlok UTF-8 kódolásúak, tabulátorral tagoltak, első sorukban a mezőnevek szerepelnek. A forgalom táblához adjuk hozzá a vid mezőt.

Bolt (id, irsz, cim, boltvezeto)

id	A bolt azonosítója (szám), ez a kulcs.
irsz	A bolt irányítószáma (szám).
cim	A bolt Budapesten belüli címe (szöveg).
boltvezeto	A boltvezető neve.

Forgalom (vid, boltid, datum, idopont, osszeg, kartya)

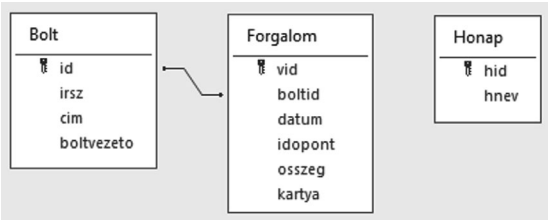
vid	A vásárlás azonosítója (számláló), ez a kulcs.
boltid	A bolt azonosítója, ahol a vásárlás történt (szám).
datum	A vásárlás napja (dátum).
idopont	A vásárlás időpontja (idő).
osszeg	A vásárláskor fizetett összeg (szám).
kartya	A fizetés kártyával történt (igen/nem).

Honap (hid, hnev)

hid	A hónap sorszáma (szám), ez a kulcs.
hnev	A hónap neve (szöveg).

A datum megjelenése legyen rövid dátum, az idopont mező legyen rövid idő. A pénzösszegeket mindenhol forint pénznem formában, 0 tizedesjeggyel jelenítsük meg.

A táblák kapcsolata:



A következő feladatok megoldásánál a lekérdezéseket és a jelentést a zárójelben olvasható néven mentsük. Ügyeljünk arra, hogy a megoldásban pontosan a kívánt mezők szerepeljenek.

2. Határozzuk meg az egyes boltok négyhavi összbevételét boltonként. Csak a bolt címét és az összbevételt írassuk ki. (`2bevetel`)
3. Készítsük el a havi forgalmi jelentést a minta szerint. (`3havijel`)
4. Mikor, melyik boltban (elég a cím mező) vásároltak 500 000 Ft felett? Időrendben listázzuk ki az adatokat a vásárlás összegével együtt. (`4draga`)
5. A boltvezetők jutalékot kapnak a készpénzes vásárlások után. A jutalék összege a vásárlás összegének fixen rögzített százaléka. Adjuk meg, hogy ki az a boltvetető, aki a legtöbb jutalékot kapta. (`5legjobb`)

Az egyes boltok havi bevételei

Cím	Hónap	Bevétel
1024 Lövőház u. 2-6.		
	január	43 995 800 Ft
	február	42 624 800 Ft
	március	52 538 800 Ft
	április	40 235 100 Ft
1062 Váci út 1-3.		
	január	39 731 900 Ft
	február	42 877 100 Ft

6. Áprilisban húsvét előtt (elsejétől tizenhatodikáig) a boltokban akciós áron adtak minden terméket. A cég vezetése kíváncsi arra, hogy ezeken a napokon naponta mekkora volt az egyes boltok bevétele és ez hány eladásból származik? Adjuk meg a választ, rendezzük dátum és azon belül a bolt irányítószáma szerint. Ezeken túl a bolt címe, a napi vásárlások összege és száma jelenjen meg. (`6akcio`)
7. Nem tanácsos éjszakára sok pénzt tartani a boltokban, Ezért egy pénzszállító cég esténként a napi bevétel 150 000 Ft feletti részét begyűjti és elszállítja a bankba. A cég tarifája a bankba szállított pénz 2%-a. Mennyi a pénzszállító cég bevétele az ékszerbolthálózattól a négy hónap alatt? (`7szallitas`)
8. Az alkalmazottakban felmerült, hogy szóba jöhetne a hétvégi zárvatartás, ezért a vezetőség szeretné megtudni a hétvégi, illetve hétköznapi bevételek átlagát. Ha a hétvégi lényegesen elmarad a hátköznapitól, a vezetés megfontolja az ötletet. Azt, hogy egy adott nap a hét melyik napja, a WeekDay függvény segítségével deríthető ki. Használatának nézzünk utána a súgóban. (`8ahetvege`, `8bhetkoznap`)

Beküldendő egy tömörített állományban az ekszerboltok adatbázis és egy rövid dokumentáció, amely tartalmazza az alkalmazott adatbázis-kezelő program nevét és verziószámát.

I/S. 61. Egy távoli országban N-féle papírpénz van forgalomban, az i-edik értéke $P[i]$. A $P[i]$ értékek páronként különböznek, nincs két egyenlő. Egy pénzrendszer észszerű, ha nem létezik olyan x és y értékű papírpénz, amelyekre teljesül az $x < y < 2x$ egyenlőtlenség. Tudjuk, hogy kezdetben a pénzrendszer észszerű. Szeretnénk bevezetni egy új, az eddigiektől különböző értékű papírpénzt úgy, hogy a pénzrendszer továbbra is észszerű maradjon. Továbbá az új papírpénz értéke legyen pozitív egész, és nem nagyobb, mint K. Adjuk meg, hogy hányféleképpen választhatjuk meg az új papírpénz értékét.

Bemenet: az első sorában az N és K számok találhatók szóközzel elválasztva. A következő sor N számot tartalmaz: az i-edik szám $P[i]$, azaz az i-edik papírpénz értéke.

Kimenet: egyetlen sorában egy szám szerepeljen: hányféleképpen választhatjuk meg az új papírpénz értékét.

Bemenet (a `/` jel sortörést helyettesít)	**Kimenet**
`2 11 / 2 5`	`3`

Magyarázat: az 1, a 10 és a 11 értékeket választhatjuk.

Korlátok: $1 \leqslant N \leqslant 100$, $1 \leqslant K \leqslant 10^9$, $1 \leqslant P[i] \leqslant 10^9$ páronként különböznek. Időlimit: 0,4 mp.

Értékelés: a pontok 50%-a kapható, ha $1 \leqslant K \leqslant 10^5$ esetén a program helyes kimenetet ad.

Beküldendő egy `is61.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

S. 160. Ádám meg szeretné látogatni Évát. A kettejük közt lévő utak hálózata leírható egy irányítatlan gráffal, melyben a csúcsok a kereszteződések és az élek a köztük lévő utak. Ádám az egyes sorszámú kereszteződésből indul és a legnagyobb, N-es sorszámúba szeretne eljutni.

Ádám eddig mindig a két pont közötti legrövidebb utak valamelyikén ment. Adjuk meg, hányféle különböző legrövidebb út van a két pont között.

Mivel gyakran megy látogatóba, unja már ezeket a lehetőségeket, így most egy olyan útvonalat szeretne választani, amelynek hossza szigorúan nagyobb, mint a legrövidebb út hossza. Adjunk meg, hogy legalább mekkora lesz az új útvonal hossza.

Bemenet: az első sor tartalmazza a kereszteződések N és az utak M számát. A következő M sor mindegyike egy-egy utat ír le a két végpontjával.

Kimenet: az első sorába a legrövidebb utak száma kerüljön. A kimenet második sorába írjuk az új útvonal minimális hosszát. Ha nincs a legrövidebbnél hosszabb út, akkor `-1`-et kell kiírni.

Minta:

Bemenet (a `/` jel sortörést helyettesít)	**Kimenet** (a `/` jel sortörést helyettesít)
`3 3 / 1 2 / 2 3 / 3 1`	`1 / 2`

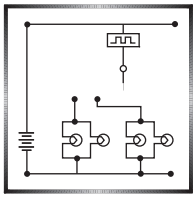
Korlátok: $2 \leqslant N \leqslant 300$. Időlimit: 1 mp.

Értékelés: a pontok 50%-a kapható arra a megoldásra, amelynél a kimenet első sora helyes.

Beküldendő egy `s160.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2022. április 15.

Fizika gyakorlat megoldása



G. 757. *Van egy pár kifordítható kesztyűm, mindkét darabja kívül fekete, belül fehér. Tudom-e ezeket felemás kesztyűként hordani?*

(*3 pont*) Közli: *Vladár Károly,* Kiskunhalas

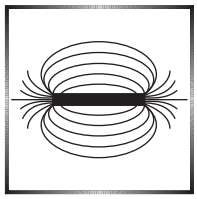
Megoldás. Általában nem hordhatjuk a kesztyűket úgy, hogy az egyiket kifordítjuk, mert a kifordítás során a jobbkezes kesztyű balkezessé, a balkezes pedig jobbkezessé válik. A felemás színű kesztyűpár tehát vagy két jobbkezes, vagy két balkezes kesztyűből állna.

Abban az esetben, ha olyan rugalmas anyagból készült kesztyűkről van szó, amelyeknél nincs különbség a jobb és a bal kesztyű között, akkor természetesen hordhatunk felemás színű kesztyűket is.

Török Hanga (Budapest, Fasori Evangélikus Gimn., 10. évf.)

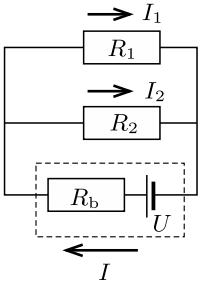
47 dolgozat érkezett. Helyes 35 megoldás. Hiányos (1 pont) 3, hibás 9 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása



P. 5349. 1,5 Ω *belső ellenállású zsebtelep párhuzamosan kapcsolt* $R_1 = 40\ \Omega$ *és ismeretlen* R_2 *ellenállású fogyasztókat működtet. Határozzuk meg az ismeretlen ellenállás értékét, ha a zsebtelep összteljesítményének* 60%*-a jut erre a fogyasztóra.*

(*4 pont*) Közli: *Kis Tamás,* Heves



Megoldás. Legyen a telep üresjárati feszültsége U, a belső ellenállását pedig jelöljük R_b-vel. Tudjuk, hogy $R_1 = 40\ \Omega$, $R_b = 1{,}5\ \Omega$. Az U feszültség nagyságát nem ismerjük (de mint látni fogjuk, erre az adatra nincs is szükségünk), és keressük az ismeretlen ellenállás R_2 nagyságát.

