KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

72. évfolyam 5. szám Budapest, 2022. május

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 1050 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

Főszerkesztő: RATKÓ ÉVA
Fizikus szerkesztő: GNÄDIG PÉTER
Műszaki szerkesztő: MIKLÓS ILDIKÓ
Borító: BURGHARDT ZSUZSA
Kiadja: MATFUND ALAPÍTVÁNY
Alapítványi képviselő: KÓS RITA
Felelős kiadó: KATONA GYULA
Nyomda: OOK-PRESS Kft.
Felelős vezető: SZATHMÁRY ATTILA
INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest,
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
Telefon: 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8800 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from
the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

Kedves Olvasóink!

A következő tanévre szóló megrendelésről szóló információk várhatóan május közepén kerülnek fel a honlapra.

A Kiadó

Ericsson-díj – tájékoztató

A következő évi Ericsson-díj várhatóan nyár elején kerül kiírásra. Kérjük, kövessék figyelemmel honlapunkat és/vagy facebook oldalunkat.

MATFUND Alapítvány

Konvex testbe írható tetraéder d-dimenzióban*

1. Egy egyszerű feladat: síkidom háromszögek közé „szendvicselve"

Adott egy korlátos konvex síkidom, K, amely zárt, tehát a határoló görbét is tartalmazza. Vegyük az összes K által tartalmazott háromszöget. Belátható (ezt hidd el), hogy ezek között van (esetleg több) maximális területű, legyen S ilyen háromszög. Igazold, hogy ha S-et az $\mathbf{s}$ súlypontjából (-2)-szeresére nagyítjuk (tehát középpontosan tükrözzük $\mathbf{s}$-re, majd vesszük a képét a 2 arányú, $\mathbf{s}$ középpontú hasonlóságnál), akkor az így kapott S' háromszög tartalmazza K-t. *Ne olvass tovább, a megoldás következik!*

Megoldás. Vegyünk egy S'-n kívüli $\mathbf{p}$ pontot. Ekkor S' valamelyik oldalegyenese elválasztja $\mathbf{p}$-t S'-től. Jelölje $\mathbf{a}_1'$ és $\mathbf{a}_2'$ az S' háromszög ezen egyenesen fekvő két csúcsát, és $\mathbf{a}_1$, illetve $\mathbf{a}_2$ az S háromszög megfelelő csúcsait. Könnyű látni, hogy

* A cikk az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-20-5 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.

az $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{p}$ háromszögnek nagyobb a területe, mint S-é (azonos alap, nagyobb magasság). Ezért S választásából adódóan $\mathbf{p}$ nem lehet K pontja, amivel az állítást beláttuk. $\square$

Ennek a cikknek a célja, hogy kimondjuk és belássuk a fenti feladat d-dimenziós analogonját. Ehhez először röviden bevezetjük a d-dimenziós tér fogalmát, és geometriájának néhány alapelemét.

2. Magasabb dimenzió – Bevezetés

Hogy néz ki a kérdés a háromdimenziós térben? Hasonló érveléssel belátható, hogy ha egy korlátos konvex testben, amely zárt, tehát a határoló felületet is tartalmazza, veszünk egy legnagyobb térfogatú tetraédert, akkor annak a súlypontjából vett (-3)-szoros nagyítottja tartalmazza a testet. Ehhez két dolgot kell tudni. Egyrészt azt, hogy ha a tér egy pontja nincs a tetraéderben, akkor annak egyik lapsíkja a tetraédert a ponttól elválasztja. Másrészt azt, hogy a tetraéder térfogata egyenesen arányos az alapterület és a magasság szorzatával (az arányossági tényező $\frac{1}{3}$, de ez itt nem fontos).

Mi történik háromnál magasabb dimenzióban? Ehhez egy-két dolgot tisztázni kell, leginkább azt, hogy mit jelent a magasabb dimenzió. Erről részletesen írtunk a KöMaL 2018 szeptemberi számában [1]. Röviden a *d-dimenziós euklídeszi geometria* felépítését így (is) lehet kezdeni: Vegyük a valós rendezett szám d-esek halmazát (d rögzített pozitív egész), tehát azt a halmazt, melynek elemei d koordinátából álló vektorok, $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$, ez geometriánk *ponthalmaza,* és $\mathbb{R}^d$-vel jelöljük. Egy ilyen vektort tudok szorozni valós számmal (minden koordinátát megszorzok vele), és megint egy vektort kapok, továbbá össze is tudok adni két ilyen vektort a szokott módon, koordinátánként. Tudom most definiálni két pont (tehát vektor) által meghatározott *szakaszt.* Az $(x_1, \ldots, x_d)$ és $(y_1, \ldots, y_d)$ pontok által meghatározott zárt szakasz az $(1-\lambda)(x_1, \ldots, x_d) + \lambda(y_1, \ldots, y_d)$ pontok halmaza, ahol λ befutja a $[0, 1]$ valós intervallumot. Gondold meg (tényleg!), hogy $d = 2$, illetve 3 esetén valóban így kapom meg a szakasz pontjait. Most már könnyű definiálni $\mathbb{R}^d$ *konvex halmazait:* azon ponthalmazok, amelyek tetszőleges két pontjukra az azok által meghatározott szakaszt is tartalmazzák.

A $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_d)$ és $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_d)$ pontok *távolságát* a sík- és térbeli esetek természetes általánosításaként a

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + \ldots + (p_d - q_d)^2}$$

képlettel definiáljuk.

Így, hogy távolságfogalmunk is van, definiálhatjuk a zárt halmazt. Egy $\mathbb{R}^d$-beli K halmazt *zártnak* hívunk, ha tartalmazza minden *torlódási pontját,* azaz minden olyan $\mathbf{p}$ pontot, amelyhez tetszőleges $\varepsilon > 0$ távolságra van $\mathbf{p}$-től legfeljebb ε távol lévő K-beli pont. Gondold meg, hogy például a síkon egy körlemez a határoló körvonal nélkül nem zárt, azzal együtt viszont zárt halmaz.

3. Konvex burok, hipersík, szimplex

Mi a tetraéder d-dimenziós megfelelője? Ehhez érdemes megismerkedni a *konvex burok* és a *hipersík* fogalmával.

Feladat. $\mathbb{R}^d$-ben tetszőlegesen sok konvex halmaz metszete is konvex.

Rögzítsünk egy tetszőleges H ponthalmazt $\mathbb{R}^d$-ben. Vegyük az összes H-t tartalmazó konvex halmaz metszetét, jelöljük K-val. A fenti feladat szerint K konvex halmaz, amely tartalmazza H-t. Ráadásul K a legkisebb a H-t tartalmazó konvex halmazok között, tehát minden H-t tartalmazó konvex halmaz tartalmazza K-t is. Ezt a K-t hívjuk *H konvex burkának.* Például a síkon három nem egy egyenesre eső pont konvex burka az a háromszöglemez, amelynek csúcsai az adott három pont.

Hogyan lehet a konvex burok pontjait előállítani? Legyen H véges ponthalmaz, $H = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\} \subset \mathbb{R}^d$ (az alsó indexek itt nem koordinátákat jelölnek, hanem a vektorok számozását).

Feladat. Lássuk be, hogy H konvex burka a

$$\lambda_1\mathbf{p}_1 + \lambda_2\mathbf{p}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{p}_n \tag{1}$$

alakú pontok halmaza, ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$ és $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$. Azt kell tehát belátni, hogy az (1) alakú pontok halmaza tartalmazza H-t (ez könnyű), konvex, és tetszőleges K-t tartalmazó konvex halmaz tartalmaz minden (1) alakú pontot.

A síkon három pont lehet egy egyenesen, vagy nem, utóbbi esetben azt mondhatjuk, hogy *általános helyzetűek.* Ekkor a konvex burkuk egy háromszög. A térben négy pont eshet egy síkba, vagy nem, utóbbi esetben, megintcsak általános helyzetűnek mondjuk őket, és észrevehetjük, hogy konvex burkuk egy (nem feltétlen szabályos) tetraéder. Hogy megyünk tovább a dimenzióval?

Az $\mathbb{R}^d$ térben *hipersíknak* nevezzük azon $(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ pontok halmazát, amelyek kielégítik az

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_d x_d = \alpha_0$$

lineáris egyenletet valamely $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{R}$ számokra, ahol az $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ számok nem mindegyike nulla. Gondold meg, hogy a síkon minden egyenes ilyen alakú, a 3-dimenziós térben pedig minden sík ilyen alakú. Ha a fenti egyenletben az egyenlőségjelet $\leqslant$, illetve $\geqslant$ jelre cseréljük, akkor az egyenlőtlenséget kielégítő pontok halmaza a hipersík által határolt egyik, illetve másik *zárt féltér.*

Végre megválaszolhatjuk, mi a tetraéder d-dimenziós megfelelője. Ha $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_{d+(x_1,\ldots,x_d)1}$ általános helyzetű pontok $\mathbb{R}^d$-ben, tehát nem tartalmazza őket hipersík, akkor ezen $d+1$ pont konvex burkát *szimplexnek* nevezzük.

3.1. Szimplex mint félterek metszete. Egy konvex ötszöget a síkon tekinthetünk úgy, mint az öt csúcsának a konvex burka. De úgy is nézhetünk rá, mint az öt oldalegyenes által meghatározott zárt félsíkok metszete. Hasonlóan, egy kockát a térben megkapunk mint a 8 csúcsának a konvex burka, de úgy is, hogy vesszük a 6 lapsíkját és az azok által meghatározott (megfelelő irányú) 6 féltér metszetét. Nem látjuk be, de nem meglepő a következő állítás.

1. állítás. *Legyenek $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_{d+1}$ általános helyzetű pontok $\mathbb{R}^d$-ben. Tudjuk, hogy minden $i = 1, \ldots, d+1$ indexre a $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_{d+1}\} \setminus \{\mathbf{p}_i\}$ ponthalmaz egy* *hipersíkot határoz meg. Jelölje H_i az ezen hipersík által határolt azon zárt félteret, amely tartalmazza $\mathbf{p}_i$-t. Ekkor a $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_{d+1}$ pontok konvex burkaként kapott szimplex megegyezik a $H_1, \ldots, H_{d+1}$ félterek metszetével.*

4. Térfogat

Az utolsó fogalom, amellyel még adósak vagyunk, ha a cikk elején feltett kérdést d-dimenzióban is fel akarjuk tenni, d-dimenziós konvex halmaz térfogata.

Középiskolában azt mondják, hogy az a oldalhosszú négyzet területe a^2, és minden konvex síkidomot „közelítünk” véges sok páronként nem átfedő (mondjuk tengely-párhuzamos) négyzet uniójával. Ahogy a közelítés egyre pontosabb, úgy tart a négyzetek összterülete egy számhoz. Ezt a számot hívjuk a konvex síkidom területének.

Ez egy jó felépítése a területnek, de azért tudni kell, hogy itt néhány lukat majd csak az egyetemen (pl. matematika szakon) fognak betömni: mit jelent az, hogy sok kis négyzet uniója közel van a síkidomhoz? Ahogy finomodik a közelítés, miért tart a négyzetek összterülete egy számhoz? Ez a munka szépen elvégezhető, de mi most ezt nem tesszük meg, mi is „hitelbe” dolgozunk: hidd el, kedves Olvasó, hogy egy d-dimenziós konvex testet ugyanígy lehet kis kockák uniójaként közelíteni, és ezen uniók térfogata, ahogyan a közelítés egyre pontosabb, tart egy számhoz, amelyet a konvex test *d-dimenziós térfogatának* hívunk.

4.1. Gúla térfogata. Legyen A az $\mathbb{R}^d$ tér egy hipersíkjának egy konvex részhalmaza, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$ pedig ezen hipersíkon kívül eső pont. Ekkor az $A \cup \{\mathbf{p}\}$ halmaz konvex burkát A alapú, $\mathbf{p}$ csúcsú *gúlának* hívjuk. A hipersíkot azonosíthatjuk $\mathbb{R}^{d-1}$-gyel, és így tudunk A-nak a $(d-1)$-dimenziós térfogatáról beszélni. A hipersík és $\mathbf{p}$ távolsága (tehát az őket összekötő legrövidebb szakasz hossza) a gúla *magassága.* Belátható, hogy

(2)
$$\text{gúla } d\text{-dimenziós térfogata} = \frac{1}{d} \times \big(\text{alap } (d-1)\text{-dimenziós térfogata}\big) \times \text{magasság}.$$

A képlet $d = 2$ és 3 esetben ismerős lehet. Most nem látjuk be (2)-t, ehhez egy kicsit kell tudni integrálni.

5. Szimplexek között

Ha egy háromszöget a súlypontja körül (-2)-szeresére nagyítunk, akkor egy őt tartalmazó háromszöget kapunk. Ha egy tetraédert a súlypontja körül (-3)-szorosára nagyítunk, akkor egy őt tartalmazó tetraédert kapunk. Most végiggondoljuk mindezt d dimenzióban.

Legyen S a $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{d+1}$ általános helyzetű $\mathbb{R}^d$-beli pontok konvex burkaként kapott szimplex. A súlypontja az

$$\mathbf{s} = \frac{1}{d+1}(\mathbf{p}_1 + \ldots + \mathbf{p}_{d+1})$$

pont.

Feladat. Lássuk be, hogy S-nek az $\mathbf{s}$ középpontú $(-d)$-arányú középpontos nagyítottja, S', tartalmazza S-et. *Ne olvass tovább, segítség következik!*

Segítség. Állítsuk elő a $\mathbf{p}_i$ pontot $\mathbf{p}_i = \lambda_1\mathbf{p}'_1 + \ldots + \lambda_{i-1}\mathbf{p}'_{i-1} + \lambda_{i+1}\mathbf{p}'_{i+1} + \ldots + \lambda_{d+1}\mathbf{p}'_{d+1}$ alakban, ahol a λ_j együtthatók nemnegatívak, és az összegük 1.

Végül kimondhatjuk a cikk bevezetőjében szereplő síkbeli feladat d-dimenziós változatát.

2. tétel. *Adott $\mathbb{R}^d$-ben egy zárt, korlátos, konvex halmaz, K. Vegyük az összes K által tartalmazott szimplexet. Belátható (ezt hidd el), hogy ezek között van (esetleg több) maximális d-dimenziós térfogatú, legyen S ilyen szimplex. Ekkor, ha S-et az* $\mathbf{s}$ *súlypontjából $(-d)$-szeresére nagyítjuk, akkor az így kapott S' szimplex tartalmazza K-t.*

Bizonyítás. A tétel bizonyítása az eddigi előkészületekkel ugyanaz, mint a síkbeli esetté. Jelölje S csúcsait $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{d+1}$, az S' csúcsait $\mathbf{a}'_1, \ldots, \mathbf{a}'_{d+1}$. Ekkor 1. állítás szerint minden S'-n kívül eső $\mathbf{p}$ ponthoz van egy $i \in \{1, \ldots, d+1\}$ index, hogy S' az $\{\mathbf{a}'_1, \ldots, \mathbf{a}'_{d+1}\} \setminus \{\mathbf{a}'_i\}$ pontok által meghatározott hipersík egyik oldalán található, míg $\mathbf{p}$ a másikon. A (2) képlet alapján könnyű látni, hogy az

$$\big(\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{d+1}\} \setminus \{\mathbf{a}_i\}\big) \cup \{\mathbf{p}\}$$

halmaz konvex burkaként kapott szimplex térfogata nagyobb S térfogatánál, ezért $\mathbf{p}$ nem lehet K pontja. $\square$

Feladat. Lássuk be, hogy S-nek az $\mathbf{s}$ középpontú $(d+1)$-arányú középpontos nagyítottja tartalmazza K-t.