A párhuzamosan kapcsolt két ellenállás eredője

$$R_{\text{eredő}} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2},$$

így a teljes áramkörre felírható Ohm-törvény:

$$U = I\left(R_b + R_{\text{eredő}}\right),$$

vagyis a főág áramerőssége

$$I = I_1 + I_2 = \frac{U}{R_\mathrm{b} + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}. \tag{1}$$

A telep által leadott összteljesítmény:

$$P = UI = \frac{U^2}{R_\mathrm{b} + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}. \tag{2}$$

Az R_2 ellenállású fogyasztóra jutó feszültség:

$$U_2 = U - IR_\mathrm{b},$$

tehát az erre a fogyasztóra jutó teljesítmény:

$$P_2 = \frac{(U - IR_\mathrm{b})^2}{R_2}. \tag{3}$$

A megadott feltétel szerint $P_2 = 0{,}6\,P$. Ebből (1), (2) és (3) felhasználásával, majd U^2-tel való egyszerűsítés után adódik, hogy

$$R_1^2 R_2 = 0{,}6(R_1 + R_2)(R_1 R_\mathrm{b} + R_2 R_\mathrm{b} + R_1 R_2).$$

Behelyettesítva R_1 és R_b ismert értékét, az ismeretlen R_2 ellenállásra (ohm egységekben számolva) az alábbi másodfokú egyenletet kapjuk:

$$24{,}9\,R_2^2 - 568\,R_2 + 1440 = 0.$$

Ennek az egyenletnek két gyöke van: $R_2 = 2{,}9$ és $R_2 = 19{,}9$. A második fogyasztó teljesítménye tehát akkor lesz az összteljesítmény 60%-a, ha $R_2 \approx 3\ \Omega$, vagy ha $R_2 \approx 20\ \Omega$.

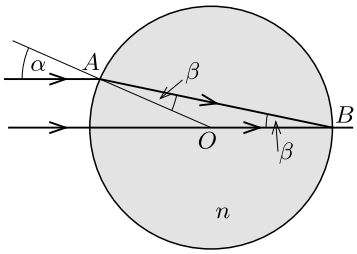
Kiss-Beck Regina (Szeged, SZTE Gyak. Gimn. és Ált. Isk., 11. évf.) dolgozata alapján

69 dolgozat érkezett. Helyes 32 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 5, hiányos (1–2 pont) 21, hibás 9, nem versenyszerű 2 dolgozat.

P. 5350. *Egy átlátszó gömb közepét keskeny, párhuzamos fénynyalábbal megvilágítva a sugarak éppen a gömb felületének átellenes pontján fókuszálódnak. Mekkora a gömb anyagának törésmutatója?*

(*4 pont*) Közli: *Széchenyi Gábor,* Budapest

I. megoldás. Tekintsük az *ábrán* látható sugármenetet. Az α beesési szög és a β törési szög között (a Snellius–Descartes-törvény szerint) fennáll, hogy



$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n,$$

ahol n a gömb anyagának törésmutatója.

Másrészt az ábrán látható ABO háromszög külső szöge (α) a másik két belső szög (β) összegével egyenlő, vagyis $\alpha = 2\beta$. Ezek szerint

$$n = \frac{\sin(2\beta)}{\sin\beta} = \frac{2\sin\beta\cos\beta}{\sin\beta} = 2\cos\beta.$$

Ha a sugárnyaláb keskeny, a β szög nagyon kicsiny, tehát $\cos\beta \approx 1$ és $n \approx 2$.

II. megoldás. Ha a sugárnyaláb keskeny, elfogadhatjuk a Gauss-féle paraxiális közelítést. Ha a fény egy R görbületi sugarú felületen n törésmutatójú közegbe jut, akkor a képalkotás egyenlete a szokásos jelölésekkel:

$$\frac{1}{t} + \frac{n}{k} = \frac{n-1}{R}.$$

Esetünkben, amikor a beeső fénysugarak párhuzamosak, $t = \infty$, vagyis $1/t$ nullának vehető. A képtávolság a gömb átmérője: $k = 2R$. A képalkotási törvény szerint:

$$\frac{n}{2R} = \frac{n-1}{R},$$

vagyis

$$\frac{n}{2} = n - 1, \qquad \text{tehát} \qquad n = 2.$$

Nagy Imre (Marosvásárhely, Bolyai Farkas Líceum, 10. évf.)

37 dolgozat érkezett. Helyes 20 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 8, hiányos (1–2 pont) 5, hibás 3, nem értékelhető 1 dolgozat.

P. 5351. *Vajon miért nem szabad a lézerfénybe belenézni?*

Az ember szemlencséje a fényt igen kicsi felületre, jellemzően néhány μm*-es tartományra képes fókuszálni. A legérzékenyebb sejtek a retinában vannak, itt a „csap” és „pálcika” nevű idegsejtek mérete a* μm*-es tartományba esik. A mindennapi életben használt lézerek teljesítménye* 0,1 mW *és* 100 mW *között van.*

Számítsuk ki, hogy a legkisebb, tehát 0,1 mW *teljesítményű lézer fénye* 80%*-os fényelnyelés mellett mennyi idő alatt melegít fel egy sejtet a károsodást okozó* 50 °C*-ra, és mennyi idő alatt a biztos roncsolást okozó* 100 °C*-ra. Az egyszerűség kedvéért tekintsünk egy idegsejtet* 5 μm *átmérőjű és* 7 μm *mélységű hengernek, amelynek sűrűségét és fajhőjét a vízével vehetjük egyenlőnek. A szem hőmérsékletét vegyük* 36 °C*-nak, és egyéb hatásokkal (elmozdulások, hővezetés stb.) most ne törődjünk. A kapott időt vessük össze az emberi szem kb.* 0,2 *másodperces reakcióidejével!*

(*4 pont*) Közli: *Vass László,* Budapest

Megoldás. Tudjuk, hogy egy m tömegű test ΔT hőmérséklettel történő felmelegítéséhez szükséges hő $Q = cm\Delta T$, valamint egy P teljesítményű lézer által t idő alatt leadott hő η hatásfokú fényelnyelés mellett: $Q = \eta P t$. Eszerint

$$cm\Delta T = \eta P t,$$

ahonnan az időtartam:

$$t = \frac{cm\Delta T}{\eta P}.$$

Az ismert adatok és kiszámított mennyiségek:
– A víz fajhője: $c = 4{,}2$ kJ/(kg °C).
– Az idegsejtek károsodásának megfelelő hőmérséklet-különbség:

$$\Delta T_1 = 50\ ^\circ\mathrm{C} - 36\ ^\circ\mathrm{C} = 14\ ^\circ\mathrm{C}.$$

– Az idegsejtek biztos roncsolódásának megfelelő hőmérséklet-különbség:

$$\Delta T_2 = 100\ ^\circ\mathrm{C} - 36\ ^\circ\mathrm{C} = 64\ ^\circ\mathrm{C}.$$

– A fényelnyelés hatásfoka: $\eta = \frac{80}{100} = 0{,}8$.
– A számításba vett legkisebb lézerteljesítmény: $P = 0{,}1$ mW $= 10^{-4}$ W.
– A hengernek tekintett sejt alapkörének sugara: $r = 2{,}5$ μm.
– A hengernek tekintett sejt magassága: $h = 7$ μm.
– A sejt térfogata: $V = r^2\pi h = 1{,}4 \cdot 10^{-16}$ m^3.
– A sejt sűrűsége: $\rho = 1000\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.
– A sejt tömege: $m = \rho V = 1{,}4 \cdot 10^{-13}$ kg.

Ezeknek megfelelően a keresett időtartamok:

$$t_1 = \frac{cm\Delta T_1}{\eta P} = \frac{\left(4{,}2 \cdot 10^3\right) \cdot \left(1{,}4 \cdot 10^{-13}\right) \cdot 14}{\left(0{,}8 \cdot 10^{-4}\right)}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{W}} \approx 0{,}1\ \mathrm{ms},$$

illetve

$$t_2 = \frac{cm\Delta T_1}{\eta P} = \frac{\left(4{,}2 \cdot 10^3\right) \cdot \left(1{,}4 \cdot 10^{-13}\right) \cdot 64}{\left(0{,}8 \cdot 10^{-4}\right)}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{W}} \approx 0{,}5\ \mathrm{ms}.$$

Ezek az időtartamok mintegy 2000-szer, illetve 400-szor kisebbek, mint a szem reakcióideje.

Tehát valóban nem tanácsos a lézerfénybe belenézni!

Csillingek csapat
Csilling Dániel (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.)
Csilling Katalin (Budapest, Szilágyi E. Gimn., 12. évf.)

77 dolgozat érkezett. Helyes 14 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 25, hiányos (1–2 pont) 27, hibás 2, nem versenyszerű 9(!) dolgozat.

P. 5352. *Egy R ellenállású, A keresztmetszetű, zárt körvezetőt B indukcióvektorú mágneses térben szeretnénk forgatni a síkjában lévő szimmetriatengelye körül állandó ω szögsebességgel. Mekkora átlagteljesítménnyel tudjuk ezt megtenni?*

(*4 pont*) Közli: *Szász Krisztián,* Budapest

I. megoldás. Feltételezzük, hogy a forgástengely merőleges a mágneses indukcióvektorra. A körvezetőn áthaladó mágneses fluxus

$$\Phi(t) = BA\cos(\omega t)$$

módon változik időben. (Az időmérés kezdőpontjának azt a pillanatot választottuk, amikor a mágneses fluxus maximális.) Az indukált feszültség:

$$U(t) = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = BA\omega\sin(\omega t).$$

(Ezt az összefüggést a harmonikus rezgőmozgásnál a kitérés és a sebesség közötti összefüggés alapján, vagy pedig differenciálszámítással láthatjuk be.) Ez $U_{\max} = BA\omega$ nagyságú, ω körfrekvenciájú váltófeszültség, amelynek effektív értéke:

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{BA\omega}{\sqrt{2}}.$$

Az R ellenálláson fejlődő átlagos hő időegységenként

$$P = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R} = \frac{B^2A^2\omega^2}{2R}.$$

Az energiamegmaradás törvénye szerint nekünk ugyanekkora átlagos teljesítményt kell kifejtenünk a körvezető forgatása során.