Hivatkozás

[1] Naszódi M.: *Politópok és a gömb d-dimenzióban,* KöMaL **68.** évf. 9. sz. (2018).

Naszódi Márton

EGMO 2022

Az idei Európai Lányok Matematikai Olimpiáját (EGMO-t) Magyarország szervezte 2022. április 6–12. között Egerben. A verseny weboldala:

`https://egmo2022.hu/`.

Erre a megmérettetésre szervező országként két csapatot is delegálhattunk.

A versenyen a Nemzetközi Matematikai Diákolimpiához (IMO) hasonlóan két versenynap van, mindkét nap 3–3 feladatot kell megoldani 4,5 óra alatt. Minden feladat 7 pontot ér. A feladattípusok a következők voltak: geometria, számelmélet, algebra (első nap), algebra, kombinatorika, geometria (második nap). A feladatsorok és megoldások a verseny hivatalos honlapján elérhetőek:

`https://www.egmo.org/egmos/egmo11/`.

Idén 57 országból 222 résztvevő oldotta meg a feladatokat.

A magyar lányok kiváló eredményt értek el. A „HUN" csapat a hivatalos európai listán a 31 európai ország között az 5. helyet szerezte meg 96 ponttal. Az összes (57) résztvevő országot tekintve a „HUN" csapat 8., a „HUNB" csapat pedig (nem hivatalos európai csapatként) a 19. lett. Az egyéni eredmények:
Fülöp Csilla: 32 pont, európai 3. hely, összesített 12. hely, *aranyérem;*
Kercsó-Molnár Anita: 25 pont, összesített 35. hely, *ezüstérem;*
Páhán Anita Dalma: 24 pont, európai 24. hely, összesített 40. hely, *ezüstérem;*
Somogyi Dalma: 22 pont, összesített 51. hely, *ezüstérem;*
Sztranyák Gabriella: 21 pont, európai 33. hely, összesített 56. hely, *bronzérem;*
Nagy Leila: 19 pont, európai 44. hely, összesített 74. hely, *bronzérem;*
Ungár Éva: 16 pont, összesített 97. hely, *bronzérem;*
Beinschroth Ninett: 15 pont, összesített 118. hely.

A végső eredménylista a

`https://www.egmo.org/egmos/egmo11/scoreboard/`

oldalon tanulmányozható.

Köszönjük a Morgan Stanley és A Gondolkodás Öröme Alapítvány támogatását.

A jövő évi verseny 2023. április 13–19. között Portorožban lesz. Reméljük, hogy jövőre is hasonlóan sok lelkes lánnyal találkozhatunk a felkészítés folyamán és a válogatóversenyeken.

Kiss Melinda Flóra, Baran Zsuzsa, Janzer Lili
az EGMO felkészítő csapat nevében

Az EGMO 2022 feladatai

Első nap

1. Legyen ABC egy olyan hegyesszögű háromszög, ahol $BC < AB$ és $BC < CA$. A P pont az AB szakaszon, a Q pont az AC szakaszon helyezkedik el úgy, hogy $P \neq B$, $Q \neq C$ és $BQ = BC = CP$. Legyen T az APQ háromszög körülírt körének középpontja, H az ABC háromszög magasságpontja, valamint S a BQ és CP egyenesek metszéspontja. Bizonyítsuk be, hogy a T, H és S pontok egy egyenesre esnek.

2. Jelölje $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ a pozitív egész számok halmazát. Keressük meg az összes olyan $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ függvényt, amire tetszőleges pozitív egész a, b számokra az alábbi két feltétel mindegyike teljesül:

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$, és

(2) az $f(a)$, $f(b)$ és $f(a + b)$ számok közül legalább kettő egyenlő.

3. Egy pozitív egészekből álló, végtelen $a_1, a_2, \ldots$ sorozatot *kockásfülűnek* nevezünk, ha

(1) a_1 teljes négyzet, és

(2) minden $n \geqslant 2$ egészre az a_n a legkisebb pozitív egész szám, amire

$$na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + 2a_{n-1} + a_n$$

teljes négyzet.

Bizonyítsuk be, hogy minden kockásfülű $a_1, a_2, \ldots$ sorozathoz létezik olyan pozitív egész k szám, amire $a_n = a_k$ teljesül minden $n \geqslant k$ egész esetén.

Második nap

4. Adott $n \geqslant 2$ pozitív egész számra határozzuk meg a legnagyobb pozitív egész N számot, amire létezik $N+1$ valós szám $a_0, \ldots, a_N$ úgy, hogy

(1) $a_0 + a_1 = -\frac{1}{n}$, és

(2) $(a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1}$ minden $1 \leqslant k \leqslant N-1$-re.

5. Tetszőleges pozitív egész n, k számokra jelölje $f(n, 2k)$ azt a számot, ahányféleképpen egy $n \times 2k$-as tábla teljesen lefedhető nk darab 2×1-es dominóval. (Például $f(2,2) = 2$ és $f(3,2) = 3$.)

Keressük meg az összes olyan pozitív egész n számot, amire minden pozitív egész k szám esetén $f(n, 2k)$ páratlan.

6. Legyen $ABCD$ egy húrnégyszög, a körülírt körének középpontját jelöljük O-val. Az A és B pontokból húzott belső szögfelezők metszéspontja legyen X, a B és C pontokból húzott belső szögfelezők metszéspontja legyen Y, a C és D pontokból húzott belső szögfelezők metszéspontja legyen Z, valamint a D és A pontokból húzott belső szögfelezők metszéspontja legyen W. Továbbá, az AC és BD egyenesek metszéspontja legyen P. Tegyük fel, hogy az X, Y, Z, W, O és P pontok mind különbözőek.

Bizonyítsuk be, hogy az O, X, Y, Z és W pontok pontosan akkor fekszenek egy körön, ha a P, X, Y, Z és W pontok egy körön fekszenek.

EGMO beszámoló

Az EGMO-ra egy szerdai napon érkeztünk meg, együtt másik 40 ország csapatával. Mivel idén Magyarország rendezte a versenyt, a szokásos 4 helyett 8 versenyzővel indulhattunk.

Másnapra már a legtávolabbról érkezők is ott voltak, és kezdődhetett az esemény. A csütörtöki napot a megnyitóval indítottuk, aminek a műsorai megalapozták a jó hangulatot, és láthattuk az online résztvevő csapatokat is. A verseny szempontjából ez a nap a feladatsorok fordításáról szólt, így ameddig a leaderek készítették nekünk a feladatokat, mi egy városnéző kincsvadászaton vehettünk részt csapatonként. Itt a város minden pontján lévő állomásokon kellett különböző vicces feladatokat megoldani, mint a minél magasabb jenga torony építése. Ezeket a szuper guide csapat szervezte meg és bonyolította le, akik igazán kitettek magukért az egész verseny alatt.

A harmadik és a negyedik nap délelőttjein voltak a versenyek, ahol 3-3 feladaton gondolkozhattunk. A versenynapokat este egy-egy csapatmegbeszélés előzte meg, ahol sok jótanácsot és bátorítást (ölelést) kaptunk a csapatvezetőinktől. A verseny után különböző workshopokon vettünk részt, például a Jane Street szervezésében különböző dolgok számát/hosszát tippelhettük meg, lehetett sportolni, várost nézni és kézműveskedni. Este pedig egy karaoke-estet tartottunk, ahol a fiatal szervezőkkel és a többi versenyzővel együtt a legnagyobb slágerekre (pl. Katy Perry Hot'n'cold-jára) tomboltunk, és az énekhangunktól zengett a hotel, miközben a koordinátorok a megoldásaink javításával bajlódtak.

Vasárnap vonattal elmentünk a Szalajka-völgybe, ahol egy gyors kisvonatozás után a Medve Matek által szervezett programon vettünk részt. Különböző helyszíneken kellett feladatokat megoldanunk, majd együtt visszasétáltunk a vasútállomásra. Míg mi jól éreztük magunkat az erdőben, a koordinátorok és a csapatvezetők befejezték a feladatok javítását, és a nap végére már meg is lettek az eredmények. Estére kvíz és közös éneklés volt tervezve, majd társasoztunk több csapattal.

Másnap délelőtt Budapestre mentünk várost nézni, ahol a kötelező program mellé sikerült beiktatnunk egy gofrizást is :). Délután a záróünnepséggel hivatalosan is véget ért a verseny része az eseménynek. Miután megkaptuk az 1 arany-, 3 ezüst- és 3 bronzérmet, a közös vacsorával kezdtük az ünneplést. Utána rengeteget táncoltunk, nagyon jól éreztük magunkat. Jó volt a társaság, együtt buliztak a versenyzők, a guidok, a csapatvezetők és a koordinátorok is.

Az EGMO nem jöhetett volna létre a lelkes szervezők, a csodás csapatvezetőink és a szuper guideok nélkül. Minden nap tele volt programmal, sose unatkoztunk egy percig sem. Kós Gézának személyes köszönet a kockásfülű nyulakért, akik a verseny alatt is támogattak, és akik miatt kiharcoltuk, hogy egy helyett két plüsst is be lehessen vinni a terembe. Melindának, Lilinek és Zsuzsának köszönjük a sok támogatást és tanácsot.

Az EGMO nagy hatással volt ránk, emlékezetessé tette még az ismerkedős bingo játék és a szuper, ötletes feladatok, például az 5-ös kombinatorika. Nagy élmény volt számunkra, hogy közel 40 országból érkező, hasonló gondolkodású, okos, matekos lányokkal ismerkedhettünk meg, akikkel osztozhattunk a matek és a tudományok szeretetében.

A versenyzők nem csak Európából, hanem a világ minden tájáról érkeztek, beszélgettünk pl. amerikaiakkal, németekkel, costa ricaiakkal, írekkel, izraeliekkel, indiaiakkal és azerbajdzsániakkal is. Szuper élmény volt más kultúrákkal megismerkedni, és életre szóló barátságokat kötni a magyar és külföldi lányokkal.

A magyar csapat
(Vica, K-M. Anita, P. Anita, Leila, Gabi, Ninett, Dalma, Csilla)

Megoldásvázlatok a 2021/4. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:*

a) $a^2 - 5a + 4 \leqslant 0$, (*3 pont*)

b) $\log_{\frac{1}{2}}(5^{x+1} - 25^x) \leqslant -2$. (*8 pont*)

Megoldás. *a*) Az $a^2 - 5a + 4$ másodfokú kifejezés gyökei: $a_1 = 1$, $a_2 = 4$. A parabola ábrázolása után leolvasható, hogy az $[1;4]$ intervallumon teljesül az egyenlőtlenség.

b) A logaritmus definíciója értelmében az $5^{x+1} - 25^x > 0$ feltételnek teljesülnie kell. Emiatt $0 < 5^x < 5$. Az exponenciális függvény szigorúan monoton nő, ha az alapja 1-nél nagyobb. Így a kifejezés értelmezési tartománya $D = \,]-\infty; 1[$.

Logaritmusos kifejezésként írhatjuk fel a jobb oldalt:

$$\log_{\frac{1}{2}}(5^{x+1} - 25^x) \leqslant \log_{\frac{1}{2}} 4.$$

A logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökken, ha az alapja kisebb, mint 1. Rendezve a másodfokú egyenlőtlenséget: $0 \geqslant 5^{2x} - 5 \cdot 5^x + 4$.

Új változó vezethető be 5^x helyett, legyen hát $a = 5^x$, és így az előző részfeladat eredményét felhasználhatjuk: $1 \leqslant 5^x \leqslant 4$, amelyből visszahelyettesítés után, az exponenciális függvény monoton növekedésére hivatkozva, az értelmezési tartománnyal összevetve adódik a megoldás: $x \in [0; \log_5 4]$.

2. *A bolthálózat raktárában* 14 500 *doboz üdítőt tárolnak. A rövid szavatossági idő miatt a tulajdonos szeretné a teljes készletet* 29 *napon belül eladni. Az első napon* 150 *darabot sikerült értékesíteni.*

a) *Legalább mennyivel kell naponta növelni az eladott üdítők számát, hogy a terv sikerüljön?* (*3 pont*)

A bolthálózat növekedése miatt szükségessé vált egy új raktárépület megvásárlása, amelyet a tulajdonos hitel felvételével kíván megvalósítani. A banktól kapott 30 *millió forint kölcsönt* 5 *éven át* 5 *egyenlő részletben kell visszafizetnie. A* 2021. *januárjában felvett kölcsönre a bank minden év végén* 3,5%*-os kamatot számít fel. A törlesztést a tulajdonos a következő év januárjában kezdi meg.*

b) *Mekkorák az egyes törlesztőrészletek ezer forintra kerekítve?* (*5 pont*)

A bolt gazdasági vezetője azt tanácsolta, hogy évente maximum 4 *millió forintot költsön a tulajdonos az új raktárépületre felvett kölcsön törlesztésére, az előzővel megegyező banki kamat mellett.*

c) *Hány év alatt tudja így a tulajdonos visszafizetni a kölcsönt?* (*5 pont*)

Megoldás. *a*) A számtani sorozat első tagja 150; a tagok száma 29; az első 29 tag összege 14 500. Behelyettesítve a számtani sorozat összegképletébe:

$$14\,500=\frac{29\cdot(300+28d)}{2}.$$

Az egyenlet megoldása után $d=25$, tehát legalább 25 darabbal kell növelni a naponta eladott mennyiséget.

b) A banktól felvett hitel: $a_0=30\,000\,000$ Ft; az éves kamat: $p=3{,}5\%$, ezért $q=1{,}035$; a törlesztőrészlet: x Ft.

2026 januárjában, az 5. törlesztőrészlet kifizetése után 0 Ft-ra csökken a tartozás:

$$a_0\cdot q^5-x\cdot q^4-x\cdot q^3-x\cdot q^2-x\cdot q-x=0.$$

Rendezzük az egyenletet:

$$a_0\cdot q^5=x\cdot q^4+x\cdot q^3+x\cdot q^2+x\cdot q+x.$$

A jobb oldalon kiemelhetünk x-et, így:

$$x=\frac{a_0\cdot q^5}{q^4+q^3+q^2+q+1}=6\,644\,441{,}2.$$

6 644 000 Ft-ot kell évente törleszteni.

c) Ha évente maximálisan $y=4\,000\,000$ Ft-ot tud törleszteni, akkor az n-edik törlesztőrészlet kifizetése után 0 Ft-ra csökken a tartozás. Ezért:

$$a_0\cdot q^n-y\cdot q^{n-1}-y\cdot q^{n-2}-\ldots-y\cdot q^2-y\cdot q-y=0.$$

Rendezzük az egyenletet, emeljünk ki y-t, és használjuk a mértani sorozat első n elemének összegére vonatkozó összefüggést:

$$a_0\cdot q^n=y\cdot\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Behelyettesítve a megadott értékeket:

$$30\,000\,000\cdot 1{,}035^n=4\,000\,000\cdot\frac{1{,}035^n-1}{1{,}035-1},$$

$$1{,}05\cdot 1{,}035^n=4\cdot 1{,}035^n-4,$$

$$\frac{80}{59}=1{,}035^n,$$

$$n=\log_{1{,}035}\frac{80}{59}\approx 8{,}85.$$

Tehát 9 év alatt tudja a tulajdonos visszafizetni a kölcsönt.

3. *Legyen az U alaphalmaz az első n pozitív egész szám, amelynek három részhalmaza:*

A : 6*-tal osztható számok,*
B : 15 *többszörösei,*
C : *olyan egészek, amelyeknek osztója a* 20.

a) Mennyi lehet n legkisebb és legnagyobb értéke, ha az $A \cap B \cap C$ halmaz elemszáma 3? (*3 pont*)

b) Hány olyan szám található 1 *és* 200 *között, amelyek A, B és C halmazok közül pontosan kettőnek elemei?* (*5 pont*)

c) Határozzuk meg a következő állítások logikai értékét. Válaszainkat minden esetben indokoljuk.

(*i*) *A* $B \setminus (A \cup C)$ *halmaz elemeinek utolsó számjegye* 5 *vagy* 6.
(*ii*) $B \setminus (A \cup C) = B \setminus A$.
(*iii*) *A* $C \setminus (A \cup B)$ *halmaz elemeinek szorzata* 10 *darab* 0*-ra végződik* $n = 200$ *esetén.* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) $A \cap B \cap C$ a 60-nal osztható számok halmaza, ennek elemszáma 3, azaz $A \cap B \cap C = \{60; 120; 180\}$. Ezért n legkisebb értéke 180; legnagyobb értéke 239 lehet.

b) Az $A \cap B$ halmaz a 30-cal osztható 200-nál nem nagyobb számok; elemszáma 6.

Az $A \cap C$ halmaz a 60-nal osztható 200-nál nem nagyobb számok; elemszáma 3.

Az $B \cap C$ halmaz a 60-nal osztható 200-nál nem nagyobb számok; elemszáma 3.

Az $A \cap B \cap C$ halmaz a 60-nal osztható 200-nál nem nagyobb számok; elemszáma 3.

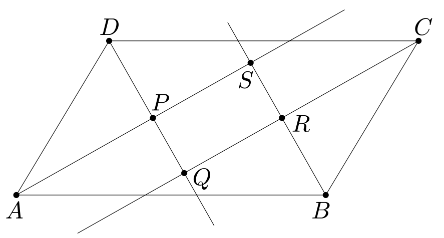
Pontosan két halmaznak elemei: $|A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C| - 3 \cdot |A \cap B \cap C| = 3$.

Megjegyzés. Ezek az elemek: 30; 90; 150.

c) (*i*) Igaz, mert azok a számok, amelyek 15-tel oszthatóak, de 6-tal és 20-szal nem, azok nem párosak, de oszthatóak 5-tel, ezért 5-re végződnek.

(*ii*) Igaz, Venn-diagramon ábrázolva $(B \cap C) \setminus A = \emptyset$.

(*iii*) Hamis, $C \setminus (A \cup B) = \{20; 40; 80; 100; 140; 160; 200\}$, az elemek szorzata 9 db nullára végződik.



4. *Tekintsük az $ABCD$ paralelogrammát, amelynek AB oldala* 16 cm*-rel hosszabb, mint az AD oldala, valamint hegyesszöge $DAB\sphericalangle = \alpha$.*

a) Igazoljuk, hogy a paralelogramma szögfelezői által meghatározott $PQRS$ négyszög téglalap. (*3 pont*)

b) Igazoljuk, hogy a $PQRS$ téglalap területe cm^2*-ben mérve $T = 128 \cdot \sin \alpha$.* (*7 pont*) *c) Mekkora a PQRS téglalap átlójának hossza?* *(3 pont)*

Megoldás. *a*) Az ASB háromszög A csúcsánál lévő szöge a szögfelezés miatt $\frac{\alpha}{2}$; B csúcsánál lévő szöge:

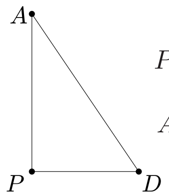
$$\frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

A háromszög S csúcsánál lévő szöge így

$$180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)\right) = 90^\circ.$$

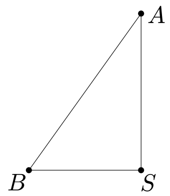
Hasonlóan igazolható, hogy a P, Q, R csúcsoknál lévő szögek szintén derékszögek. Így a $PQRS$ négyszög téglalap.

b) Legyen a paralelogramma AD oldala a, így az AB oldal hossza $a + 16$.



$$PD = a \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$$

$$AP = a \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$$



$$BS = (a + 16) \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$$

$$AS = (a + 16) \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$$

A téglalap oldalai:

$$PS = AS - AP = (a + 16) \cdot \cos\frac{\alpha}{2} - a \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = 16 \cdot \cos\frac{\alpha}{2},$$

$$PQ = QD - PD = BS - PD = (a + 16) \cdot \sin\frac{\alpha}{2} - a \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = 16 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}.$$

A téglalap területe:

$$T = PS \cdot PQ = 16^2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Használjuk a kétszeres szögekre vonatkozó addíciós tételt:

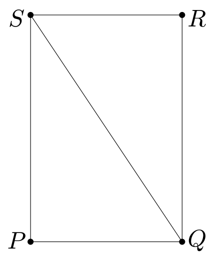
$$T = 16^2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = 128 \cdot 2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = 128 \cdot \sin\alpha.$$

Ezt kellett bizonyítanunk.

c) A PSQ háromszögben felírhatjuk a Pitagorasz-tételt:

$$QS^2 = \left(16 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(16 \cdot \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2,$$

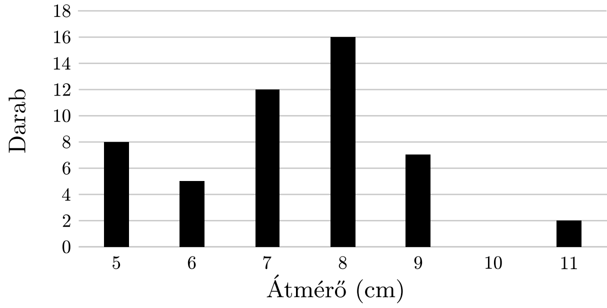
$$QS^2 = 16^2 \cdot \left(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}\right).$$



Használhatjuk a trigonometrikus Pitagorasz-tételt, így a zárójelben szereplő kifejezés értéke pontosan 1. A téglalap átlójának hossza tehát 16 cm.

II. rész

5. *Almaszüret után véletlenszerűen kiválasztottak* 50 *darab almát, megmérték az átmérőjüket, ezt mutatja az alábbi* oszlopdiagram.



a) Mennyi az almák átmérőjének átlaga és szórása? (*4 pont*)

A következő évben újfajta tápoldatot is használtak az almafák öntözésére. Az újabb almaszüret után újra választottak 50 *darabot, amelyeknek megmérték az átmérőjét. Az előző évi mintával összehasonlítva azt tapasztalták, hogy a* 8 cm*-nél kisebb gyümölcsök átmérője* 24%*-kal nőtt, ha méretüket egész* cm*-re kerekítjük.*

b) Mekkora lesz az új minta mediánja, illetve a minta mediántól való átlagos abszolút eltérése? (*5 pont*)

A szüreten szedett gyümölcsből almalevet préselnek. A leszedett almát meghámozzák, kiszedik a magját, ezáltal 12%*-ot veszít a tömegéből. A préseléskor* 8 kg *pucolt almából átlagosan* 5 liter *levet készítenek.*

c) Hány kg almát szedtek a szüret alkalmával, ha abból összesen 3 000 liter *almalé készült?* (*3 pont*)

Az almát 200 Ft/kg *egységáron tudja eladni a gazda. Az almalé árát úgy szeretné meghatározni, hogy azzal* 20%*-kal több bevétele legyen.*

d) Mennyibe kerüljön 1 liter *almalé? (A választ egész forintra kerekítve adjuk meg.)* (*4 pont*)

Megoldás. *a*) Az almák átmérőjét tekintve az átlag

$$\overline{x} = \frac{8 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + \ldots + 2 \cdot 11}{50} = \frac{367}{50} = 7{,}34 \text{ cm},$$

szórása: $D(\overline{x}) = \sqrt{2{,}1444} = 1{,}464$ cm.

b) A régi 5 cm átmérőjű almából a tápoldat hatására 6 cm átmérőjű lett. A 6 cm átmérőjű 7 cm-esre nőtt, a 7 cm helyett 9 cm átmérőjűek lettek az almák. A többi alma mérete nem változott. Táblázatba foglalva a tápoldat hatására kapott új minta adatait:

átmérő (cm)	6	7	8	9	10	11
darab	8	5	16	19	–	2

A mediánt az adatok nagyság szerinti sorrendjében a 25. és 26. adat átlaga adja: 8 cm. A mediántól való átlagos abszolút eltérés:

$$\frac{8\cdot|6-8|+5\cdot|7-8|+\ldots+2\cdot|11-8|}{50}=\frac{46}{50}=0{,}92\text{ cm.}$$

c) x kg almából $0{,}88x$ kg hámozott alma lesz. Egyenes arányosság van a hámozott alma tömege és a belőle készülő almalé között. A két mennyiség hányadosa állandó. $\frac{8}{5}=\frac{0{,}88x}{3000}$, amelyből $x=5454{,}54$.

Tehát 5454,54 kg almából lesz 3000 l almalé.

d) y kg alma eladása esetén $200y$ Ft bevétel származik. Ennél szeretnénk 20%-kal többet: $200y\cdot 1{,}2$ Ft bevétel legyen az almalé árából. y kg almából $0{,}88y\cdot\frac{5}{8}$ liter almalé készül.

Legyen az almalé literenkénti ára z Ft. Így a bevételünk: $0{,}88y\cdot\frac{5}{8}\cdot z$. Felírható a

$$200y\cdot 1{,}2=0{,}88y\cdot\frac{5}{8}\cdot z$$

egyenlet, amelyből $z=436{,}36$.

Az almalevet 436 Ft-ért kell eladni.

6. *A színház szervezési osztályán* 196 *bérletet adtak el az aktuális évadra. A bérletes előadások előtt – a bérlettulajdonosok elfoglaltsága miatt – átlagosan* 5% *bérletlemondás történik. A színház pénztárában az ilyen esetekre úgynevezett lépcsőjegyeket adnak el, amelyek nem helyre szólnak, hanem a bérletlemondás miatt megüresedett helyeket tölthetik fel a nézők. A* 12. *évfolyam tanulói* 7 db *lépcsőjegyet vásároltak.*

Simon azt mondja: „Mind a 7 *diáknak jut ülőhely a színházban."*

a) *Fogalmazzuk meg Simon állításának tagadását.* (*2 pont*)

Tamás azt mondja: „Legalább 65% *a valószínűsége, hogy mindenkinek jut ülőhely a színházban."*

b) *Igazoljuk Tamás állítását.* (*6 pont*)

A színházban a szék aljára barna, sárga és lila színű borítékokat ragasztottak 4 : 5 : 5 *arányban, amelyekben vásárlási kedvezményre jogosító kuponok találhatóak. A barna borítékok felében* 10%*-os, a többiben* 15%*-os kupon található. A sárga színűek harmadában* 15%*-os, a többiben* 20%*-os kupon van. A lila borítékokba egységesen* 15%*-os kupont tettek. Réka* 15%*-os kedvezményt talált a saját borítékjában.*

c) *Mekkora a valószínűsége, hogy Réka sárga színű borítékot kapott?* (*8 pont*)

Megoldás. *a*) Az állítás tagadása: Van olyan diák, akinek nem jut ülőhely a színházban.

b) Ahhoz, hogy mindenkinek jusson ülőhely a színházban, legalább 7 embernek le kell mondania a bérletet. Binomiális eloszlást használhatunk 196 emberre, 0,05 lemondási valószínűség mellett. Kezdjük el kiszámolni annak a valószínűségét, hogy pontosan $7; 8; 9; \ldots$ bérletlemondás történik. Ezek összege 12 bérletlemondásig meghaladja a 0,65-öt, így igaz lesz Tamás állítása.

Az X valószínűségi változó jelentse a bérletlemondások számát:

$$P(X=7)=\binom{196}{7}\cdot 0{,}05^{7}\cdot 0{,}95^{189}=0{,}095,$$

$$P(X=8)=\binom{196}{8}\cdot 0{,}05^{8}\cdot 0{,}95^{188}=0{,}1184,$$

$$P(X=9)=0{,}1302,$$

$$P(X=10)=0{,}128\,15,$$

$$P(X=11)=0{,}114\,05,$$

$$P(X=12)=0{,}0925.$$

Összegük: $P(7\leqslant X\leqslant 12)=0{,}6783$.

c) A barna borítékok száma $4x$ darab, ezekből 10% kedvezményt tartalmaz: $4x\cdot 0{,}5$, 15% kedvezmény: $4x\cdot 0{,}5$. Sárga színű boríték: $5x$ darab, ezekből 15% kedvezmény: $5x\cdot\frac{1}{3}$, 20% kedvezmény: $5x\cdot\frac{2}{3}$. Lila boríték: $5x$ darab ezek mindegyikében 15% kedvezmény található.

Annak valószínűsége, hogy az összes boríték közül egy olyat talál Réka, amelyben 15% kedvezmény van:

$$P(15\%)=\frac{4x\cdot 0{,}5+5x\cdot\frac{1}{3}+5x}{4x+5x+5x}=\frac{13}{21}.$$

A megoldás feltételes valószínűség kiszámításával adódik:

$$P(\text{sárga}\mid 15\%)=\frac{P(\text{sárga}\cdot 15\%)}{P(15\%)}=\frac{\frac{5x\cdot\frac{1}{3}}{14x}}{\frac{13}{21}}=\frac{5}{26}=0{,}1923.$$

Tehát 0,1923 annak valószínűsége, hogy ha Réka 15%-os kupont talált a saját borítékjában, akkor sárga színű borítékot kapott.