Megjegyzés. Ugyanezt az eredményt a pillanatnyi teljesítmény, vagyis

$$P(t) = \frac{U(t)^2}{R} = \frac{B^2A^2\omega^2}{R}\sin^2(\omega t)$$

időbeli átlagértékeként is megkaphatjuk, ha kihasználjuk, hogy $\sin^2(\omega t)$ hosszú időre vonatkozó átlagértéke $1/2$.

Budai Csanád (Budapest, Deák Téri Evangélikus Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

II. megoldás. Tegyük fel, hogy a mágneses tér merőleges a forgástengelyre. A mágneses mezőben forgó körvezetőben feszültség indukálódik, ami áramot hoz létre. Az áramjárta körvezető mágneses dipólusként viselkedik, amire a külső mágneses mező forgatónyomatékot fejt ki. Ezzel a forgatónyomatékkel megegyező nagyságú, de ellentétes irányú forgatónyomatékot kell kifejtenünk, hogy a körvezetőt állandó ω szögsebességű mozgásban tartsuk.

Zárjon be a körvezető síkjának normálvektora $\alpha = \omega t$ szöget a $\boldsymbol{B}$ indukcióvektorral. Ekkor az indukált feszültség

$$U = BA\omega \sin\alpha,$$

a körben folyó áram erőssége

$$I = \frac{U}{R} = \frac{BA\omega}{R}\sin\alpha.$$

A köráram dipólnyomatéka

$$m = IA = \frac{BA^2\omega}{R}\sin\alpha,$$

amelyre a mágneses mező

$$M = Bm\sin\alpha = \frac{B^2A^2\omega}{R}\sin^2\alpha$$

forgatónyomatékot fejt ki.

Ismert, hogy egy tengely körül állandó ω szögsebességgel forgó körvezető esetén a forgatáshoz szükséges pillanatnyi teljesítmény:

$$P = M\omega = \frac{B^2A^2\omega^2}{R}\sin^2\alpha,$$

aminek átlagos értéke

$$\overline{P} = \frac{B^2A^2\omega^2}{R}\overline{\sin^2\alpha} = \frac{B^2A^2\omega^2}{2R}.$$

Somlán Gellért (Pécs, Leőwey Klára Gimn., 12. évf.)

11 dolgozat érkezett. Helyes 7 megoldás. Hiányos (1–2 pont) 4.

P. 5353. *Mi az oka annak, hogy a kibányászott uránérc aktivitása jelentősen nagyobb, mint a belőle készülő uránsóé?*

(*4 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

Megoldás. Az uránérc aktivitását nem csupán az urán adja. A kibányászott ércben – ha az elég „öreg” – radioaktív egyensúly áll fenn az urán és a „leányelemei” között. Mindegyik leányelem aktivitása megegyezik az urán aktivitásával. A ^{238}U bomlási sorában 10-nél is több leányelem van, emiatt az uránérc aktivitása egy nagyságrenddel nagyobb, mint a vele azonos tömegű uránsó aktivitása.

Magyar Gábor Balázs (Eger, Dobó István Gimn., 11. évf.)

29 dolgozat érkezett. Helyes 12 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 3, hiányos (1–2 pont) 6, hibás 5, nem versenyszerű 3 dolgozat.

P. 5354. *Motoros játékvonat halad R sugarú, kör alakú pályán, állandó nagyságú v sebességgel. A kör középpontjától $d < R$ távolságra egy állandó, f_0 frekvenciájú hangot kibocsátó, pontszerű hangforrás helyezkedik el. A vonatra egy mikrofont rögzítünk. Milyen határok között változik a mikrofon által észlelt hang frekvenciája? (A hang sebessége c.)*

(*6 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Biatorbágy

I. megoldás. Legyen a vonat kör alakú pályájának középpontja O, a rögzített hangforrás helye F, a vonat pillanatnyi helye pedig a körpálya P pontja (lásd az *1. ábrát*). Álló, f_0 frekvenciájú hangot kibocsátó hangforrás hangját egy mozgó megfigyelő (esetünkben a mikrofon) a Doppler-effektus szerint

$$f = f_0\left(1 + \frac{u}{c}\right)$$

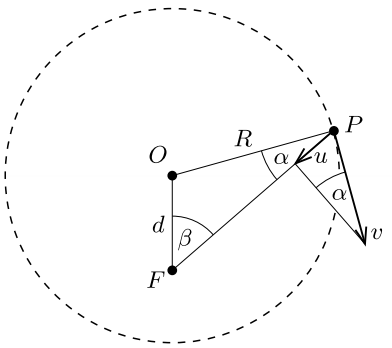
frekvenciájúnak észleli, ahol u az észlelő sebességének a *hangforrás irányába* mutató komponense.

A hangforrás helyét pl. az ábrán látható β szöggel adhatjuk meg. Bontsuk fel a mikrofon v nagyságú sebességvektorát egy PF-fel párhuzamos és egy arra merőleges komponensre. A párhuzamos összetevőt jelöljük u-val. A hangforrás és a mikrofon távolsága

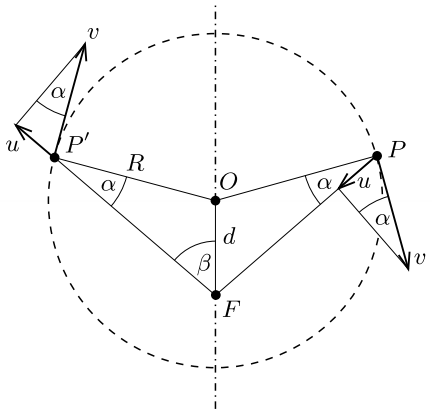
$$u = v \sin\alpha$$

sebességgel *csökken,* ahol α az OPF szög. A legnagyobb észlelt frekvencia u legnagyobb értékének, vagyis α legnagyobb értékének felel meg. Mivel az OPF háromszögre felírható szinusztétel szerint

$$\sin\alpha = \frac{d}{R}\sin\beta,$$



1. ábra



2. ábra

ez a maximumát $\sin\beta = 1$, vagyis $\beta = 90°$-nál veszi fel. Ezek szerint $(\sin\alpha)_{\max} = \frac{d}{R}$, $u_{\max} = \frac{d}{R}v$, tehát a mikrofon által észlelt legnagyobb frekvencia

$$f_{\max} = f_0\left(1 + \frac{v}{c}\frac{d}{R}\right).$$

Hasonló módon kapjuk a hangforrástól távolodó mikrofon által észlelt frekvenciacsökkenést is. Ha tükrözzük a P pontot az OF egyenesre, az F és P' pontok *távolodásának* sebessége ugyanakkora lesz, mint F és P *közeledésének* sebessége volt (*2. ábra*). Mivel u legnagyobb értéke $\frac{d}{R}v$, az észlelt frekvencia legkisebb értéke:

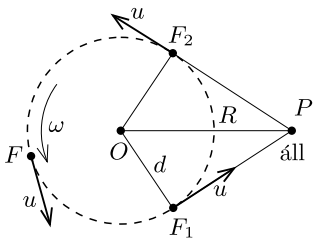
$$f_{\min} = f_0\left(1 - \frac{v}{c}\frac{d}{R}\right).$$

Köpenczei Csanád (Bonyhád, Petőfi S. Ev. Gimn. és Koll., 11. évf.) és
Yokota Adan (Gödöllői Török Ignác Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

II. megoldás. A hangmagasság változását a Doppler-effektussal magyarázzuk. Eszerint az f_0 frekvenciájú, a levegőhöz képest álló hangforrás frekvenciáját egy, a hangforráshoz u sebességgel közeledő (vagy távolodó) mikrofon

$$f = f_0\left(1 \pm \frac{u}{c}\right)$$

nagyságúnak rögzíti. A feladatunk tehát u legnagyobb értékének meghatározása.



3. ábra

Két test távolsága nem függ attól, hogy milyen koordináta-rendszerben számítjuk ki azt. Válasszuk azt a koordináta-rendszert, amelynek origója a körpálya O középpontjában van, és $\omega = \frac{v}{R}$ szögsebességgel forog az O pont körül a vonat körmozgásával megegyező irányban. A játékvonat – ebben a forgó vonatkoztatási rendszerben – mindig ugyanazon a helyen áll, a hangforrás pedig egy d sugarú körpályán $u = d\omega = \frac{vd}{R}$ sebességgel egyenletesen mozog (*3. ábra*).

A vonat és a hangforrás távolsága akkor változik a leggyorsabban, amikor a hangforrás éppen az F_1 pontban van, ahol a sebessége az álló vonat irányába mutat, vagy az F_2 pontban, ahol a sebessége a vonattal ellentétes irányú. Ilyenkor F és P közeledésének, illetve távolodásának sebessége u, a megváltozott frekvencia legnagyobb és legkisebb értéke tehát

$$f_{\max} = f_0\left(1 + \frac{vd}{Rc}\right), \qquad \text{illetve} \qquad f_{\min} = f_0\left(1 - \frac{vd}{Rc}\right).$$

Megjegyzés. A forgó koordináta-rendszerben a hangforrás mozog, az észlelő (mikrofon) pedig áll. Ennek ellenére a Doppler-effektusnak nem az $f = f_0\frac{c}{c-u}$ képletét alkal-

maztuk, hanem az álló hangforrásra vonatkozó $f = f_0 \frac{c+u}{c}$ összefüggéssel számoltunk. Ezt azért tehettük meg, mert a forgó vonatkoztatási rendszerben a levegő is mozog (forog), és a Doppler-effektusnál mindig a közeghez viszonyított sebességek számítanak.

(G. P.)

28 dolgozat érkezett. Helyes 14 megoldás. Kicsit hiányos (4–5 pont) 9, hiányos (1–3 pont) 3, hibás 1, nem versenyszerű 1 dolgozat.