7. *a*) *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:*

$$2\sin x=|x-1|+|x-3|. \qquad (7\ pont)$$

b) *Mekkora az $f(x)=2\sin x$, $g(x)=|x-1|+|x-3|$ görbék és az y tengely által határolt korlátos síkidom területének pontos értéke?* (*9 pont*)

Megoldás. *a*) Az egyenlet megoldásához először tekintsük az abszolút értékek definícióját:

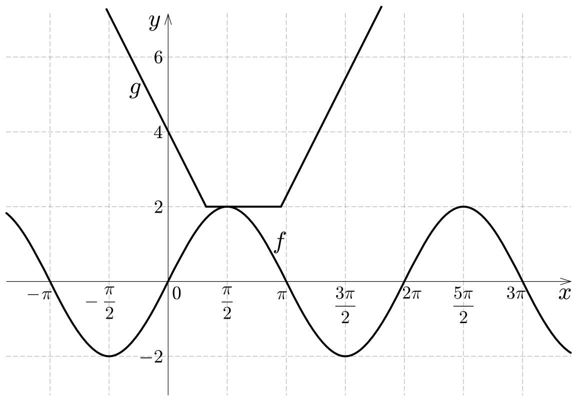
$$|x-1|=\begin{cases} x-1, & \text{ha } x\geqslant 1,\\ -(x-1), & \text{ha } x<1;\end{cases}$$

$$|x-3|=\begin{cases} x-3, & \text{ha } x\geqslant 3,\\ -(x-3), & \text{ha } x<3.\end{cases}$$

Ezeket felhasználva a jobb oldalon szereplő függvény:

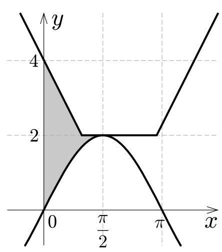
$$g(x)=|x-1|+|x-3|=\begin{cases} -2x+4, & \text{ha } x<1,\\ 2, & \text{ha } 1\leqslant x<3,\\ 2x-4, & \text{ha } x\geqslant 3.\end{cases}$$

Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a jobb és bal oldalon szereplő függvényeket:



A két függvény értékkészletének egyetlen közös eleme a 2. Ezt az $f(x)=2\sin x$ függvény $x=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi$ helyeken veszi fel. Ezekből az eredeti egyenletnek csak az $x=\frac{\pi}{2}$ a megoldása a függvény-grafikonok alapján. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a megoldás helyességéről.

b) A keresett korlátos síkidomot az *ábra* mutatja:



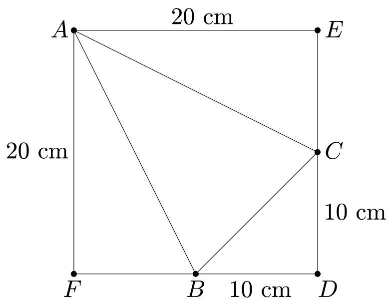
Területét integrálszámítás segítségével számíthatjuk ki:

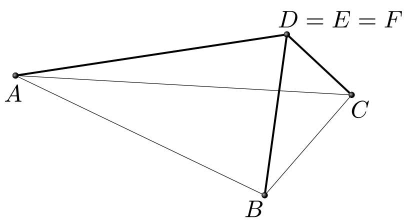
$$T=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(g(x)-f(x)\big)\,\mathrm{d}x=\int_0^1(-2x+4-2\sin x)\,\mathrm{d}x+\int_1^{\frac{\pi}{2}}(2-2\sin x)\,\mathrm{d}x=$$

$$=\left[-x^2+4x+2\cos x\right]_0^1+\left[2x+2\cos x\right]_1^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=(-1+4+2\cos 1)-(0+2\cos 0)+\left(\pi+2\cos\frac{\pi}{2}\right)-(2+2\cos 1)=\pi-1.$$

8. *A* 20 cm *oldalhosszúságú négyzet alakú fehér lapból a kezdő origami szakkörön tetraédert hajtogatnak a gyerekek úgy, hogy az* ábrán *jelölt AC, AB és BC szakaszok mentén hajtják meg a lapot.*





a) Mekkora a tetraéder legnagyobb és legkisebb területű lapjának hajlásszöge a hajtogatás után? (*7 pont*)

b) Mekkora a tetraéder térfogata? (*3 pont*)

Az elkészített tetraédereket a gyerekek megerősítik az élek hosszára ragasztott színes szívószálak segítségével. Majd a legnagyobb területű lapjára állítva leteszik egy asztalra egyformán igazítva a testeket.

c) Hány különböző megerősített tetraéder készíthető piros, zöld, sárga és kék színű szívószállal, ha az egy csúcsban találkozó szívószálak nem lehetnek egyforma színűek? (*6 pont*)

Megoldás. *a*) A négyzet oldala 20 cm, a B és C pontok az adott oldalak felezőpontjai. A tetraéder lapjainak területe:

$$T_{AFB}=T_{AEC}=\frac{20\cdot 10}{2}=100\ \mathrm{cm}^2,$$

$$T_{BDC}=\frac{10\cdot 10}{2}=50\ \mathrm{cm}^2,\qquad \text{ez a legkisebb,}$$

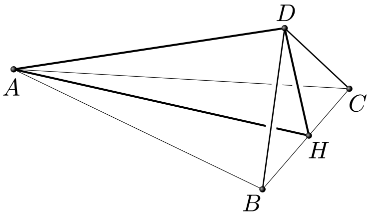
$$T_{ABC}=20^2-2\cdot 100-50=150\ \mathrm{cm}^2,\qquad \text{ez a legnagyobb.}$$

A H pont legyen a BC szakasz felezőpontja. A tetraéder ADH síkmetszetében kapjuk a legnagyobb és legkisebb területű lapok hajlásszögét. Ebben a háromszögben:

$$AD = 20 \text{ cm},$$

$$DH = 5\sqrt{2} \text{ cm},$$

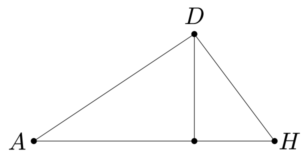
$$AH = 20\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 15\sqrt{2} \text{ cm}.$$



Az ADH háromszög H csúcsánál lévő szöge adja a választ. Felírva a koszinusztételt:

$$20^2 = \left(15\sqrt{2}\right)^2 + \left(5\sqrt{2}\right)^2 - 2 \cdot 15\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot \cos\alpha, \quad \cos\alpha = \frac{1}{3}, \quad \alpha = 70{,}53^\circ.$$

b) A tetraéder magassága az ADH háromszög AH oldalához tartozó magassága (M).



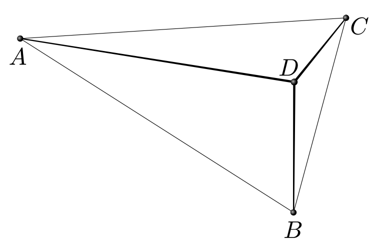
$$\sin\alpha = \frac{M}{5\sqrt{2}}, \quad M = \frac{20}{3} \text{ cm}.$$

A tetraéder térfogata:

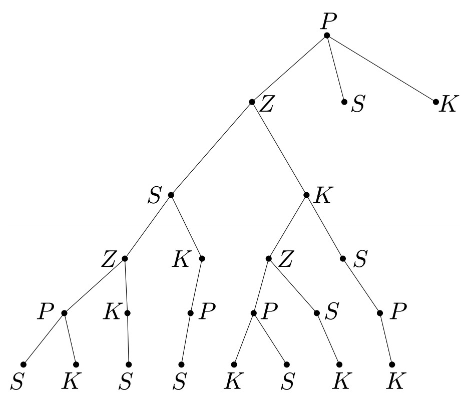
$$V = \frac{T_{ABC} \cdot M}{3} = \frac{150 \cdot \frac{20}{3}}{3} = 333{,}3 \text{ cm}^3.$$

Megjegyzés. Az ADH háromszög D csúcsánál derékszög van, így a térfogat a BCD háromszögre mint alapterületre és az AD oldalra mint magasságra támaszkodva is kiszámítható.

c) A tetraéder élei 4-féle színnel színezhetők: piros, zöld, sárga és kék. Vegyük sorra az éleket: AD, AB, AC, CD, BC és végül BD (*1. ábra*).



1. ábra



2. ábra

Nézzük azokat a konkrét eseteket, amikor az AD él piros, az AB ekkor 3-féle lehet még (zöld, sárga vagy kék). Ha az AB él zöld, akkor a többi él lehetséges színei a *2. ábrán* láthatók.

Ebben a konkrét esetben 8 lehetőség van. Figyelembe véve, hogy az AD élre van összesen 4 lehetőség, majd az AB élre ezután 3 lehetőség, így összesen $4 \cdot 3 \cdot 8 = 96$ lehetőség van.

Tehát 96 különböző megerősített tetraéder készíthető.

9. *A koordinátarendszerben megrajzoltuk a* $p:\ y = \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$ *egyenletű parabolát.*

a) Írjuk fel a parabola és az y-tengely metszéspontjában a parabolához húzott érintő egyenletét. *(6 pont)*

Fizika tanulmányok alapján ismert, hogy a parabolatükör a tengelyével párhuzamos fénysugarakat a fókuszponton keresztül veri vissza.

b) A parabola belsejében fénysugár érkezik az y-tengely mentén. Mi a visszaverődő fénysugár egyenesének egyenlete? *(7 pont)*

Fizikában beesési merőlegesnek hívják a beesési pontban a parabola érintőjére állított merőlegest.

c) Mekkora az y-tengely mentén beeső fénysugár és a beesési merőleges által bezárt szög? *(3 pont)*

Megoldás. *a)* A parabola és az y-tengely közös pontjának koordinátáit meghatározhatjuk, felhasználva, hogy az y-tengely pontjainak abszcisszája $x = 0$. A metszéspont ordinátája behelyettesítés után $y = \frac{10}{3}$. Így $M = \left(0; \frac{10}{3}\right)$.

A metszéspontba húzott érintő meredeksége az

$$f(x) = \frac{1}{12} \cdot x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$$

függvény deriváltjának $x_0 = 0$ pontban számított helyettesítési értéke:

$$f'(x) = \frac{1}{6}x - \frac{1}{3}, \quad m = f'(0) = \frac{1}{6} \cdot 0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Az érintő egyenlete: $y - \frac{10}{3} = -\frac{1}{3} \cdot x$. Rendezve az egyenletet: $x + 3y = 10$.

b) A parabola tengelypontjának koordinátáit a parabola egyenletének teljes négyzetté alakítása után tudjuk megadni.

$$y = \frac{1}{12} \cdot (x-2)^2 + 3, \quad y - 3 = \frac{1}{12} \cdot (x-2)^2,$$

így a tengelypont koordinátái: $T(2; 3)$, a parabola paramétere $p = 6$. Megadható a parabola fókuszpontja: $F\left(2; 3 + \frac{6}{2}\right) = (2; 6)$.

A visszaverődő fénysugár egyenletének felírásához használjuk, hogy a fénysugár egyenesének irányvektora az $\overrightarrow{MF} = \left(2; \frac{8}{3}\right)$. A vektort 90°-kal elforgatva a fénysugár normálvektorát kapjuk: $\mathbf{n}=\left(\frac{8}{3};-2\right)$. Használjuk ezt a normálvektort és a parabola fókuszpontját. A visszavert fénysugár egyenlete:

$$\frac{8}{3}x-2y=\frac{16}{3}-12.$$

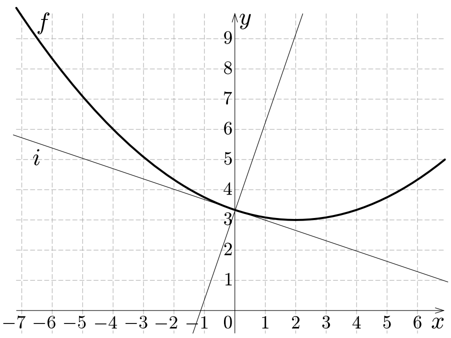
Rendezve az egyenletet: $4x-3y=-10$.

c) A beesési merőleges meredekségének és az *a*) részben szereplő érintő meredekségének szorzata -1.

$$m_b\cdot m=m_b\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-1,\quad m_b=3.$$

A beesési merőleges irányszöge: $\operatorname{tg}\alpha=$ $=3$, $\alpha=71{,}57°$.

Az y-tengely mentén beeső fénysugár és a beesési merőleges által bezárt szög a fent számított szög pótszöge, így $\beta=90°-\alpha=18{,}43°$.



Jócsik Csilla
Győr

Matematika feladatok megoldása

B. 5164. *Két játékos 3 győzelemig tartó kő-papír-olló párbajt játszik. Tegyük fel, hogy mindketten minden menetben véletlenszerűen (egymástól és a korábbi mutatásoktól függetlenül),* $\frac{1}{3}:\frac{1}{3}:\frac{1}{3}$ *eséllyel választják ki, hogy mit mutatnak. Adjuk meg a menetek számának várható értékét.*

(*5 pont*)

I. megoldás. Legyen $f(a,b)$ a menetek számának várható értéke, ha a győzelemhez az első játékosnak (akit A-val jelölünk a későbbiekben) a, a másodiknak (őt pedig B-vel) b menetet kell nyernie (ez az (a,b)-vel jelölt párbaj).

Amikor az (a,b) párbajban az első menet lezajlott, három dolog lehetséges. Ha az első játékos nyert, akkor neki már csak $a-1$ menetet kell nyernie, vagyis az $(a-1,b)$ párbaj alakult ki. Ha a második nyert, akkor $(a,b-1)$ párbaj alakult ki. Ha pedig döntetlen, akkor továbbra is (a,b) párbajról van szó. Az alábbi táblázatból leolvasható, hogy minden eset a fenti három közül 1/3 eséllyel alakul ki.

	B kő	B papír	B olló
A kő	$=$	B nyert	A nyert
A papír	A nyert	$=$	B nyert
A olló	B nyert	A nyert	$=$

Ebből nyerhetünk egyenletet $f(a,b)$-re. Ha A nyert, akkor a hátralévő menetek várható száma $f(a-1,b)$, ha B nyert, akkor $f(a,b-1)$. Ha döntetlen alakult ki, akkor a hátralévő menetek várható száma $f(a,b)$. Minden esetben egy menet már lement, így 1-et kell adni a fenti értékekhez. Mivel a várható érték additív, ebből

$$\begin{aligned} f(a,b) &= \frac{1}{3}\big(f(a-1,b)+1\big)+\frac{1}{3}\big(f(a,b-1)+1\big)+\frac{1}{3}\big(f(a,b)+1\big),\\ \frac{2}{3}f(a,b) &= 1+\frac{1}{3}\big(f(a-1,b)+f(a,b-1)\big),\\ f(a,b) &= \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\big(f(a-1,b)+f(a,b-1)\big). \end{aligned}$$

Továbbá nyilván $f(a,b)=f(b,a)$, és $a=0$ vagy $b=0$ esetén $f(a,b)=0$. Ez már elég ahhoz, hogy kiszámoljuk $f(a,b)$-t minden a,b-re. Azonban $a=b=3$-ra inkább célszerű konkrét számokkal végigszámolni, mint meghatározni f explicit alakját.

Vágjunk is bele:

$$\begin{aligned} f(1,1) &= \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\big(f(0,1)+f(1,0)\big)=\frac{3}{2},\\ f(2,1) &= \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\big(f(1,1)+f(2,0)\big)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4},\\ f(2,2) &= \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\big(f(1,2)+f(2,1)\big)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{9}{4}+\frac{9}{4}\right)=\frac{15}{4},\\ f(3,1) &= \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\big(f(2,1)+f(3,0)\big)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{9}{4}\right)=\frac{21}{8},\\ f(3,2) &= \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\big(f(3,1)+f(2,2)\big)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{21}{8}+\frac{15}{4}\right)=\frac{75}{16},\\ f(3,3) &= \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\big(f(2,3)+f(3,2)\big)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{75}{16}+\frac{75}{16}\right)=\frac{99}{16}. \end{aligned}$$

Lovas Márton (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 10. évf.)

II. megoldás. Osszuk fel a párbajt meccsekre. Egy meccs addig tart, amed-dig valamelyik játékos meg nem nyer egy menetet. Tehát egy meccs egy vagy több menetből áll, melyek közül az utolsó kivételével mindegyik menet döntetlen. Értelemszerűen az nyeri a párbajt, aki előbb nyer meg három meccset.

Minden menet $\frac{1}{3}$ eséllyel lesz döntetlen, függetlenül az előző menettől. Így annak a valószínűsége, hogy egy meccs pontosan n menetből áll, $m_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{2}{3}$.

Tehát az egy meccsen belüli menetek számának várható értéke így számítható ki:

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} = nm_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \frac{2}{3} =$$

$$= \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \ldots\right) \cdot \frac{2}{3} = \frac{9}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{2}.$$

(Valószínűségszámításban képzett megoldók azt is mondhatják erre, hogy az egy meccsen belüli menetek száma geometriai eloszlású, $p = \frac{2}{3}$ paraméterrel, tehát várható értéke $\frac{1}{p} = \frac{3}{2}$).

Mivel a játék szimmetrikus, így mindegyik meccset $\frac{1}{2}$ eséllyel nyeri A játékos és $\frac{1}{2}$ eséllyel B játékos. A különböző meccsek eredményei pedig függetlenek egymástól. Ezt felhasználva határozzuk meg a párbaj eldöntéséhez szükséges meccsek számának eloszlását.