P. 5362. *Szinkrociklotronban az elemi részecskék tömegének a sebességtől való függését a gyorsító elektromos tér frekvenciájának csökkentésével kompenzálják. Például ha protonokat gyorsítanak, a duánsokra (D alakú, fémből készült, üreges félkorongokra) kerülő feszültség frekvenciáját* 25 MHz-*ről* 18,9 MHz-*ig változtatják ciklusonként. Határozzuk meg ebben az esetben*

a) a mágneses indukcióvektor nagyságát;

b) a kilépő protonok kinetikus energiáját!

(*5 pont*) Példatári feladat nyomán

Megoldás. *a*) A ciklotronokban a mágneses tér biztosítja a részecskék körmozgásához szükséges erőt, így a részecskék keringési frekvenciája megegyezik a duánsokra kapcsolt feszültség f frekvenciájával. Az e töltésű, m_p tömegű protonokra, ha azok v sebességgel r sugarú körpályán mozognak, fennáll, hogy

$$evB = m_\mathrm{p}\frac{v^2}{r}, \qquad \text{továbbá} \qquad v = 2\pi r f_0.$$

Ebben a képletben f_0 a protonok indulásakor (még biztosan nemrelativisztikus mozgásakor) alkalmazott frekvencia. A mágneses indukcióvektor nagysága ezek szerint

$$B = \frac{2\pi f_0 m_\mathrm{p}}{e} = \frac{2\pi(25\cdot 10^6)(1{,}67\cdot 10^{-27})}{1{,}6\cdot 10^{-19}}\ \mathrm{T} \approx 1{,}64\ \mathrm{T}.$$

b) Az egyre nagyobb sebességgel mozgó protonoknál a mozgásegyenlet (körmozgás esetén) formálisan annyiban tér el a klasszikus (newtoni) mozgásegyenlettől, hogy a proton m_p „nyugalmi” tömege helyére a „megnövekedett”

$$m(v) = \frac{m_\mathrm{p}}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

tömeget írjuk. A mágneses indukcióvektor nagyságának állandósága miatt

$$B = \text{állandó} = \frac{2\pi f_0 m_\mathrm{p}}{e} = \frac{2\pi f_1 m_\mathrm{p}}{e}\,\frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}},$$

vagyis

$$\frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = \frac{f_0}{f_1},$$

ahol f_1 a gyorsítófeszültség lecsökkentett frekvenciája.

A kilépő protonok relativisztikus mozgási energiája:

$$E_\mathrm{m} = \frac{m_\mathrm{p}c^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} - m_\mathrm{p}c^2 = m_\mathrm{p}c^2\left(\frac{f_0}{f_1}-1\right) = 938\ \mathrm{MeV}\cdot\left(\frac{25}{18{,}9}-1\right) \approx$$

$$\approx 303\ \mathrm{MeV} \approx 48\ \mathrm{pJ}.$$

Bencz Benedek (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 9. évf.)
dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. A szinkrociklotronban a mágneses indukció nagysága a duánsokon belül mindenhol ugyanakkora, és a gyorsítás során a részecskék sebessége, valamint a pályájuk sugara fokozatosan növekszik. Nagyon nagy energiájú (és emiatt nagyon nagy méretű) gyorsítókban gyakorlatilag lehetetlen a mágneses mező homogenitását nagy térrészben biztosítani, és az egész berendezésben ultranagy vákuum fenntartása is technikailag megoldhatatlan. Ehelyett a gyorsítás közben a mágneses tér erősségét változtatják oly módon, hogy a részecskék pályájának sugara mindvégig ugyanakkora maradjon. Ekkor a vákuumot és a mágneses teret elegendő a részecskenyalábot körülvevő vékony csőben létrehozni és fenntartani.

2. A relativisztikus fizika és a klasszikus fizika törvényei közötti különbség általában nem csupán abból áll, hogy a nyugalmi tömeg helyére a „megnövekedett tömeget” írjuk. A részecskék mozgási energiája például a relativitáselmélet (és a tapasztalat) szerint *nem* az $m(v)\frac{v^2}{2}$ összefüggésből, hanem az $E_\mathrm{m} = m(v)c^2 - m_0c^2$ képlet lapján számítható ki. Számos más esetben (például a homogén erőtérben történő egyenesvonalú mozgásnál) hibás eredményt kapunk, ha csak az egyszerű „tömegcserét” hajtjuk végre. Egyenletes (vagy csak lassan változó sebességű) körmozgásnál azonban a naiv módszer éppen a helyes eredményt adja.

(*G. P.*)

15 dolgozat érkezett. Helyes 8 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 4, hiányos (1–3 pont) 3 dolgozat.

P. 5363. *Egy vékony, magas üvegcsőből homokórát készítettünk. A benne lévő homok m_0 tömege megegyezik az üvegcső és a tartótalpak együttes tömegével. Kezdetben a homok az alsó térfél $h = 5$ cm hosszú részét tölti ki, és az eszköz megfordítása után egyenletes ütemben $t_0 = 1$ perc alatt pereg le. (A felső és az alsó térfélben lévő homok alakját közelítsük hengerekkel.)*

a) Határozzuk meg, hogy hol van a homokóra tömegközéppontja t idővel az óra elindítása után! (Ne foglalkozzunk a homokóra indítását követő, illetve a megállását közvetlenül megelőző nagyon rövid időtartamokkal, amikor a homokzuhatag még vagy már nem tölti ki a kifolyónyílás és az alsó becsapódási hely közötti teljes távolságot.)

b) Számítsuk ki, hogy mekkora a homokóra impulzusa (lendülete) t idővel a homokóra elindítása után!

c) Nagyon érzékeny mérleggel megmérjük a homokóra súlyát, miközben a homok a felső tartályból az alsóba pereg. Azt találjuk, hogy a mért súly egy kicsivel nagyobb, mint a már lepergett homokóra súlya. Az előző két részfeladatra adott

választ felhasználva adjuk meg, hogy hány ezrelékkel nagyobb a működő homokóra súlya a már „lejárt” homokóráénál!

(*6 pont*) Közli: *Széchenyi Gábor,* Budapest

Megoldás. *a*) Jelöljük a homokóra teljes magasságát $2H$-val. A homokóra megfordítása után $t < t_0$ idő elteltével a felső térfélből $m_0\frac{t}{t_0}$ tömegű homok pergett át az alsóba, így az alsó térfélben $h\frac{t}{t_0}$ magasságú homokhenger alakult ki. Hasonlóképp, a felső tárolóban maradt $m_0\left(1-\frac{t}{t_0}\right)$ tömegű homokoszlop teteje a homokóra aljától mérve $H+h\left(1-\frac{t}{t_0}\right)$ magasságban lesz, az alja pedig mindvégig H magasságban marad.

Mivel a homok alakját közelíthetjük hengerekkel, az egyes térfelekben lévő homokmennyiség tömegközéppontja (a homokóra aljához viszonyítva) rendre

$$\frac{h}{2}\,\frac{t}{t_0} \qquad \text{és} \qquad H+\frac{h}{2}\left(1-\frac{t}{t_0}\right)$$

magasságban lesz. Ezek szerint a homokóra tömegközéppontjának helyzete t időpillanatban

$$s(t)=\frac{m_0H+m_0\frac{t}{t_0}\cdot\frac{h}{2}\,\frac{t}{t_0}+m_0\left(1-\frac{t}{t_0}\right)\left(H+\frac{h}{2}\left[1-\frac{t}{t_0}\right]\right)}{2m_0},$$

amit

$$s(t)=s_0+v_0t+\frac{a}{2}t^2$$

alakban is felírhatunk, ahol

$$s_0=H+\frac{h}{4}, \qquad v_0=-\frac{H+h}{2t_0} \qquad \text{és} \qquad a=\frac{h}{t_0^2}.$$

Felismerhetjük, hogy a tömegközéppont mozgása egyenletesen gyorsuló mozgás, amelynek pillanatnyi sebessége

$$v(t)=v_0+a\,t=\frac{h}{t_0^2}\,t-\frac{H+h}{2t_0}.$$

A tömegközéppont mindvégig lefele mozog, hiszen $v(t)<0$, de mivel $a>0$, a tömegközéppont függőlegesen *felfelé gyorsul.*

b) Az egész rendszer lendülete a tömegközéppont sebességének és az össztömegnek a szorzata:

$$I(t)=2m_0\left(\frac{h}{t_0^2}\,t-\frac{H+h}{2t_0}\right).$$

c) Az érzékeny mérlegre állított, még „működő” homokórára függőlegesen lefelé $2m_0g$ nehézségi erő, függőlegesen felfelé pedig a mérleg által kifejtett G súlyerő hat. A rendszer mozgásegyenlete: $G-2m_0g=2m_0a$, ahonnan a relatív súlynövekedés

$$\frac{G-2m_0g}{2m_0g}=\frac{a}{g}=\frac{h}{gt_0^2}\approx 1{,}4\cdot 10^{-6}.$$

A működő homokóra súlya tehát 0,0014 ezrelékkel nagyobb, mint a már „lejárt” homokóráé.

Téglás Panna (Selye János Gimn., 12. évf.) Révkomárom, Szlovákia

11 dolgozat érkezett. Helyes Toronyi András, Gábriel Tamás, Budai Tamás, Kertész Balázs és Téglás Panna megoldása. Kicsit hiányos (4–5 pont) 2, hiányos (2–3 pont) 4 dolgozat.

P. 5379. *Ideális polárszűrők segítségével szeretnénk a lineárisan polarizált fény polarizációs síkját* $45°$*-kal elforgatni úgy, hogy az intenzitásveszteség legfeljebb* 10% *legyen. Legalább hány polárszűrőre van szükségünk, és hogyan kell azokat optimálisan elhelyezni?*

(*5 pont*) *Példatári feladat nyomán*

Megoldás. Először lássuk be, hogy abban az esetben lesz maximális az intenzitás, amikor a szomszédos polárszűrők egymással bezárt szöge ugyanakkora. (A polárszűrők polarizációs irányának egymással bezárt szögét a rövidebb szóhasználat kedvéért egyszerűen a polárszűrők szögének fogjuk nevezni.)