- Akkor elég 3 meccs, ha az első három meccset ugyanaz nyeri. Ennek esélye
$$p_3 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}.$$
- Akkor dől el a 4. meccs végén a párbaj, ha az első négy menet győzteseinek sorozata a következő 6 sorozat valamelyike: $AABA, ABAA, BAAA$ (ilyenkor A nyer), $ABBB$, $BABB$, $BBAB$ (ilyenkor B nyer). Egy-egy ilyen sorozat esélye $\left(\frac{1}{2}\right)^4$, tehát annak az esélye, hogy 4 meccsből áll a párbaj:
$$p_4 = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}.$$
- Legkésőbb az 5. meccs végére el kell dőljön a párbaj (a skatulyaelv alapján az 5 meccsből legalább 3-at ugyanannak az embernek kell nyerni), így annak az esélye, hogy 5 meccsből áll a párbaj:
$$p_5 = 1 - p_3 - p_4 = \frac{3}{8}.$$

Legyen most X_i az a valószínűségi változó, amelyik megadja az i. meccsen belüli menetek számát. Ha a 4., illetve 5. meccs nem valósul meg, akkor $X_4 = 0$ (illetve $X_5 = 0$).

Így a teljes meccs meneteinek száma éppen $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$, ennek várható értéke (felhasználva, hogy a várható érték additív):

$$\mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_3) + \mathbb{E}(X_4) + \mathbb{E}(X_5).$$

Az egyes $\mathbb{E}(X_i)$ értékeket egyenként meg tudjuk mondani:

- $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = \mathbb{E}(X_3) = M$, hiszen az első három meccs biztosan megvalósul.
- $\mathbb{E}(X_4) = M(1 - p_3)$, hiszen X_4 értéke p_3 eséllyel 0, míg $1 - p_3$ eséllyel lesz 4. meccs, így ha $n \neq 1$, akkor
$$P(X_4 = n) = (1 - p_3)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{2}{3}.$$
- $\mathbb{E}(X_5) = Mp_5$, hiszen X_5 értéke $p_3 + p_4$ eséllyel 0, míg p_5 eséllyel megvalósul ez a meccs, így
$$P(X_5 = n) = p_5\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{2}{3}.$$

Tehát a feladat kérdésére a válasz
$$M(3 + (1 - p_3) + p_5) = \frac{3}{2}\left(1 + 1 + 1 + \frac{3}{4} + \frac{3}{8}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{33}{8} = \frac{99}{16}.$$

Megjegyzések. 1. Ha Y-nal jelöljük a meccsek számát jelölő valószínűségi változót, akkor
$$\mathbb{E}(Y) = 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{3}{8} + 5 \cdot \frac{3}{8} = \frac{33}{8},$$
azaz éppen teljesül, hogy:
$$\mathbb{E}(X_1) \cdot \mathbb{E}(Y) = \frac{99}{16}.$$
Így is kiszámítható lenne a feladat végeredménye?

Mivel X_1 és Y független, teljesül $\mathbb{E}(X_1) \cdot \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X_1 Y)$, de $X_1 Y$ általában nem egyezik meg a menetek számával (bár némi köze van hozzá). Tehát erre nem tudunk hivatkozni.

Valójában ez a kiszámítási mód egy mély és általános összefüggés, az úgynevezett Wald-azonosság (ld. `https://en.wikipedia.org/wiki/Wald's_equation`) egy egyszerű speciális esete.

Az azonosság feltalálójáról, Wald Ábrahámról érdemes elolvasni ezt a történetet is: `https://ematlap.hu/konyvespolc-2017-03/443-hogy-ne-tevedjunk-wald-abraham-es-a-hianyzo-lovedeknyomok`.

2. A leggyakoribb hiba a második (honlapon is közölt) megoldás végi megjegyzésnek megfelelő hiba volt.

3. Emellett több olyan versenyző is volt, aki nem volt tisztában a várható érték fogalmával, és azt hitte, hogy a feladat azt kérdezi, hogy melyik a legnagyobb valószínűségű (egész) menetszám.

4. A feladat első részét sokan a honlapihoz hasonlóan oldották meg, de a második részben gyakoribb volt a megjegyzésként írt hibás indoklást alkalmazó megoldás, mint az ott leírt helyes megoldás. Többen is felírták az egyes menetszámokhoz tartozó valószínűségeket a menetszámok n függvényében, és ezt helyettesítették be a várható érték megfelelő képletébe. Így egy igen bonyolult összeghez jutottak, melynek kiszámításával hosszú oldalakon át vesződtek. Szerencsére ennél többen alkalmazták a Markov-láncokkal történő megoldást, mely segítségével sokkal barátságosabb számolás után könnyedén eljutottak a helyes eredményhez.

54 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 25 versenyző: Beinschroth Ninett, Csizmadia Miklós, Diaconescu Tashi, Duchon Márton, Fekete Richárd, Han Ziying, Hegedűs Dániel, Koleszár Domonkos, Kovács Alex, Kökényesi Márk Péter, Lenkey Gyöngyvér, Lovas Márton, Mácsai Dániel, Metzger Ábris András, Molnár-Szabó Vilmos, Nagy Levente, Németh Márton, Simon László Bence, Szanyi Attila, Sztranyák Gabriella, Terjék András József, Varga Boldizsár, Velich Nóra, Wiener Anna, Zömbik Barnabás. 4 pontos 10, 3 pontos 3, 2 pontos 4, 1 pontos 6, 0 pontos 5 dolgozat.

B. 5178. *Legyen x pozitív valós szám. Mutassuk meg, hogy*

$$\sqrt{6x+9}+\sqrt{16x+64}\leqslant\left(\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x}+\frac{8}{\sqrt{x}}\right).$$

(*4 pont*) Javasolta: *Szoldatics József* (Budapest)

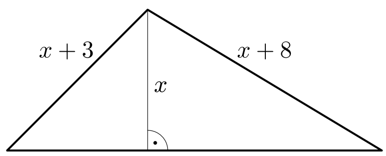
I. megoldás. Először is jegyezzük meg, hogy egyenlőtlenségünk minden pozitív valós számra értelmes (a negatívokra nem, de a feladat ezt kizárta).

Ezután szorozzuk meg x-szel az egyenlőtlenség mindkét oldalát, a kapott egyenlőtlenség ekvivalens lesz az eredetivel, és mivel x pozitív, nem fordul meg a relációjel. Ezt kapjuk: $x\left(\sqrt{6x+9}+\sqrt{16x+64}\right)\leqslant(x+3)(x+8)$. Észrevehetjük, hogy a bal oldalon a gyökjel alatti tagok felírhatók két szám négyzetének különbségeként: $6x+9=(x+3)^2-x^2$, míg $16x+64=(x+8)^2-x^2$, ezáltal a bizonyítandó egyenlőtlenség ekvivalens az

$$x\left(\sqrt{(x+3)^2-x^2}+\sqrt{(x+8)^2-x^2}\right)\leqslant(x+3)(x+8)$$

egyenlőtlenséggel.

Vegyünk fel egy olyan háromszöget, amelynek két oldala $x+3$ és $x+8$, a harmadikhoz tartozó magasság pedig x. Meg kell jegyezzük, hogy ilyen háromszög mindig létezik, ugyanis megkapható két olyan derékszögű háromszög uniójaként, amelyek egyik befogója x, átfogóik pedig $x+3$ és $x+8$, márpedig derékszögű háromszöget akármilyen 1-nél kisebb befogó-átfogó arányból lehet szerkeszteni. Továbbá az x-re vonatkozó pozitivitást használva az is egyszerűen látható, hogy ezek a hosszok pozitívak lesznek.



Először számoljuk ki a harmadik oldalt. Mivel a magasság két derékszögű háromszögre bontja a nagy háromszöget, használhatjuk mindkettőben a Pitagorasz-tételt, azt kapjuk, hogy a két másik befogó rendre

$$\sqrt{(x+3)^2-x^2},\quad\text{illetve}\quad\sqrt{(x+8)^2-x^2},$$

azaz a harmadik oldal hossza $\sqrt{(x+3)^2-x^2}+\sqrt{(x+8)^2-x^2}$. Legyen az ezzel szemközti szög α. Ennek segítségével írjuk fel kétféleképpen a háromszög területét az ismert területképletekkel. Rögtön a kétszeres területre térve:

$$2t=\left(\sqrt{(x+3)^2-x^2}+\sqrt{(x+8)^2-x^2)}\right)x=(x+3)(x+8)\sin\alpha.$$

Mivel egy szög szinusza legfeljebb 1, ezért

$$(x+3)(x+8) \geqslant 2t = \left(\sqrt{(x+3)^2 - x^2} + \sqrt{(x+8)^2 - x^2}\right)x,$$

ami éppen a bizonyítandó.

Varga Boldizsár (Verőce, Géza Fejedelem Református Ált. Isk., 8. évf.)

II. megoldás. Mivel x pozitív valós szám, ezért mindent értelmezünk, és mindkét oldal pozitív. Bontsuk fel a zárójelet az egyenlőtlenség jobb oldalán:

$$\sqrt{6x+9} + \sqrt{16x+64} \leqslant x + \frac{24}{x} + 11.$$

Mindkét oldal pozitív, ezért a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás:

$$\sqrt{384x^2 + 2112x + 2304} + 22x + 73 \leqslant x^2 + 22x + 169 + \frac{528}{x} + \frac{576}{x^2},$$

$$2\sqrt{96x^2 + 528x + 576} \leqslant x^2 + 96 + \frac{528}{x} + \frac{576}{x^2}.$$

A pozitív x^2-tel szorozva:

$$2x^2\sqrt{96x^2 + 528x + 576} \leqslant x^4 + 96x^2 + 528x + 576.$$

Legyen $a := 96x^2 + 528x + 576$, hogy egyszerűbb legyen az egyenletünk:

$$2x^2\sqrt{a} \leqslant x^4 + a.$$

Mivel mindkét oldal pozitív, ismét emeljünk négyzetre:

$$4x^4 a \leqslant x^8 + 2ax^4 + a^2,$$

$$0 \leqslant x^8 - 2ax^4 + a^2,$$

$$0 \leqslant (x^4 - a)^2,$$

ami nyilván teljesül. Mivel végig ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért az eredeti egyenlőtlenség is minden pozitív x esetén fennáll.

Csizmadia Miklós (Budapest XIV. Kerületi Szent István Gimnázium, 11. évf.)

52 dolgozat érkezett. 4 pontos 46, 3 pontos 5, 0 pontos 1 dolgozat.

B. 5187. *Az $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz egy részhalmaza* primitív, *ha nincs benne két olyan elem, melyek közül az egyik osztója a másiknak. Mutassuk meg, hogy ha egy $A \subseteq S$ primitív halmazhoz nem lehet úgy hozzávenni újabb S-beli elemet, hogy primitív maradjon, akkor vagy $A = \{1\}$, vagy A mérete legalább annyi, mint n-ig a prímek száma.*

(*6 pont*) Javasolta: *Sándor Csaba* (Budapest)

Megoldás. Ha $1 \in A$, akkor A-nak nem lehet más eleme, vagyis teljesül a feladat feltétele, a továbbiakban feltételezzük, hogy $1 \notin A$.

Hajtsuk végre a következő algoritmust: kezdetben a B halmaz legyen üres, a C halmazban pedig legyenek benne a prímek 1-től n-ig. Ismételjük, ameddig lehet, a következőt: ha létezik olyan $p \in C$ és $y \in A$, hogy alkalmas j pozitív egésszel $y = p^j \cdot k$, ahol k néhány (nem feltétlenül páronként különböző) B-beli szám szorzata, akkor a p prímet vegyük ki C-ből, és rakjuk át B-be.

(Kezdetben tehát rakjuk át B-be azokat a prímeket, amelyeknek van hatványa A-ban, majd az olyanokat, amelyeknek valamely hatványa előáll egy A-beli elem és néhány B-beli prím szorzatának hányadosaként, stb.) Ha már nem tudunk több ilyen lépést végezni, a következő esetek állhatnak fenn:

– A C halmaz üres. Ekkor $|A| \geqslant |\{\text{prímek 1-től } n\text{-ig}\}|$ – így teljesül a feladat feltétele – mivel minden lépés során olyan A-beli elemet választottunk ki, amelyet korábban nem (és összesen $|\{\text{prímek 1-től } n\text{-ig}\}|$ lépés történt). Tegyük fel ugyanis, hogy az $y \in A$ számot az i-edik és a j-edik lépésben is kiválasztottuk, ahol $i < j$. Jelölje B_1 és C_1, illetve B_2 és C_2 a B és C halmaz aktuális állapotát közvetlenül az i-edik, illetve a j-edik lépés végrehajtása előtt. Indirekt feltevésünk szerint ekkor $y = p_1^{j_1} \cdot k_1$ és $y = p_2^{j_2} \cdot k_2$. A prímtényezős alak egyértelműsége miatt p_2 osztója k_1-nek, így $p_2 \in B_1$, másrészt $p_2 \in C_2 \subseteq C_1$. Tehát p_2 a B_1 és a C_1 halmaznak is eleme, ami lehetetlen, hiszen a B és C halmazok az eljárás során végig diszjunktak.

– $C = \{p\}$. Ekkor A-ban nincs p-vel osztható elem, tehát még hozzávehetjük a halmazhoz p-t, és ez ellentmondás.

– Minden más esetben vegyük a legkisebb $p \in C$ elemet. Mivel A primitív, van p-vel osztható eleme; legyen $z \in A$ olyan, hogy a p prímtényező hatványa z-ben maximális az A elemei közül. Tudjuk, hogy van olyan $q \in C$, $q > p$ prím, amelyre $q \mid z$, máskülönben még egy lépést elvégezve p-t átrakhattuk volna B-be.

Tekintsük az $s := \frac{z}{q} \cdot p$ számot. Nyilván $s < z \leqslant n$, és s-nek nincs osztója A-ban, mivel az z-nek is osztója lenne, vagy nagyobb lenne benne a p kitevője, mint z-ben. Továbbá s-nek nincs többszöröse sem A-ban, mert abban nagyobb lenne p kitevője, mint z-ben. Tehát s-et hozzá lehetne venni A-hoz, ami ellentmondás.

Németh Márton (Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn., 11. évf.)

72 dolgozat érkezett. 6 pontos 34, 5 pontos 7, 4 pontos 5, 3 pontos 2, 2 pontos 3, 1 pontos 12, 0 pontos 7 dolgozat.

B. 5206. *Egy n-jegyű $\overline{a_1a_2a_3\dots a_n}$ számot* hegyszerűnek *nevezünk, ha van olyan $1 \leqslant k \leqslant n$ egész, amelyre $a_1, a_2, \dots, a_k$ szigorúan monoton növekvő, míg $a_k, a_{k+1}, \dots, a_n$ szigorúan monoton csökkenő sorozat. (Például az* 1, 121, 1231 *számok hegyszerűek, de az* 1442 *és az* 12313 *nem hegyszerűek.) Hány hegyszerű szám van?*

(*3 pont*)

Megoldás. Ahhoz, hogy egy hegyszerű számot tudjunk készíteni, először válasszuk ki, hogy mely számjegyek fognak benne szerepelni (a 0-s számjegyet egyelőre ne válasszuk ki). Rendezzük sorba nagyság szerint ezeket a számjegyeket. Írjuk le most először a legnagyobb számjegyet. Ezután haladjunk nagyság szerint lefelé. Mindegyik számjegyet a készülő n-jegyű számnak vagy a bal, vagy a jobb, vagy mindkét oldalalára írhatjuk le. Ez a módszer nyilván mindig különböző, és helyes hegyszerű számot ad; másrészt pedig megkapunk minden lehetséges hegyszerű számot az adott számjegyekből képezve. Ez azt jelenti, hogy k számjegy esetén elrendezésükre 3^{k-1}-féle lehetőség van. Ha bármelyik kiválasztás bármelyik sorrendjéhez hozzávesszük még a nullát (amely mindig csak az utolsó helyre kerülhet), akkor készítettünk egy újabb hegyszerű számot, tehát az 1–9-es számjegyekből képzett hegyszerű számok száma az összes készíthető szám fele.