Tekintsünk először két szomszédos polárszűrőt, amelyek φ_1, illetve φ_2 szöggel forgatják el a rájuk eső, I_0 intenzitású fény polarizációs síkját, és legyen ezen két szög összege egy adott φ_0 érték. *Malus törvénye* szerint a két szűrőn áthaladó fény végső intenzitása $I = I_0 \cos^2\varphi_1 \cos^2\varphi_2$. Ennek a kifejezésnek keressük (a $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_0$ feltétel mellett) a maximumát. Ez a szélsőérték ugyanott van, ahol $\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2$ a legnagyobb értéket veszi fel.

Differenciálszámítás (deriválás) helyett elemi úton, trigonometrikus átalakítással is megtalálhatjuk a szélsőérték helyét:

$$\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 = \frac{1}{2}\big[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \cos(\varphi_1-\varphi_2)\big] = \frac{\cos\varphi_0}{2} + \frac{\cos\Delta\varphi}{2}.$$

Mivel a két szög összege állandó, így csak a két szög $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ különbségének függvényében változik a szorzat értéke. Ennek akkor van maximuma, ha $\cos\Delta\varphi = 1$, vagyis $\Delta\varphi = 0$, azaz $\varphi_1 = \varphi_2$. Ha tehát csak két polárszűrőnk van, akkor adott nagyságú szögelfordításhoz a két szűrőt azonos szögben kell egymáshoz, illetve a rájuk eső fény polarizációs síkjához képest elforgatni, hogy az intenzitáscsökkenés a lehető legkisebb legyen.

Mi a helyzet n darab polárszűrő beiktatása esetén? Ekkor is kiválaszthatunk 2 szűrőt. Ahhoz, hogy a rajtuk áthaladó fény intenzitása (a szögek összegének adott értéke mellett) maximális legyen, a polárszűrőket azonos szögű elfordítással kell egymás után elhelyezni. Mivel ez minden párra igaz, így a legkedvezőbb esetben az összes polárszűrő egymáshoz viszonyított elfordulása azonos nagyságú lesz:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n = \frac{45°}{n}.$$

A kérdés tehát: legalább hány darab ideális polárszűrő szükséges, hogy egymáshoz képest (az elsőt pedig a beeső fény polarizációs irányához képest) $45°/n$

szögben elforgatva az intenzitásveszteség kevesebb legyen, mint 10%? Írjuk fel újra Malus törvényét:

$$I_0 \cdot (\cos^2 \varphi_1) \cdot (\cos^2 \varphi_2) \cdot \ldots \cdot (\cos^2 \varphi_n) = I_0 \cos^{2n}\left(\frac{45^\circ}{n}\right) \geqslant 0{,}9 I_0,$$

azaz

$$f_n \equiv \cos^{2n}\left(\frac{45^\circ}{n}\right) \geqslant 0{,}9.$$

Numerikusan kapjuk, hogy:

$$f_1 = 0{,}5; \quad f_2 = 0{,}729; \quad f_3 = 0{,}812; \quad f_4 = 0{,}856; \quad f_5 = 0{,}884; \quad \boldsymbol{f_6 = 0{,}902 > 0{,}9}.$$

Tehát legalább 6 db polárszűrőre van szükségünk, és $\frac{45^\circ}{6} = 7{,}5^\circ$-kal kell minden szűrőt az előzőhöz képest elforgatni, illetve az elsőt a beeső, lineárisan polarizált fény polarizációs síkjához képest beállítani.

Nemeskéri Dániel (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 11. évf.)

Megjegyzés. Azt, hogy optimális esetben a polárszűrőket egymáshoz képest ugyanakkora szöggel elforgatva kell beállítani, más módszerrel, a *Jensen-egyenlőtlenség** alkalmazásával is beláthatjuk.

Állítás. Ha egy (véges vagy végtelen) I intervallumon az f függvény konkáv,

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \in I, \quad p_1, p_2, \ldots, p_n$$

pozitív számok, amelyekre $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$ teljesül, akkor

$$f(p_1 a_1 + p_2 a_2 + \ldots + p_n a_n) \geqslant p_1 f(a_1) + p_2 f(a_2) + \ldots + p_n f(a_n).$$

Ha f szigorúan konkáv, akkor egyenlőség csak az $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ esetben teljesül. Ha f konvex, akkor az állítás fordított irányú egyenlőtlenséggel teljesül.

Mivel a koszinuszfüggvény a $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ tartományon alulról konkáv, fennáll, hogy

$$\cos\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n}{n}\right) \geqslant \frac{\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 + \ldots + \cos\varphi_n}{n},$$

továbbá a számtani-mértani közepek egyenlőtlensége szerint

$$\frac{\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 + \ldots + \cos\varphi_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cdot \ldots \cdot \cos\varphi_n}.$$

Így tehát

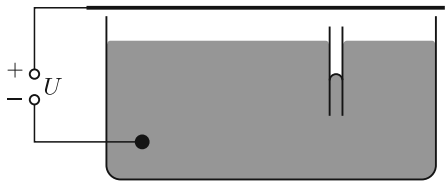
$$\cos^{2n}\left(\frac{45^\circ}{n}\right) \geqslant \cos^2\varphi_1 \cos^2\varphi_2 \cdot \ldots \cdot \cos^2\varphi_n,$$

ami éppen a bizonyítandó állítás.

Papp Marcell Imre (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 11. évf.)

9 dolgozat érkezett. Helyes 6 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 3 dolgozat.

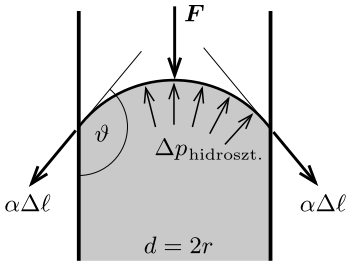
* Lásd pl. `https://abesenyei.web.elte.hu/theses/molnar.pdf`



P. 5381. *Egy üvegből készült (szigetelő) edény higannyal van töltve. A higanyba egy függőleges, $d = 0{,}5$ mm átmérőjű kapilláris cső merül az* ábrán *látható módon. A higany felszíne fölé $h = 6$ mm magasságban egy nagy kiterjedésű, vízszintes fémlemezt helyeztünk. Mennyivel változik meg a kapilláris csőben a higanyszint, ha a fémlemez és a higany közé $U = 20$ kV egyenfeszültséget kapcsolunk?*

(*6 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Biatorbágy

I. megoldás. A feszültség bekapcsolása előtt a kapilláris csőben a higany valamekkora x_1 szintkülönbséggel alacsonyabban áll, mint a csövön kívül, mert a higany nem nedvesíti az üveget. Ekkor a felületi feszültségből származó F erő tart egyensúlyt a külső és a belső higanyoszlop nyomáskülönbségéből származó erővel. A felületi feszültség (α) a folyadék felszínének egységnyi hosszúságú darabkájára ható erő, egy $\Delta\ell$ hosszúságú vonaldarab mentén tehát $\alpha\Delta\ell$ erő hat. A kapilláris cső $2r\pi$ kerületén ható erők függőleges irányú eredője $2r\pi\alpha\cos\vartheta$, ahol ϑ a higany és az üveg illeszkedési szöge. Mivel $\vartheta > 90°$, az F erő függőlegesen lefelé hat (*1. ábra*).



1. ábra

Az erőegyensúly feltétele:

$$F = A\,\Delta p_{\text{hidroszt.}}, \qquad \text{azaz} \qquad 2r\pi\,\alpha|\cos\vartheta| = r^2\pi\varrho g x_1,$$

ahonnan

$$x_1 = \frac{2\alpha|\cos\vartheta|}{\varrho g r}.$$

(A fenti képletben ϱ a higany sűrűsége, $r = d/2$ a cső belső sugara és $A = r^2\pi$ a kapilláris cső belső keresztmetszete. Ezek mindegyike ismert, valamint α és ϑ értékei táblázatokban megtalálható adatok, de ezekre a továbbiakban nem lesz szükségünk.)

A feszültség bekapcsolása után a fémlemez és a higany felszíne között – mint egy síkkondenzátor belsejében – elektromos erőtér alakul ki, amely az edény széleit és a kapilláris cső közvetlen környezetét leszámítva homogénnek tekinthető, és a térerősség nagysága: $E = U/h$. Ez az erőtér – a síkkondenzátor lemezeire ható erőhöz hasonlóan – függőlegesen felfelé húzza a higany felszínét, ami miatt a higany nyomása közvetlenül a felszíne alatt egy kicsit kisebb lesz, mint a légköri nyomás.

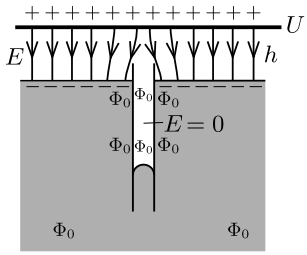
A higany felületén (Gauss törvénye szerint) felületegységenként $\sigma = \varepsilon_0 E$ töltés jelenik meg, amelyre az átlagosan $\overline{E} = \frac{1}{2}E$ nagyságú elektromos tér

$$\Delta p_{\text{elekt.}} = \sigma\overline{E} = \varepsilon_0 \frac{E^2}{2} = \varepsilon_0 \frac{U^2}{2h^2}$$

nyomásváltozást (csökkenést) idéz elő.

A kapilláris cső belsejében (a külső higanyszint alatti térrészben) az elektromos térerősség gyakorlatilag nulla, mivel az a fémesen vezető higany majdnem teljesen zárt részében van (Faraday-kalitka).

Azt, hogy egy vékony cső belsejébe nem hatolhat be az elektromos tér a következő módon is beláthatjuk: a higany minden pontjában ugyanakkora (Φ_0) az elektromos potenciál, így a kapilláris cső belsejében is mindenhol Φ_0 a potenciál (*2. ábra*). (Ha nem így lenne, hanem az üveg két oldala között „ugrása” lenne a potenciálnak, akkor az nagyon nagy (vízszintes irányú) elektromos teret jelentene, ami biztosan nincs jelen. Ha viszont a cső belsejében (annak a higanyszint alatti részében) nincs potenciálkülönbség, akkor ott az elektromos térerősség nulla.



2. ábra

Így a higanynak a hajszálcső belsejében lévő részére nem hat elektromos vonzóerő (felfelé), ám a többi részére igen, emiatt a kapillárisban a higanyszint szükségszerűen csökken. Ha az erőegyensúly valamekkora $x_2 > x_1$ szintkülönbségnél áll be, akkor fennáll:

$$F = A(\Delta p'_{\text{hidroszt.}} - \Delta p_{\text{elekt.}}),$$

azaz

$$2r\pi\alpha|\cos\vartheta| = r^2\pi\left(\varrho g x_2 - \varepsilon_0 \frac{U^2}{2h^2}\right),$$

ahonnan

$$x_2 = \frac{2\alpha|\cos\vartheta|}{\varrho g r} + \varepsilon_0 \frac{U^2}{2h^2\varrho g} = x_1 + \varepsilon_0 \frac{U^2}{2h^2\varrho g}.$$

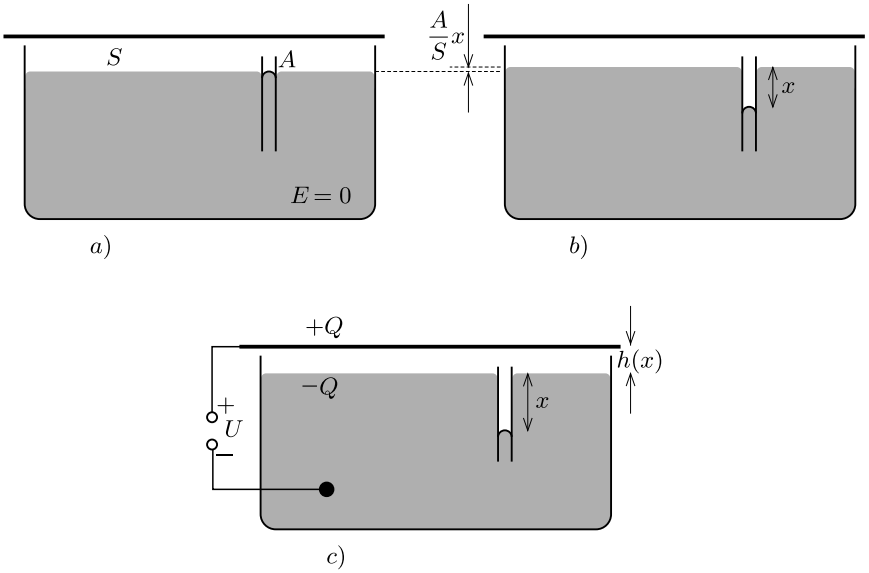
Leolvashatjuk, hogy a higanyszint süllyedése:

$$x_2 - x_1 = \varepsilon_0 \frac{U^2}{2h^2\varrho g} = \frac{(8{,}85\cdot 10^{-12})\cdot 20\,000^2}{2\cdot(6\cdot 10^{-3})^2\cdot 13\,546\cdot 9{,}81}\ \text{m} \approx 0{,}36\ \text{mm}.$$

Hauber Henrik (Győr, Révai Miklós Gimn., 11. évf.) és
Téglás Panna (Révkomárom, Szlovákia, Selye János Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

II. megoldás. Az egyensúlyi állapotot (akár az eredeti, feszültségmentes esetben, akár pedig a bekapcsolt feszültség hatására megváltozott helyzetben) a rendszer energiájának minimumát keresve is meg lehet határozni.

Tekintsük először a feszültségmentes esetet! Legyen az edény alapterülete S, a kapilláris cső keresztmetszete pedig A. (Nyilván feltehetjük, hogy $S \gg A$). Számítsuk ki a higanyból és az üvegcsőből álló rendszer E összenergiáját a higanyszint x nagyságú süllyedésének függvényében. Kiindulási állapotnak (az energia nullpontjának) válasszuk a *3.a ábrán* látható helyzetet, amikor $x = 0$. (Ez nyilván nem egyensúlyi helyzet, tehát az összenergia ilyenkor nem minimális.)



3. ábra

Ha a higanyszint a csőben x értékkel csökken, akkor az edény többi részében $\Delta h = \frac{A}{S}x$ mértékben megemelkedik (*3.b ábra*). $\Delta h \ll x$ miatt a szintemelkedést a feszültség nélküli esetben elhanyagolhatjuk. A rendszer összenergiája két tagból, a higany gravitációs helyzeti energiájából és a higany üveggel érintkező részének felületi energiájából tevődik össze.

A helyzeti energia akkora, amennyi munkával az xA térfogatú, ϱxA tömegű „hiányzó higanydarabot” a felszín magasságába tudjuk emelni. Mivel a higanydarab tömegközéppontja $x/2$ mélységben volt, a kérdéses energia:

$$E_1(x) = \varrho g r^2 \pi \frac{x^2}{2}.$$

A felületi feszültség nemcsak az egységnyi hosszon ható erőt, hanem az egymással érintkező anyagok egységnyi felületéhez tartozó energiát is megadja. Az üvegcső, a levegő és a higany érintkezésénél háromféle felületi feszültségről is beszélhatünk: $\alpha_{\text{Hg–levegő}}$ a levegővel érintkező higany egységnyi felületére jutó energia (ezt szokás szerint egyszerűen α-val jelölik), továbbá $\alpha_{\text{Hg-üveg}}$ és $\alpha_{\text{üveg–levegő}}$ a higany és

az üveg, illetve a levegő és az üveg energiáját adja meg felületegységenként. (Megmutatható, hogy fennáll az $\alpha_{\text{üveg–levegő}} - \alpha_{\text{Hg-üveg}} = \alpha_{\text{Hg–levegő}} \cdot \cos\vartheta$ összefüggés.)

A felületi energia ezek szerint

$$E_2(x) = 2r\pi x(\alpha_{\text{üveg–levegő}} - \alpha_{\text{Hg–üveg}}) = -2r\pi\alpha|\cos\vartheta| \cdot x,$$

a rendszer összenergiája:

$$E(x) = E_1(x) + E_2(x) = \varrho g r^2 \pi \frac{x^2}{2} - 2r\pi\alpha|\cos\vartheta| \cdot x.$$

Ennek a másodfokú kifejezésnek a minimumhelye (mint az teljes négyzetté alakítással, vagy a másodfokú egyenlet megoldóképletének alkalmazásával, esetleg deriválással belátható)

$$x_1 = \frac{2\alpha|\cos\vartheta|}{\varrho g r}$$

szintsüllyedésnél van, ennek megfelelő helyzetben lesz a higany egyensúlyban.

Foglalkozzunk most a fémlemezre kapcsolt feszültség esetével (*3.c ábra*). A lemez és az S nagyságú felületű higany egy olyan síkkondenzátornak tekinthető, amelynek kapacitása $C = \varepsilon_0 S/h$, és így U feszültség hatására

$$Q = \pm CU = \pm\varepsilon_0 \frac{US}{h}$$

töltés jut a „lemezeire”. Ennek a kondenzátornak az energiája:

$$E_{\text{elekt.}} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} \cdot h.$$

Hogyan változik ez az energia, ha a kapillárisban x-et süllyed a higanyszint, és emiatt az edény többi részében $\Delta h = \frac{A}{S}x$ mértékben megemelkedik? Az eddigiekben elhanyagolhatóan kicsinek tekintett Δh-t most nem hanyagolhatjuk el, mert akkor – tévesen – az egész elektrosztatikus energiaváltozást figyelmen kívül hagynánk. A szintemelkedés hatására a kondenzátor energiája így változik:

$$E_3(x) = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} \cdot \left(h - \frac{A}{S}x\right).$$

Megjegyzés. Fontos, hogy a kondenzátor energiájának változását olyan körülmények között vizsgáljuk, amikor nem az U feszültséget, hanem a Q töltés nagyságát tartjuk állandónak. Ezt például úgy valósíthatjuk meg, hogy a már feltöltött kondenzátort lekapcsoljuk a telepről. Ha nem így járnánk el, akkor a rendszer nem lenne energetikailag zárt, mert a lemezek távolságának változtatása közben a telep energiát adna le, vagy venne fel.

A rendszer teljes energiája:

$$E(x) = E_1(x) + E_2(x) + E_3(x) = \varrho g A \frac{x^2}{2} - \left(2r\pi\alpha|\cos\vartheta| + \frac{Q^2 A}{2\varepsilon_0 S^2}\right)x + \frac{Q^2 h}{2\varepsilon_0 S} \equiv$$

$$\equiv ax^2 + bx + c.$$

Ez is egy másodfokú polinom, amelynek minimumhelye:

$$x_2 = -\frac{b}{2a} = \frac{2\alpha|\cos\vartheta|}{\varrho g r} + \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 \varrho g S^2}.$$

Mivel $Q = \varepsilon_0 S \frac{U}{h}$, végül azt kapjuk, hogy a higanyszint süllyedése

$$x_2 - x_1 = \varepsilon_0 \frac{U^2}{2h^2 \varrho g} \approx 0{,}36 \text{ mm}.$$

Schmercz Blanka (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 11. évf.) dolgozatának felhasználásával

10 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Gábriel Tamás, Hauber Henrik, Kürti Gergely, Nemeskéri Dániel és Téglás Panna, 5 pontos Schmercz Blanka megoldása. Hiányos (1–2 pont) 4 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 412. Helyezzünk egymásba néhány, papírból készült muffin kosárkát, majd végezzünk ejtési kísérleteket! Mérjük meg, hogyan függ az állandósult esési sebesség a kosárkák számától! Határozzuk meg a papírkosárkák közegellenállási alakteényezőjét!