Az eddigiek alapján a legnagyobb számjegy szerint összegezve:

$$\left[\binom{9}{1}\cdot 3^0+\binom{9}{2}\cdot 3^1+\binom{9}{3}\cdot 3^2+\ldots+\binom{9}{8}\cdot 3^7+\binom{9}{9}\cdot 3^8\right]\cdot 2=174\,762.$$

Kovács Móric (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. Ha 0 számot is hegyszerűnek tekintjük, akkor eggyel nagyobb összeget kapunk.

2. A szereplő binomiális együtthatók valószínűsítik, hogy ez az összeg a binomiális tétel alapján is kiszámítható. Valóban, írjuk fel a 4^9-t $(1+3)^9$-ként:

$$4^9=(1+3)^9=\binom{9}{0}\cdot 3^0+\binom{9}{1}\cdot 3^1+\binom{9}{2}\cdot 3^2+\ldots+\binom{9}{8}\cdot 3^8+\binom{9}{9}\cdot 3^9.$$

Ha ebből az összegből elhagyjuk az első tagot – az 1-et –, majd a fennmaradó tagokat 3-mal osztjuk, akkor éppen a feladat végeredményében szereplő zárójeles kifejezést kapjuk. Tehát a hegyszerű számok száma pontosan:

$$\frac{4^9-1}{3}\cdot 2=\frac{262\,144-1}{3}\cdot 2=174\,762.$$

Összesen 112 dolgozat érkezett. 3 pontot kapott 75, 2 pontot 11 tanuló. 1 pontos 17, 0 pontos 5 versenyző dolgozata. Nem versenyszerű 4 dolgozat.

B. 5209. *Egy* 2022 *elemű, egészekből álló halmaznak legfeljebb hány olyan kételemű részhalmaza lehet, melyre a két elem összege szintén a halmazhoz tartozik?* (*5 pont*)

Megoldás. A nullát feltétlenül érdemes belevennünk a halmazba, mert azt bármely másik számmal összeadva ismét az elemet kapjuk.

Tekintsük először csak a pozitív elemeket. Legyenek ezek $x_1<x_2<\ldots<x_n$. Vizsgáljuk meg mindegyik elem esetében, hogy legfeljebb hány darab nála kisebb párja lehet (a pár itt azt jelenti, hogy összeadva őket ismét a halmaz egy elemét kapjuk). Így meg fogjuk kapni az összes párt. Mivel az x_n a legnagyobb elem, ahhoz nem rendelhetünk további pozitív elemet. Az x_{n-1}-hez csak egyet rendelhetünk, hiszen csak egy nála nagyobb eleme van a halmaznak. Látjuk, hogy egyik számhoz sem rendelhetünk sem a nála nagyobb elemek számánál több, sem a nála kisebb

pozitív elemek számánál több darab elemet. (Az elméleti maximum pl. $n=4$-re $0+1+1+0=2$.) Ezt az elméleti maximumot el is lehet érni úgy, ha 1-től n-ig vesszük a pozitív egész számokat.

Ez a módszer a negatív elemek között is ugyanígy működik.

Tekintsük most a különböző előjelű számok összegeit. Legyenek a pozitív számok 1-től n-ig, a negatívak pedig (-1)-től $(-k)$-ig. Az eddigiek alapján $n+k=$ $=2021$. Ha bármelyik negatív elemhez bármelyik pozitívat párosítjuk az biztosan megfelelő lesz, mert az összeg $-k$ és n közé fog esni. Ilyen párból $n\cdot k$ darabot tudunk megadni. A pozitív és negatív elemek száma közül az egyik páros, a másik páratlan. A szimmetria miatt feltehetjük továbbá, hogy a pozitívak száma páratlan, $n=2u+1$, $k=2021-2u-1=2020-2u$.

A negatív párok száma: $(1010-u-1)(1010-u)$, a pozitív párok száma $(u-1)u+u$, végül a vegyes párok száma: $(2020-2u)(2u+1)$.

Ezek összegét vizsgáljuk. Az u másodfokú polinomját kapjuk:

$$1009\cdot 1010-2019u+u^2+u^2+4040u-4u^2+2020-2u=$$
$$=-2u^2+2019u+1010\cdot 1011.$$

Ez a függvény maximumát a másodfokú függvényekre vonatkozó ismert eljárás alapján $u=-\frac{b}{2a}\approx 505$ esetén veszi fel. Ha az $u=505$-höz tartozó helyettesítési értékhez hozzáadjuk még a 0-val képzett 2021 párt, kapjuk az elérhető maximumot:

$$-2\cdot 505^2+2019\cdot 505+1010\cdot 1011+2021=1\,532\,676.$$

László Anna (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

Összesen 65 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 30, 4 pontot 4 tanuló. 3 pontos 9, 2 pontos 12, versenyző dolgozata. 1 pontra értékelt 6, 0 pontra 4 versenyző dolgozata.

B. 5214. *A* 110 *egy olyan számjegysorozat, amelyet bármilyen* 1*-nél nagyobb pozitív egész alapú számrendszerben tekintve páros számot kapunk. Van-e olyan* 1*-esekből és* 0*-kból álló számjegysorozat, amelyet bármilyen* 1*-nél nagyobb pozitív egész alapú számrendszerben tekintve* 3*-mal osztható pozitív egész számot kapunk?*

(*3 pont*)

I. megoldás. Olyan számot keresünk, amely legalább egy darab 1-est tartalmaz, hiszen pozitív; viszont nem végződhet 1-re, mert akkor a 3-as számrendszerben 1 maradékot adna 3-mal osztva, tehát az utolsó számjegye 0.

Ha a számrendszer alapja osztható 3-mal, akkor a nem utolsó helyiértékek mindegyike 0 maradékot ad 3-mal osztva, mert tartalmaznak 3-as prímtényezőt, így ez esetben bárhol lehet 1-es a keresett számban.

Azokban a számrendszerekben, amelyekben az alap 3-as maradéka 1, minden helyiérték 3-as maradéka 1, mert ha összeszorozzuk a maradékokat, az mindig $1\cdot 1=1$. Ekkor annyi 1-es számjegy szükséges, hogy a számuk 3-mal osztható legyen, azaz legalább 3 darab 1-est tartalmaz a szám.

Ha pedig a számrendszer alapjának 3-as maradéka 2, akkor a maradékok sorban a következők: $1, 2, 1, 2\dots$, mert 1-nek 1, ezt 2-vel (a 3-as maradékkal) szorozva 2 a maradék, ezt megint 2-vel szorozva 4, melynek 3-as maradéka 1, és így tovább. Ez esetben az imént említett 3 darab 1-esnek azokon a helyiértékeken kell elhelyezkednie, amelyek 3-mal osztva ugyanazt a maradékot adják.

Az 101010 szám a fenti feltételek mindegyikének megfelel, ezért van ilyen szám.

BLG-s kobakok (Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

II. megoldás. A 101010 szám ilyen, n alapú számrendszerben ($n > 1$ egész) ennek a számnak a valódi értéke

$$n^5 + n^3 + n = n(n^4 + n^2 + 1).$$

Ha n osztható 3-mal, akkor az $(n^4 + n^2 + 1)$-szerese is.

Ha n nem osztható 3-mal, akkor, mivel minden 3-mal nem osztható négyzetszám 3-mal osztva 1 maradékot ad, ezért az 1, az n^2 és az $n^4 = (n^2)^2$ is. Ilyenkor az összegük 3-mal osztható, így annak n-szerese is.

Beláttuk, hogy az n-es számrendszerben felírt 101010 szám bármilyen n-re osztható 3-mal, tehát van ilyen szám.

Jánosik Máté (Győr, Révai Miklós Gimn., 12. évf.)

Összesen 133 dolgozat érkezett. 3 pontos 86, 2 pontos 34, 1 pontos 6 dolgozat. 0 pontot 1 versenyző kapott. Nem versenyszerű 6 dolgozat.

B. 5229. *Az $a \neq 0$ valós számra és az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre*

$$f\big(x + f(y)\big) = f(x) + f(y) + ay \tag{1}$$

teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén. Bizonyítsuk be, hogy f additív, vagyis $f(x + y) = f(x) + f(y)$ minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén.

(*6 pont*) Javasolta: *George Stoica* (Saint John, New Brunswick, Kanada)

Megoldás.

Először a feladatban szereplő egyenlet (a továbbiakban (1)) mindkét oldalához adjunk x-et, majd vegyük mindkét oldal f szerinti képét:

$$f\Big(x + f\big(x + f(y)\big)\Big) = f\big(x + f(x) + f(y) + ay\big).$$

Az (1) alapján bontsuk ki a bal oldali kifejezést:

$$f\Big(x + f\big(x + f(y)\big)\Big) = f(x) + f\big(x + f(y)\big) + a\big(x + f(y)\big) =$$

$$= f(x) + f(x) + f(y) + ay + ax + af(y),$$

majd a jobb oldal kifejezést is:

$$f\big(x+f(x)+f(y)+ay\big)=f(x+f(x)+ay)+f(y)+ay=$$
$$=f(x+ay)+f(x)+ax+f(y)+ay.$$

Az egyenlőség fennáll, így:

$$f(x)+f(x)+f(y)+ay+ax+af(y)=f(x+ay)+f(x)+ax+f(y)+ay,$$
$$f(x)+af(y)=f(x+ay), \tag{2}$$

amely egyenletből $x=y=0$ helyettesítéssel megkapjuk $f(0)$-t:

$$f(0)+af(0)=f(0),$$

így $af(0)=0$. Ebből $a\neq 0$ miatt következik, hogy $f(0)=0$.

Ha most (1)-be x helyére 0-t helyettesítünk és felhasználjuk, hogy $f(0)=0$, akkor az f függvény újabb tulajdonságához jutunk:

$$f\big(f(y)\big)=f(0)+f(y)+ay=f(y)+ay. \tag{3}$$

Most pedig helyettesítsünk (2)-be x helyére $f(y)$-t:

$$f\big(f(y)\big)+af(y)=f\big(f(y)+ay\big),$$

amiből a jobb oldalon (1), a bal oldalon (3) alkalmazásával

$$f(y)+ay+af(y)=f(ay)+f(y)+ay,$$
$$af(y)=f(ay).$$

Ezt (2)-be visszahelyettesítve az

$$f(x)+f(ay)=f(x+ay)$$

egyenlethez jutunk, ami éppen az additivitást jelenti, hiszen $ay=z$ esetén z tetszőleges valós szám, mivel $a\neq 0$ és y tetszőleges valós szám. Ekkor tehát x és z tetszőleges valós számokra teljesül, hogy

$$f(x)+f(z)=f(x+z).$$

Éppen ezt akartuk megmutatni, így a bizonyításunkat befejeztük.

Fazokán Marcell (Debreceni Fazekas Mihály Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

Összesen 42 dolgozat érkezett. 6 pontos 20, 5 pontos 2, 4 pontos 4 dolgozat. 3 pontot 5, 2 pontot 3, 1 pontot 3 versenyző kapott. 5 dolgozat 0 pontos lett.

B. 5235. *Mutassuk meg, hogy a Fibonacci-sorozatban minden 3-nál nagyobb prímszám $4k+1$ alakú.*

(*5 pont*)

Megoldás. Az n-edik Fibonacci-számot F_n-nel jelöljük. Vizsgáljuk meg a Fibonacci-számok négyes maradékát, az előző két szám összege a következő (a sorozat definíciójából adódóan). Az első két szám maradéka 1, a harmadiké $1+1=2$, a negyediké $2+1=3$, az ötödiké $3+2=5\equiv 1$, a hatodiké $1+3=4\equiv 0$, a hetediké $1+0=1$, a nyolcadiké $1+0=1$ és innentől ismétlődik, mivel a következő szám csak az előző kettőtől függ. Láthatjuk, hogy hatos periódusonként ismétlődnek a számok, a 0 és a 2 maradékú biztosan páros, ezért nem lehet 3-nál nagyobb prím. Az egyetlen $4k+3$ alakú ebben a negyedik, tehát a sorozatban az ilyen számok az F_{6l+4} alakúak, ahol l nemnegatív egész. Mivel $6l+4$ páros, így felírható $2n$ alakban, ahol $n=3l+2$, ahol $n\geqslant 2$.

A Fibonacci-sorozattal kapcsolatban sok közismert azonosság létezik (lásd korábbi cikkünket: Énekes Béla – Kós Géza: *Néhány érdekesség a Fibonacci- és a Fibonacci-típusú sorozatokról,* amely ezen a linken érhető el:

`http://db.komal.hu/KomalHU/cikk.phtml?id=200117`,

illetve

`http://db.komal.hu/KomalHU/showpdf.phtml?tabla=Cikk&id=200117`).

Az ismert tételek közül most a teljes indukcióval könnyen belátható

$$F_{n+k-1}=F_nF_k+F_{n-1}F_{k-1}$$

azonosságot alkalmazzuk (a cikkben a 4. oldalon (6)-os számmal található meg). Alkalmas ($k-1=n$) helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$F_{2n}=F_nF_{n+1}+F_{n-1}F_n=F_n(F_{n+1}+F_{n-1}),$$

ami azt jelenti, hogy $F_n\mid F_{2n}$, vagyis, ha F_{2n} prímszám, akkor $F_n=1$ vagy $F_n=F_{2n}$. Utóbbi ellentmondás, hiszen a Fibonacci-sorozat $n\geqslant 2$-re szigorúan monoton növekedő. Ha pedig $F_n=1$, akkor $n=1$ vagy $n=2$, azonban az $n\geqslant 2$ feltétel miatt csak az $n=2$ esetet kell vizsgálnunk. Ekkor $F_{2n}=F_4=3$, tehát valóban $4k+3$ alakú prímszámot kaptunk. Több eset nincs, így beláttuk, hogy a Fibonacci-számok közül az egyetlen $4k+3$ alakú prím a 3, azaz a Fibonacci-sorozatban szereplő, 3-nál nagyobb prímszámok szükségképpen $4k+1$ alakúak. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Bényei Borisz (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

Összesen 66 dolgozat érkezett. 5 pontos 26, 4 pontos 23, 3 pontos 10 dolgozat. 2 pontot 6, 1 pontot 1 versenyző kapott.

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1721–1727.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1721. Boglárka felírt sorban egymás után 2022 darab számot úgy, hogy a második számot elosztva az elsővel, a hányados éppen a harmadik számmal lett egyenlő, és így tovább, például a hetedik szám egyenlő a hatodik és az ötödik szám hányadosával. Melyik számot írta fel utoljára Boglárka, ha az első a 20, a második pedig a 22 volt?

C. 1722. Az $ABCD$ négyszögről tudjuk, hogy a AD oldal ugyanolyan hosszú, mint a DC oldal, valamint hogy a DAB szöget α-val jelölve $ABC\sphericalangle = 2\alpha$, $BCD\sphericalangle = 3\alpha$ és $CDA\sphericalangle = 4\alpha$. Bizonyítsuk be, hogy az AB oldal kétszer olyan hosszú, mint az AD oldal.

(*Német versenyfeladat*)

Feladatok mindenkinek

C. 1723. Határozzuk meg mindazon, csupa különböző számjegyből álló, legfeljebb négyjegyű $\overline{abcd}$ számokat (ahol $a = 0$ is megengedett), amelyekre $9 \cdot \overline{abcd} = \overline{acbcd}$.

Javasolta: *Siposs András* (Budapest)

C. 1724. Az ABC háromszögben $CAB\sphericalangle = 30^\circ$. Mekkorák a háromszög ismeretlen szögei, ha a háromszög C pontból induló súlyvonala 45°-os szöget zár be az AB egyenessel?

C. 1725. Legyen p pozitív prímszám. Tudjuk, hogy az $x^2 - px - 580p = 0$ egyenlet gyökei egész számok. Határozzuk meg p értékét.

Javasolta: *Szalai Máté* (Szeged)

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1726. Mutassuk meg, hogy ha x, y, z olyan valós számok, amelyekre

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} = 1, \quad \text{akkor} \quad \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} = 0.$$

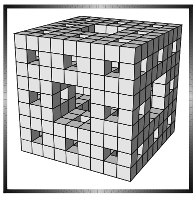
Adjunk meg a feltételt teljesítő valós számokat.

C. 1727. Fúrjunk át egy R sugarú tömör gömböt egy, a gömb középpontján átmenő egyenes mentén egy r sugarú hengeres fúróval, ahol $r<R$. Fejezzük ki a keletkezett maradéktest térfogatát a maradéktest m magasságának függvényében.

Javasolta: *Szabó Bertalan* (Miskolc, 1986)

Beküldési határidő: 2022. június 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5246–5253.)

B. 5246. 14 ember ül egy asztal körül, mindenki kék vagy sárga pólóban. Legfeljebb hány emberre teljesülhet, hogy a két szomszédja különböző színű pólóban van?

(*3 pont*)

B. 5247. Egy kötél két végpontját a talajhoz rögzítettük úgy, hogy a két végpont távolsága kisebb a kötél hosszánál. A kötél középső pontját 150 cm magasságra felemelve a kötél megfeszül. A kötél egyik végétől 90 cm-re lévő pontját felemelve a kötél 90 cm magasan feszül meg. Milyen hosszú a kötél?

(*3 pont*)

B. 5248. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}+x+y=\frac{8}{xy},$$

$$x(x+1)+y(y+1)=6.$$

(*4 pont*)

B. 5249. Jelöljük az ABC háromszög beírt körének érintési pontjai által meghatározott háromszög területét T_0-lal, a hozzáírt körök középpontjai által meghatározott háromszög területét pedig T_1-gyel. Mutassuk meg, hogy T_0 és T_1 mértani közepe megegyezik az ABC háromszög területével.

(*5 pont*) Javasolta: *Bártfai Pál*

B. 5250. Igazoljuk, hogy minden nemnegatív egész n számra

$$2^{2^n(n-2)+n+2}\leqslant(2^n)!\leqslant 2^{2^n(n-1)+1}.$$

(*5 pont*) Javasolta: *Blahota István* (Nyíregyháza)

B. 5251. Vegyük fel azt az $ABCD$ téglalapot a koordinátarendszerben, amelynek csúcsai $A(0,0)$, $B(2022,0)$, $C(2022,2)$, $D(0,2)$. Tekintsük azokat az egységnyi területű háromszögeket, amelyek mindhárom csúcsa a téglalap hosszabbik oldalpárjának egy-egy rácspontja. Ezeket a háromszögeket szeretnénk megszínezni úgy, hogy azonos színű háromszögeknek nem lehet közös belső pontjuk. Legalább hány színre van ehhez szükségünk?

(*5 pont*) Javasolta: *Nagy Zoltán Lóránt* (Budapest)

B. 5252. Adott egy hat csúcsú $ABCA_1B_1C_1$ poliéder, amelynek ABC és $A_1B_1C_1$ két háromszöglapja, továbbá az AA_1, BB_1 és CC_1 élei párhuzamosak. Az AA_1B_1B, BB_1C_1C és CC_1A_1A trapézlapok átlóinak metszéspontjai P, Q és R. Mutassuk meg, hogy az $ABCPQR$ és $A_1B_1C_1PQR$ poliéderek térfogata megegyezik.

(*6 pont*) Javasolta: *Kocsis Szilveszter* (Budapest)

B. 5253. Igaz-e, hogy ha $\binom{n}{k}$ páros, akkor az n elemű S halmaz k elemű részhalmazai párokba rendezhetők úgy, hogy az egy párba tartozó részhalmazok szimmetrikus differenciája mindig 2 elemű?

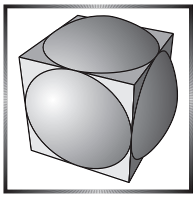
(*6 pont*)

❄

Beküldési határidő: 2022. június 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (827–829.)



A. 827. Legyen $n>1$ egész szám. Egy pakliban n-féle színű és n-féle értékű kártya van, minden szín és érték párból pontosan egy, azaz összesen n^2 darab. A paklit megkeverjük, és kiosztjuk n játékos között úgy, hogy mindenki n darab kártyát kapjon. A játékosok azt akarják megcsinálni, hogy egy általuk választott sorrendben leülnek egy kör alakú asztalhoz, és az első játékostól kezdve sorban leraknak egy-egy lapot, míg végül mindenki lerakta az összes lapját úgy, hogy mindig olyan kártyát kell rakni, amely sem színben, sem értékben nem egyezik meg a közvetlenül előtte lerakott kártyával (az elsőnek lerakott kártya bármi lehet). Mely n-ekre lehetséges, hogy úgy lett kiosztva a pakli, hogy a játékosok ezt nem tudják megcsinálni? (A játékosok együttműködnek egymással, és látják egymás lapjait.)

Javasolta: *Kocsis Anett* (Budapest)

A. 828. Az ABC háromszög beírt körének középpontja I, hozzáírt körei pedig Ω_A, Ω_B és Ω_C. Legyen ℓ_A az az egyenes, amely átmegy az I pontból az Ω_A körhöz húzott érintők érintési pontjain. Az ℓ_B és ℓ_C egyenesek hasonlóan vannak definiálva. Bizonyítsuk be, hogy az ℓ_A, ℓ_B és ℓ_C egyenesek által meghatározott háromszög magasságpontja megegyezik az ABC háromszög Nagel-pontjával.

(Ha egy háromszög csúcsait összekötjük a szemközti oldalhoz hozzáírt körök érintési pontjaival, a kapott három szakasz közös pontja a háromszög Nagel-pontja.)

Javasolta: *Nikolai Beluhov* (Bulgaria)

A. 829. Legyen G egy n csúcsú egyszerű gráf, melynek van legalább egy éle, és tekintsük a gráf csúcsainak azon $S: V(G) \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ súlyozásait, melyekre $\sum\limits_{v \in V(G)} S(v) = 1$. Legyen továbbá

$$f(G) = \max_S \min_{(v,w) \in E(G)} S(v)S(w),$$

ahol S végigfut az összes lehetséges súlyozáson.

Bizonyítsuk be, hogy $f(G) = \frac{1}{n^2}$ akkor és csak akkor teljesül, ha G csúcsai lefedhetők élek és páratlan körök diszjunkt uniójával. ($V(G)$ a G gráf csúcsait, $E(G)$ a G gráf éleit jelöli.)

Beküldési határidő: 2022. június 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Informatikából kitűzött feladatok

I. 565. Az előző havi számunkban megjelent tréfás fejtörő a következő volt: „Helyezzünk el hat fehér bábut egy sakktáblára két világos készletből úgy, hogy egy sötét bábut letéve bármely szabad mezőre, az biztosan üthető legyen.”

Készítsünk programot, amely egy fejtörő megoldását ellenőrzi, tehát megadja, hogy az elhelyezésben valóban minden szabadon maradt mezőt ütésben tartanak-e a világos bábuk.

A program a standard bemenet nyolc sorából olvasson be egy elhelyezést. A sakkbábuk betűjele: vezér = V, bástya = B, huszár = H, futó = F, király = K, gyalog = G. Az üresen álló mezőket egy-egy szóköz jelöli.

Ha az elhelyezés megfelelő, akkor a program az OK üzenetet jelenítse meg a standard kimeneten. Ha az elhelyezés nem jó, akkor a program a standard kimenet nyolc sorába írja ki a sakktáblát, jelölve a világos bábukat, illetve jelenjen meg egy-egy `X` karakter azokon a mezőkön, amelyek nincsenek ütésben.

Példa:

Bemenet (a szóközök helyét pont jelöli)	**Kimenet**

`........`
`..V.....`
`.....V..`
`.B......`
`.......B`
`........`
`......B.`
`B.......`
	`....X...`
	`..V.....`
	`.....V..`
	`.B......`
	`.......B`
	`...XX...`
	`......B.`
	`B.......`

Beküldendő egy tömörített `i565.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 566 (É). A 2022. januári számban megjelent **I. 553.** feladatban egy tízes számrendszerben adott számot kellett megadni faktoriális számrendszerben. A faktoriális számrendszerben megadott szám n-edik helyiértékén álló számjegyét $n!$ értékével kell szorozni. Például a 235_{10} szám faktoriális számrendszerbeli alakja $14301_!$, azaz $1\cdot1+3\cdot6+4\cdot24+1\cdot120$. Amennyiben a faktoriális számrendszerben 9-esnél nagyobb számjegy fordul elő, akkor az ott szereplő számot zárójelbe tesszük. Például az $1(10)406010111_!$ szám második legmagasabb helyiértékű számjegye 10, és a szám tízes számrendszerben $77\,686\,689_{10}$.

Ebben a feladatban táblázatkezelő segítségével kell elkészítenünk az átváltást: egy faktoriális számrendszerben felírt egész szám tízes számrendszerbeli alakját kell megadni. A faktoriális számrendszerben felírt szám legföljebb 15 számjegyű, a nyitó és záró zárójelekkel együtt legföljebb 30 karakterből áll.

A megoldás során vegyük figyelembe a következőket:

- Amennyiben lehetséges, és a feladat mást nem mond, akkor a megoldás során képletet, függvényt, hivatkozást használjunk.
- A megoldáshoz segédszámításokat a K oszloptól jobbra végezhetünk.
- A részfeladatok között van olyan, amely egy korábbi kérdés eredményét használja fel. Ha a korábbi részfeladatot nem sikerül teljesen megoldani, akkor használjuk a megoldását úgy, ahogy van, vagy helyettesítsük megfelelő értékkel, és azzal dolgozzunk tovább. Így ugyanis pontokat kaphatunk erre a részfeladatra is.
- A megoldáshoz program vagy makró nem használható, kizárólag a táblázatkezelő beépített függvényeivel dolgozzunk.

1. Alakítsuk ki a lenti mintának megfelelő táblázatszerkezetet és mentsük a táblázatot faktor10 néven a táblázatkezelő alapértelmezett formátumában.
2. Készítsük el az első és a negyedik sorban látott fejlécet, ahol szükséges egyesítsük a cellákat, illetve igazítsuk vízszintesen középre a cellák tartalmát.
3. Az A2 cellába írjunk be egy faktoriális számrendszerben megadott számot szövegként. A szám tízes számrendszerben adott alakja a C2-es cellában jelenjen meg.

4. Az A5:A34 tartományban adjuk meg az első 30 pozitív egész számot és a B5:B19 tartományban az első 15 egész szám faktoriálisát.
5. Az F5:F34 tartományban adjuk meg a B2 cellában található szöveg karaktereit egymás alatt úgy, hogy fentről lefelé a faktoriális számrendszerben adott szám karaktereit jobbról balra tudjuk kiolvasni. A szövegnél hosszabb karakterhelyeket jelölő cellákban 0 érték jelenjen meg.
6. A G5:G34 tartomány celláiban adjunk meg olyan képletet, amely megszámolja a faktoriális számban jobbról balra haladva az adott karakterhely előtt előforduló nyitó zárójeleket.
7. A H5:H34 tartomány celláiban adjunk meg olyan képletet, amely megszámolja a faktoriális számban jobbról balra haladva az adott karakterhely előtt előforduló záró zárójeleket.
8. Az I5:I34 tartomány celláiban határozzuk meg a faktoriális szám megfelelő számjegyét. A zárójeleket tartalmazó sorokban 0 értéket adjunk meg vagy hagyjuk üresen, a nyitó és záró zárójelek közötti sorokban állítsuk elő a többjegyű szám számjegyei alapján a többjegyű szám értékét, ami az utolsó zárójelen belüli szám sorában jelenjen meg.

Minta:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Faktoriális**		**Tízes**							
2	4321(11)(10)353344320		5 505 642 069 718							
3										
4	**Hely**	**Helyiérték**	**Számjegy**	**Érték**		**Karakter**	**Nyitó**	**Záró**	**Jegy**	**Hányadik**
5	1	1	0	0		0	0	0	0	1
6	2	2	2	4		2	0	0	2	2
7	3	6	3	18		3	0	0	3	3
8	4	24	4	96		4	0	0	4	4
9	5	120	4	480		4	0	0	4	5
10	6	720	3	2160		3	0	0	3	6
11	7	5040	3	15120		3	0	0	3	7
12	8	40320	5	201600		5	0	0	5	8
13	9	362880	3	1088640		3	0	0	3	9
14	10	3628800	10	36288000		)	0	0	0	9
15	11	39916800	11	439084800		0	0	1	10	10
16	12	479001600	1	479001600		1	0	1	1	10
17	13	6227020800	2	12454041600		(	0	1	0	10
18	14	87178291200	3	261534873600		)	1	1	0	10
19	15	1307674368000	4	5230697472000		1	1	2	11	11
20	16					1	1	2	1	11
21	17					(	1	2	0	11
22	18					1	2	2	1	12
23	19					2	2	2	2	13
24	20					3	2	2	3	14
25	21					4	2	2	4	15
26	22					0	2	2	0	16
27	23					0	2	2	0	17
28	24					0	2	2	0	18
29	25					0	2	2	0	19
30	26					0	2	2	0	20
31	27					0	2	2	0	21
32	28					0	2	2	0	22

9. A J5:J34 tartomány celláiban adjuk meg, hogy az előző oszlopban szereplő számjegy a kisebb helyiértékektől indulva hányadik számjegye a faktoriális számrendszerbeli számnak. Amennyiben az I oszlopban nem egy számjegy értéke van, akkor ott az előző sorban lévő számot adjuk meg. Egy szám a minta szerint többször is megjelenhet, de sorrendben az első szám adja meg, hogy az adott sorban az I oszlopban kapott érték hányadik számjegyét adja a faktoriális számrendszerbeli számnak.
10. A C5:C19 tartományban adjuk meg a J oszlopban meghatározott sorszám alapján a faktoriális számrendszerbeli szám megfelelő helyiértékén álló számjegyet tízes számrendszerben, vagy 0 értéket.
11. A D5:D19 tartományban adjuk meg a B és C oszlopban lévő megfelelő értékek szorzatát, vagy 0 értéket.
12. A C2 cellában adjuk meg a D5:D19 tartományban kiszámított számok összegét.
13. Formázzuk a táblázatot a *mintának* megfelelően.

Beküldendő egy tömörített `i566.zip` állományban a megoldást tartalmazó munkafüzet és a megoldás rövid leírását bemutató dokumentáció.

I. 567. Vizsgáljuk meg két tömegpont mozgását, amelyek egy síkban mozognak, és mozgásukat csak a közöttük lévő tömegvonzás befolyásolja. A tömegvonzást a gravitációs erőtörvényből számítsuk. A két tömeg értéke, kezdeti helyzetük, valamint a kezdeti sebességük legyen a megoldásban paraméterként megadható. A két test egy síkban történő mozgásához a kezdeti sebességek is egy síkba esnek.