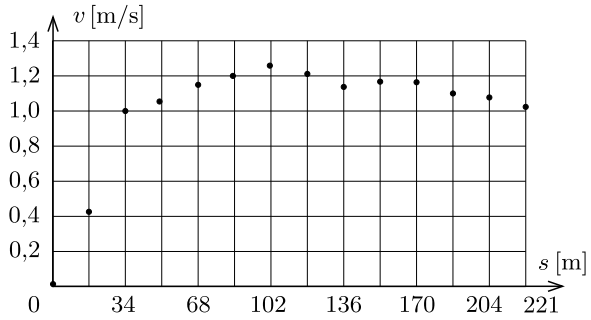
(*6 pont*) Közli: *Eero Uustalu,* Észtország

G. 773. A Föld–Hold rendszer a két égitest közös tömegközéppontja körül kering 27,32 napos keringési idővel a távoli állócsillagokhoz képest. Ehhez képest több, mint két nappal hosszabb idő, átlagosan 29,53 nap telik el két egymást követő holdtölte között. Magyarázzuk meg a kétféle periódusidő közötti különbséget, és egyszerűsített számítással mutassuk meg, hogy valóban nagyjából két nap az eltérés!

(*4 pont*)

G. 774. Az alábbi *diagramon* a Duna felszíni sebességprofilja látható az Erzsébet-hídnál 2018. március 10-én. A vízszintes tengelyen a bal parttól mért távolság (s) látható méterben, a függőleges tengelyen a Duna sebessége (v) m/s-ban. A mellékelt *táblázatban* találhatóak a mért adatok.

s [m]	v [m/s]	s [m]	v [m/s]
0	0,00	119	1,21
17	0,41	136	1,14
34	1,00	153	1,17
51	1,05	170	1,17
68	1,15	187	1,10
85	1,19	204	1,07
102	1,26	221	1,02



Becsüljük meg, hogy hány méterrel sodorna le a Duna, ha a bal parttól a partra mindig merőlegesen 1 m/s sebességgel eveznénk át egy, a bal parttól 221 méterre lévő hajóig!

(*4 pont*) Közli: *Csernovszky Zoltán,* Budapest

G. 775. Elhanyagolható hőkapacitású, hőszigetelő tartályban 1 kg nagyon hideg jégkása van, amire 1 kg 100 °C-os forróvizet öntünk. Milyen hőmérsékletű volt a jégkása, ha az egyensúlyi állapotot elérve 2 liter 0 °C-os víz lesz a tartályban?

(*3 pont*)

G. 776. Egy kutatólaboratóriumban óraüveget szeretnének sterilizálni UV fény segítségével. A sterizáláshoz az óraüveg 1 cm^2 nagyságú területére 150 mJ összenergiájú UV fénynek kell beérkeznie. Becsüljük meg, hogy mennyi ideig kell ehhez üzemeltetni az óraüveg felett 75 cm-re felszerelt (pontszerűnek tekinthető) UV-lámpát, ha a gyári adatok szerint a lámpától 1 méter távolságra az UV fény intenzitása 125 $\mu W/cm^2$.

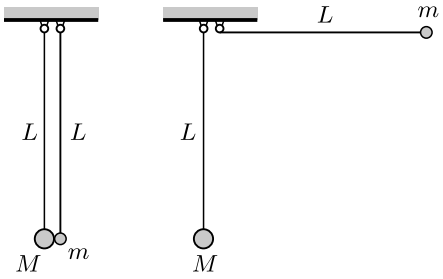
(*4 pont*)

P. 5391. Egy mély kútba követ ejtünk. A csobbanás hangját 4,25 s-mal az elejtés után halljuk meg. Milyen mélynek találjuk a kutat, ha $g = 10$ m/s^2-tel és $v_{\text{hang}} = 320$ m/s-mal számolunk? Mekkorának adódik a kút mélysége, ha $g = 9{,}81$ m/s^2-tel és $v_{\text{hang}} = 340$ m/s-mal számolunk? (A közegellenállás hatását hanyagoljuk el.)

(*4 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

P. 5392. Egy szökőkút középső nyílásán függőlegesen kiáramló vékony vízsugár H magasságig jut el. A vízsugár „vízhozama”, azaz az időegységenként kiáramló víz térfogata: $\Phi = \frac{\Delta V}{\Delta t}$. Milyen h magasságban lebeg egy m tömegű labda, ha a vízsugárba helyezzük? (Feltételezhetjük, hogy a vízsugár teljes keresztmetszete eléri a labdát, és arról vízszintes irányban spriccel szét.)

(*5 pont*) A *Kvant* nyomán



P. 5393. Egy m tömegű és egy $M = 3m$ tömegű, kicsiny golyóhoz fonalakat erősítünk, melyek másik végét a *bal oldali ábra* szerint azonos magasságban rögzítjük. A golyók középpontja ekkor a felfüggesztés alatt L mélységben van. A kisebb tömegű golyót felemeljük úgy, hogy a hozzá kapcsolódó fonál vízszintes legyen (*jobb oldali ábra*), majd a golyót elengedjük. A két golyó tökéletesen rugalmasan és egyenesen ütközik.

a) Az ütközés előtti pillanatban mekkora együttes erővel terheli a két fonál a felfüggesztést?

b) Mekkora a terhelés az ütközés utáni pillanatban?

c) Az első és a második ütközés között mekkora a két fonál által bezárt legnagyobb szög?

d) A *c*) esetben mekkora nagyságú, és milyen irányú az együttes terhelés?

e) Mekkora szöget zárnak be a fonalak a függőlegessel, amikor bekövetkezik a második ütközés?

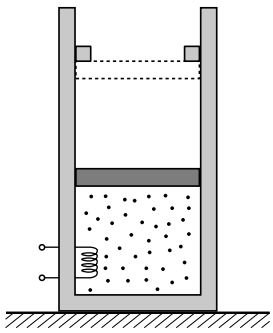
(*5 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

P. 5394. Egy m tömegű, homogén tömegeloszlású, ellipszis alakú lemez féltengelyeinek hossza a és b. Mekkora a test tehetetlenségi nyomatéka a $2a$ hosszúságú nagytengely végpontján átmenő, a lemez síkjára merőleges tengelyre vonatkoztatva? (A feladat elemi úton is megoldható.)

(*5 pont*) Közli: *Gelencsér Jenő,* Kaposvár

P. 5395. Egy éve, 2021 márciusában megérkezett az első hangüzenet a Perseverance marsjárótól (`go.nasa.gov/3ly2OE4`). Mekkora lehet a hangsebesség a Mars légkörében?

(*4 pont*) Újsághír alapján



P. 5396. Egy függőleges, hőszigetelő tartályban lévő T_0 hőmérsékletű kétatomos ideális gázt szabadon mozgó hőszigetelő dugattyú zár el környezetétől. A gázt lassan melegítjük, melynek következtében térfogata növekedni kezd. Melegítés közben, amikor a gáz térfogata éppen megduplázódott, a dugattyú a hengerben található szűkítő perem miatt megakadt. Határozzuk meg a gáz végső T hőmérsékletetét, ha ismert, hogy a gázzal közölt hő 80%-a fordítódott a belső energia növelésére.

(*4 pont*) Példatári feladat nyomán

P. 5397. Egy $Q = 10^{-9}$ C töltésű kicsiny testet egy nagy méretű, földelt fémlemeztől $d = 10$ cm távolságban szigetelő állványon rögzítettünk.

a) Mekkora a fémlemez felületi töltéssűrűsége a kicsiny testhez legközelebb eső P pontjában?

b) Milyen messze van P-től az a pont, ahol a fémlemez felületi töltéssűrűsége a maximális értéknek egyharmada?

(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 5398. Digitális fényképezőgépen 35 mm gyújtótávolságú objektív található, melynek közelpontja 25 cm. A közelpont az a szenzortól mért legkisebb távolság, ahonnan az objektív még képes fókuszálni.

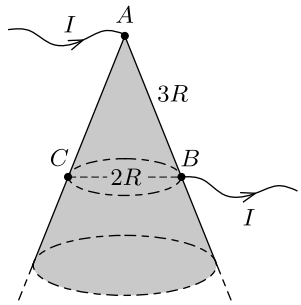
a) Hogyan változik meg a közelpont távolsága, ha az objektív és a fényképezőgép közé egy közgyűrűt helyezünk, melynek hatására az objektív 12 mm-rel messzebbre kerül a szenzortól?

b) Készítsünk egy közelpontba helyezett tárgyról felvételt közgyűrűvel és anélkül. Hogyan aránylik egymáshoz ezen két kép nagysága?

(*5 pont*) Közli: *Széchenyi Gábor,* Budapest

P. 5399. Egy vékony, δ vastagságú fémlemezből nagy, kúp alakú felületet hegesztettünk össze. A kúp A-val jelölt csúcsába I erősségű áramot vezetünk, majd az egyik alkotón lévő B pontból elvezetjük azt. Határozzuk meg a B-vel átellenes C pontban az áramsűrűség-vektor irányát és nagyságát! Ismert, hogy az AB távolság értéke $3R$, míg a B és C pontok távolsága $2R$.

(*6 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Biatorbány



❄

Beküldési határidő: 2022. április 15.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 72. No. 3. March 2022)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 155): **K. 724.** Julie cut a pizza into identical slices. Then she ate a few slices, but 3 slices remained. With a little calculation, she observed that she had eaten 3/4 of the whole pizza, plus 3/4 of a slice. How many slices were there? **K. 725.** We filled in the nine fields of a 3×3 table one by one, according

to the following rule: in each field, we entered the number of adjacent fields (i.e. fields sharing a common side with it) that had been filled in before. What was the order of the fields filled in? How many orders are possible? (Use the notation $a1, a2, \ldots, c2, c3$ to refer to individual fields.) **K. 726.** Arrange the numbers $1, 2, 3, 4, \ldots, 31, 32$ along the circumference of a circle such that the sum of any pair of adjacent numbers should be a perfect square. Explain your reasoning. **K/C. 727.** On each field of an $n \times n$ table there is a coin, on all of them "heads" showing on top. In each move, we can turn over exactly three coins in any row or column, changing heads to tails and tails to heads. If $n > 2$, is it possible to achieve with a sufficient number of moves that tails should show on top of each coin? Explain your answer. **K/C. 728.** We have 10 cards, with the numbers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 written on them. The cards are laid on the table in a random order in a row, and then we write the number of its position on each card (that is, the cards are numbered from 1 to 10). Thus there will be two numbers on each card. The two numbers on each card are multiplied together, and the products are all added up. *a*) What is the smallest possible value of the final sum? *b*) What is the largest possible value of the final sum?

New exercises for practice – competition C (see page 156): **Exercises up to grade 10: K/C. 727.** See the text at Exercises **K. K/C. 728.** See the text at Exercises **K. Exercises for everyone: C. 1709.** The integers a and b are factors of 720, but ab is not a factor of 720. How many such ordered pairs $(a; b)$ are there? (Proposed by *S. Róka,* Nyíregyháza) **C. 1710.** Four circles are drawn in a unit square as shown in the *figure.* The two larger circles have the same size, and they are tangent to each other as well as to the sides of the square. The two smaller circles are also congruent, and they are also tangent to the sides of the square and to the larger circles. What is the area of the rhombus formed by the centres of the four circles? **C. 1711.** Solve the equation $\sqrt{x-1801} + \sqrt{y-1860} = 2 - \frac{1}{\sqrt{x-1801}}$, where x and y denote real numbers. **Exercises upwards of grade 11: C. 1712.** The sides of a pentagon are all equal in length, and two of its angles are right angles. What may be the measures of the other three angles? (Proposed by *G. Károlyi,* Budajenő) **C. 1713.** Let x and a denote real numbers such that $x + \frac{1}{x} = a$. Determine the value of $x^{13} + \frac{1}{x^{13}}$ as a function of a.

New exercises – competition B (see page 157): **B. 5230.** Points C and D lie on a semicircular arc of diameter AB. Let A' and B' denote the feet of the perpendiculars dropped to the line CD from the points A and B, respectively. Prove that the line segments $A'C$ and $B'D$ are equal in length. (*3 points*) (Proposed by *L. Surányi,* Budapest) **B. 5231.** Prove that $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} \cdot (2^k - 1)$ for all positive integers n. (*4 points*) **B. 5232.** P is an interior point lying on the median drawn from vertex C of an acute-angled triangle ABC such that $\angle APB = 180^\circ - \angle ACB$. Show that the line AB is tangent to the circle APC. (*4 points*) (Proposed by *Sz. Kocsis,* Budapest) **B. 5233.** The vertices of a regular hexagon are labelled $1, 2, \ldots, 6$ in a random order. Then the absolute value of the difference of the labels of the adjacent endpoints is written on each side of the hexagon. Find the expected value of the sum of the six numbers written on the sides. (*4 points*) (Proposed by *J. Szoldatics,* Budapest) **B. 5234.** A positive integer n is defined to be a *mythical* number if each of its divisors is 2 smaller than a prime number. For example, 15 is a mythical number. What is the largest possible number of divisors that a mythical number may have? Find all mythical numbers that have the maximum number of divisors. (*5 points*) (Proposed by *S. Róka,* Nyíregyháza) **B. 5235.** Show that all prime

numbers greater than 3 that occur in the Fibonacci sequence are of the form $4k+1$. (*5 points*) **B. 5236.** Let a, b, c denote positive real numbers such that $abc=1$. Show that $a+a^2+a^3+b+b^2+b^3+c+c^2+c^3 \leqslant (a^2+b^2+c^2)^2$. (*6 points*) (Proposed by *M. Lovas,* Budapest and *M. Rozenberg,* Israel) **B. 5237.** In a triangle, r denotes the inradius, R is the circumradius, and s denotes the semiperimeter. Prove that if $r+2R=s$ then the triangle is right angled. (*6 points*) (Proposed by *R. Fridrik,* Szeged)

New problems – competition A (see page 159): **A. 821.** *a*) Is it possible to find a function $f:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ such that for every function $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ and positive integer m there exists $n\in\mathbb{N}$ such that set $\{k\in\mathbb{N}: f(n,k)=g(k)\}$ has at least m elements? *b*) Is it possible to find a function $f:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ such that for every function $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ there exists $n\in\mathbb{N}$ such that set $\{k\in\mathbb{N}:\ f(n,k)=g(k)\}$ has an infinite number of elements? **A. 822.** Is it possible to find rational numbers p, q and r such that $p+q+r=0$ and $pqr=1$? (Proposed by *Máté Weisz,* Cambridge) **A. 823.** For positive integers n consider the lattice points $S_n=\{(x,y,z):\ 1\leqslant x\leqslant n,\ 1\leqslant y\leqslant n,\ 1\leqslant z\leqslant n,\ x,y,z\in\mathbb{N}\}$. Is it possible to find a positive integer n for which it is possible to choose more than $n\sqrt{n}$ lattice points from S_n such that for any two chosen lattice points at least two of the coordinates of one is strictly greater than the corresponding coordinates of the other? (Proposed by *Endre Csóka,* Budapest)

Problems in Physics

(see page 186)

M. 412. Place several muffin cupcake paper cases into each other and carry out drop experiments. Measure how the terminal speed of the cases depends on the number of cases. Determine the drag coefficient of the cases.

G. 773. The Earth–Moon system revolves about the centre of mass of the two celestial bodies with a period of 27.32 days, relative to the distant fixed stars. However, in comparison, more than two days more time elapses between two full Moons, namely an average of 29.53 days. Explain the difference between the two period values, and with a simplified calculation show that the difference between them is indeed about two days. **G. 774.** The *diagram* on page 187 shows the surface flow velocity profile for the river Danube at bridge Erzsébet on 10 Marc 2018. On the horizontal axis the distance s in metres measured from the left riverbank, and on the vertical axis the speed of the water v in m/s can be seen. The attached *table* shows the recorded data. Estimate the distance at which the river would drift our boat down, if we were to row at a constant velocity of 1 m/s, perpendicularly to the riverbank, to a ship which is at a distance of 221 metres from the left riverbank. **G. 775.** In a thermally insulated flask of negligible heat capacity, there is 1 kg very cold crushed ice, to which 1 kg hot water of temperature 100 °C is poured. What was the temperature of the ice originally if finally there are 2 litres of water at a temperature of 0 °C in the flask? **G. 776.** Watch glasses are to be sterilized in a research laboratory by using UV light. In the sterilization process UV light of total energy of 150 mJ should fall onto a 1 cm^2 surface area of the watch glass. Estimate how long should the UV lamp be operated for this, if

s [m]	v [m/s]	s [m]	v [m/s]
0	0.00	119	1.21
17	0.41	136	1.14
34	1.00	153	1.17
51	1.05	170	1.17
68	1.15	187	1.10
85	1.19	204	1.07
102	1.26	221	1.02

the lamp is point-like and it is 75 cm above the watch glass. According to the factory data, the intensity of the UV light at a distance of 1 m from the lamp is 125 μW/cm^2.

P. 5391. A stone is dropped into a deep well. The sound of the splash is heard 4.25 s after the drop. How deep is the well if we carry out the calculation with $g = 10$ m/s^2 and $v_{\text{sound}} = 320$ m/s? What is the depth of the well if instead we use the values of $g = 9.81$ m/s^2 and $v_{\text{sound}} = 340$ m/s? (We neglect air resistance.) **P. 5392.** A thin water jet ejected vertically out of the central nozzle of a fountain reaches a height of H. The "flow rate" of the water jet, i.e. the volume of water flowing out per unit time is $\Phi = \frac{\Delta V}{\Delta t}$. At what height h does a ball of mass m float when it is placed into the water jet? (We can assume that the total cross-section of the water jet reaches the ball, and that the water splashes off from the ball in horizontal direction.) **P. 5393.** Threads are attached to two small balls of masses m and $M = 3m$ such that the other ends of the threads are fixed at the same height, as it is shown in the *figure on the left.* The centres of the balls are then at a depth of L below the suspension. Then the ball with the smaller mass is raised such that the thread attached to it becomes horizontal (*right figure*), and then this ball is released. The two balls collide head-on and totally elastically. *a*) Right before the collision what is the total force exerted on the suspension by the two threads? *b*) What is this total force right after the collision? *c*) Between the first and the second collisions of the balls what is the greatest angle enclosed by the two threads? *d*) In the case of *c*) what is the direction and the magnitude of the total force exerted by the threads on the suspension? *e*) What is the angle enclosed by the threads and the vertical when the second collision occurs? **P. 5394.** The semi-major and semi-minor axes of an ellipse-shaped uniform-density plate of mass m are a and b, respectively. What is the rotational inertia of the plate with respect to an axis which is perpendicular to the plane of the plate and goes through one end of the major axis of length $2a$? (The problem can also be solved by elementary considerations not requiring higher mathematics.) **P. 5395.** One year ago, in March 2021, the first voice message arrived from the Mars Perseverance Rover (`go.nasa.gov/3ly2OE4`). What might the speed of sound in the atmosphere of the Mars be? **P. 5396.** A sample of diatomic ideal gas at a temperature T_0 is enclosed in a vertical, thermally insulated container by an easily moveable and thermally insulated piston. The gas is slowly heated, thus its volume begins to increase. During heating, when the volume of the gas has just doubled, the piston in the cylinder got stuck in the rim which narrowed the cylinder. Determine the final temperature of the gas T, if it is known that 80% of the heat added to the gas was used to increase the internal energy. **P. 5397.** A small object of charge $Q = 10^{-9}$ C is fixed on an insulated stand, which is at a distance of $d = 10$ cm from a big grounded metal plate. *a*) What is the surface charge density of the metal plate at its point P, which is the closest to the small object? *b*) What is the distance between P and that point of the plate at which the surface charge density of the plate is one-third of the maximum surface charge density value? **P. 5398.** A digital camera has an objective lens of focal length of 35 mm, and its near point is at a distance of 25 cm. The near point is that smallest distance from the sensor from which the objective can still focus. *a*) How does the distance of the near point change if a ring is placed between the lens and the camera, such that the lens gets 12 mm further away from the sensor? *b*) Take a picture of an object at the near point, with and without using the ring. What is the ratio of the sizes of the two images? **P. 5399.** From a thin metal plate of width δ a large conical surface was welded. A current of I flows from the vertex of the cone A to a point B which lies on a slant height of the cone. Determine both the magnitude and the direction of the current density vector at point C on the surface of the cone, if C opposite to B. It is known that the distance of AB is equal to $3R$ and the distance between points B and C is $2R$.