A megoldás során a folyamatot bontsuk kis Δt időintervallumokra, melyekben a test sebessége és gyorsulása állandó értéknek tekinthető. Minden időintervallum során számítsuk ki a testek közötti vonzerő alapján a testek gyorsulásának koordinátáit, majd ezek segítségével módosítsuk a testek sebességét, illetve a sebességet ismerve adjuk meg a test elmozdulását. Ezek alapján minden időintervallum eltelte után tegyük az elmozdulásnak megfelelő helyre a két testet úgy, hogy mozgásuk pályája látható legyen.

A feladat tetszőleges online grafikus rendszerben vagy szimulációs környezetben megoldható, illetve alkalmazói program készíthető a versenyben használható programozási nyelveken. A megoldás mutassa be a két tömegpont mozgását, tehát folyamatosan rajzolja ki a helyzetüket.

Beküldendők egy `i567.zip` tömörített állományban a megoldást tartalmazó forrásállományok vagy a források elérhetőségét mutató hivatkozás, illetve egy rövid dokumentáció, amely használati útmutatót ad a megoldáshoz, illetve szükség esetén tartalmazza a programozási nyelv grafikus kiegészítésének módját.

I/S. 63. Adott egy N sorból és N oszlopból álló négyzetrács (tehát összesen N^2 rácspontot tartalmaz). Egy egyenest rácsegyenesnek nevezünk, ha legalább két rácsponton áthalad. Adjuk meg, hogy N értékétől függően hány különböző rácsegyenes van.

A bemenet egyetlen sorában az N szám található.

A kimenet egyetlen sorában egy szám szerepeljen: a különböző rácsegyenesek száma.

Példák:

Bemenet	Kimenet
2	6
3	20

Korlátok: $1 \leqslant N \leqslant 1000$. Időlimit: 0,4 mp.

Értékelés: a pontok 50%-a kapható olyan programra, amely megfelelő kimenetet ad, ha $1 \leqslant N \leqslant 50$.

S. 162. Jónásnak van egy N csúcsú teljes bináris fája. A fa gyökere az 1-es sorszámú csúcs. Ha az i-edik csúcs nem levél, akkor a két gyereke a $2i$ és $2i+1$ sorszámú csúcs. Minden csúcshoz hozzárendeltünk egy pozitív egész számot, ez a csúcs súlya. A súlyok között nincs két egyforma.

Jónás megpróbálta a fát maximum-kupaccá alakítani. Azt szeretné, hogy minden csúcs súlya nagyobb legyen, mint a két gyerekének a súlya. Ehhez a következő műveletet hajtotta végre Q-szor: kiválasztott egy csúcsot, majd megkereste, melyik a legnagyobb súly az összes alatta lévő csúcsban. Ezután a kiválasztott csúcs súlyát kicserélte a legnagyobb súllyal. Számítsuk ki, mennyire sikerült Jónás terve, azaz hány olyan szülő-gyerek pár van, amire teljesül a kupac feltétel.

Bemenet: az első sor tartalmazza a csúcsok N számát. A következő sorban a csúcsok súlya szerepel sorszám szerint növekvő sorrendben. A harmadik sorban a cserék Q száma szerepel. A negyedik sorban Q szám szerepel: a kiválasztott csúcsok sorszámai a kiválasztás sorrendjében.

Kimenet: a kimenet első és egyetlen sorába azon szülő-gyerek párok számát kell írni, melyben a szülő súlya nagyobb, mint a gyerek súlya.

Minta:

Bemenet (a / jel sortörést helyettesít)	**Kimenet**
`7 / 1 4 6 9 2 3 7` `3 / 3 2 1`	4

Magyarázat: a 3-as csúcs súlya 6, ezt a 7-essel cseréljük meg. A 2-es csúcs súlya 4, ezt a 9-essel cseréljük meg. Az 1-es csúcs súlya 1, ezt a 9-essel cseréljük. A csúcsok súlya ezután: 9, 1, 7, 4, 2, 3, 6.

Korlátok: $3 \leqslant N = 2^k - 1 < 10^5$. A csúcsok súlya legfeljebb 10^9. Időlimit: 1 mp.

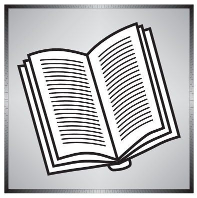
Értékelés: a pontok 50%-a kapható arra a programra, amely helyes kimenetet ad, ha $N \cdot Q \leqslant 10^6$.

Beküldendő egy `s162.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2022. június 15.

Könyvismertetés



John D. Barrow: 100 alapvető dolog a matematikáról és a művészetekről, AMIRŐL NEM TUDTUK, hogy nem tudjuk

J. D. Barrow (1952–2020) angol matematikus, elméleti fizikus, kozmológus lenyűgözően érdekes könyvét mintha kimondottan a KöMaL olvasóinak és versenyzőinek írta volna. A 100 rövid (egy-két oldalas) írás – mindegyik közérthető – kalandozik a matematika, a fizika, a csillagászat, a nyelvészet, a tudománytörténet és a művészetek határterületein. Kedvcsinálóként – a teljesség igénye nélkül – megemlítünk néhány „gyöngyszemet”.

– A balerinák egy-egy nagyobb ugrás közben mintha a gravitációt legyőzve lebegnének a levegőben. Vajon hogyan egyeztethető össze ez a (filmfelvételekkel is dokumentált) jelenség a tömegvonzás törvényével?

– Képzeljük magunkat egy nagy képtár biztonsági főnökének. A termek falait rengeteg értékes kép borítja, meglehetősen alacsonyra akasztva, hogy szemmagasságból is jól láthatók legyenek, így viszont védeni kell ezeket a tolvajok és a rongálók elől. A képtár különféle alakú és méretű termekből áll. Legalább hány teremőrre van szükségünk, hogy minden egyes képet folyamatosan szemmel tarthassanak? Sajnos ez nem könnyű, sőt úgynevezett „nehéz” számítási feladat, amelynek az elvégzéséhez szükséges idő megduplázódhat, valahányszor a galéria egy újabb fallal bővül. A matematikusok sokféle helyzetet tanulmányoztak, olyanokat is, amikor az őrök mozoghatnak, vagy tükrök segíthetik őket az eldugott sarkok szemmel tartásában.

– Korunk egyik legfontosabb értéke a hatékonyság, és ennek szellemében hajlamosak vagyunk elítélni a késlekedést. Mégsem nyilvánvaló, hogy a halogatás mindig nemkívánatos. Ha a vállalkozásunknak egy nagy feladat elvégzését kell kifizetnie, amelynek a részfeladataihoz használt eljárások egyre olcsóbbak lesznek, akkor talán megéri egy kicsit kényelmesebbre venni a tempót, és később hozzákezdeni, hiszen így a teljes költség kisebb lesz. A számítógépes feldolgozásban éppen ez a helyzet. A híres Moore-törvény kimondja, hogy egy adott pénzösszegért megvásárolható számítógépes teljesítmény mintegy 18 havonta megduplázódik. Megmutatható, hogy a $18/\ln 2 \approx 26$ hónapnál jelenleg több időt igénylő számítástechnikai feladatokat érdemes később elkezdeni, míg az ennél rövidebb idejű projektekbe célszerű a lehető leghamarabb belekezdeni, mert a technológia jelenlegi fejlődése mellett azokat nem lehet hamarabb elvégezni.

– Van olyan hullámvasút, amelynek pályája hurok alakú, és a hurok tetejénél fejjel lefelé utazunk, akkora sebességgel, hogy még biztonsági öv nélkül sem esnénk ki. Vajon milyen alakú görbe a hurok? Aki azt gondolja, hogy kör, téved. Kiszámítható (a KöMaL-ban többször kitűzött feladatként is szerepelt), hogy ha a motor nélkül haladó szerelvényben a körpálya legmagasabb pontjánál éppen „súlytalanok” vagyunk, akkor a kör legalsó pontjánál a normál testsúlyunk 6-szorosát érzékeljük. A legtöbb utas ettől elveszítené az eszméletét, mert túl kevés oxigén jutna az agyába. Emiatt a valódi hullámvasutaknál a pályagörbe nem kör, hanem pl. *klotoid* (más néven Cornù-féle spirál), amelynek görbülete a megtett úttal arányosan csökken.

– Miért tojásdad alakú az igazi tojás? Milyen biológiai előnyei vannak a gömbtől (és az ellipszoidtól, vagy a rögbilabda alaktól) eltérő alakú madártojásoknak?

– Az egyszerű matematikai szabályok közül az egyik legmeglepőbb az úgynevezett *Benford-törvény. Frank Benford* amerikai mérnökről nevezték el, aki 1938-ban írt cikket róla. Megfigyelte (ahogy azt már fél évszázaddal korábban *Simon Newcomb* kanadai–amerikai asztrofizikus is észrevette), hogy sok, elsőre véletlenszerűnek gondolt számhalmaz (tavak területe, baseball-eredmények, egy magazinban előforduló összes szám, a csillagok pozíciója, árjegyzékek, fizikai állandók vagy könyvelési tételek) első számjegye (meglehetős pontossággal, a mértékegységtől függetlenül) nagyon érdekes valószínűségi eloszlást követ.

Furcsa módon az $1, 2, 3, \ldots, 9$ számjegyek nem egyforma, hanem egyre csökkenő eséllyel fordulnak elő az első számjegy helyén (az 1-es valószínűsége 30%, a 9-esé mindössze 5%!) A Newcomb–Benford-törvény megdöbbentő területeken is alkalmazásra talált. Egy amerikai doktorandusz, *Mark Nigrini* 1992-ben azt vetette fel, hogy hamis könyvelési adatok kiszűrésére is alkalmas lehet az elsőszámjegy-törvény. Ha egy adóalany kitalált, vagy éppen véletlenszám-generátorral gyártott számokkal tölti ki a mezőket és nem valós tényeket leírókkal, ezek a számok nem követik a Newcomb–Benford törvényt.

– A könyv egyik írása (*Hány szót ismert Shakespeare?*) adta az ötletet a KöMaL múlt havi számában megjelent, pontversenyen kívüli feladathoz is.

Áprilisi pótfeladat. *A KöMaL minden számát a nyomdába adás előtt ketten is elolvassák. A mostani számban az egyik lektor* 60, *a másik* 40 *hibát talált, és ezek között* 35 *volt olyan, amelyet mindketten észrevettek. Becsüljük meg, hogy hány hiba maradhatott ezek után a kéziratban!*

Megoldás. Ha az egyik lektor p, a másik q valószínűséggel veszi észre a hibákat, és a hibák száma N, akkor fennáll, hogy $p \cdot N = 60$, $q \cdot N = 40$ és $pq \cdot N = 35$, ahonnan p és q kiküszöbölése után kapjuk, hogy

$$N = \frac{60 \cdot 40}{35} = 68{,}6 \approx 69.$$

A fel nem fedezett hibák vélhető száma: $n = 69 - (60 + 40 - 35) = 4$.

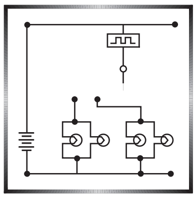
Általában, ha az egyik lektor N_1, a másik N_2 hibát talált, és ezek közül $N_{(1,2)}$-t vettek mindketten észre, akkor

$$n = \frac{N_1 N_2}{N_{(1,2)}} - N_1 - N_2 + N_{(1,2)},$$

amit így is felírhatunk:

$$n = \frac{\big(N_1 - N_{(1,2)}\big)\big(N_2 - N_{(1,2)}\big)}{N_{(1,2)}}.$$

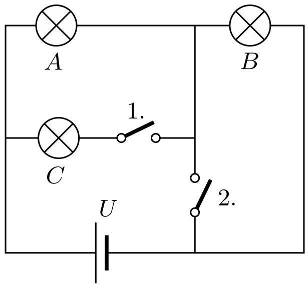
(*G. P.*)



Fizika gyakorlatok megoldása

G. 771. *Az ábrán látható kapcsolásban a fogyasztók azonos R ellenállásúak, és U feszültség esetén a teljesítményük P.*

Mekkora az egyes fogyasztók teljesítményfelvétele a kapcsolók nyitott (ny), *illetve zárt* (z) *állásánál? Töltsük ki a táblázatot!*



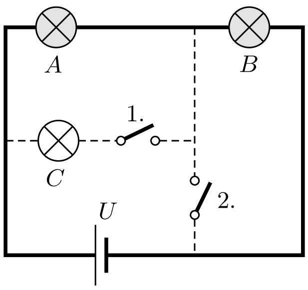
1.	2.	A	B	C
ny	ny			
ny	z			
z	ny			
z	z			

(*4 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

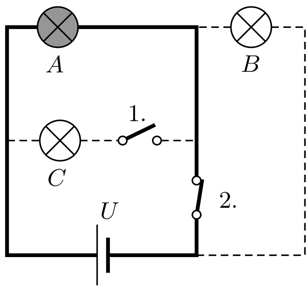
Megoldás. Az egyes fogyasztók teljesítménye $P' = \frac{U'^2}{R}$, ahol U' a fogyasztón mérhető feszültség.

1. eset: Mindkét kapcsoló nyitott (*1. ábra*). (Az ábrán az áram útját vastagabb, az árammentes szakaszokat pedig szaggatott vonal jelöli.)

A sorosan kapcsolt A és B fogyasztó mindegyikére $U' = \frac{1}{2}U$ feszültség jut, így a teljesítményük $\frac{1}{4}P$, a harmadik fogyasztóé pedig nulla.



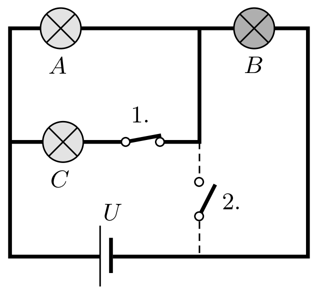
1. ábra



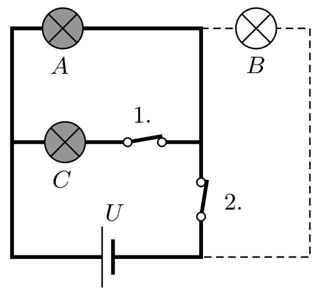
2. ábra

2. eset: Az 1. kapcsoló nyitott, a 2. zárva van (*2. ábra*). Most csak az A fogyasztón folyik át áram, a rá eső feszültség $U' = U$, így a teljesítménye P.

3. eset: Az 1. kapcsoló zárt, a 2. nyitott állásban van (*3. ábra*). A párhuzamosan kapcsolt A és C fogyasztó eredő ellenállása fele a B fogyasztó R ellenállásának, így a megfelelő feszültségek: $U'_A = U'_C = \frac{1}{3}U$ és $U'_B = \frac{2}{3}U$. A teljesítmények rendre $\frac{1}{9}P$, $\frac{4}{9}P$ és $\frac{1}{9}P$.



3. ábra



4. ábra

4. eset: Mindkét kapcsoló zárt (*4. ábra*). Az A és a C fogyasztó feszültsége U, a teljesítményük pedig P. A B fogyasztón keresztül nem folyik áram, a teljesítménye tehát *nulla.*

A kitöltött táblázat így néz ki:

1.	2.	A	B	C
ny	ny	$\frac{1}{4}P$	$\frac{1}{4}P$	0
ny	z	P	0	0
z	ny	$\frac{1}{9}P$	$\frac{4}{9}P$	$\frac{1}{9}P$
z	z	P	0	P

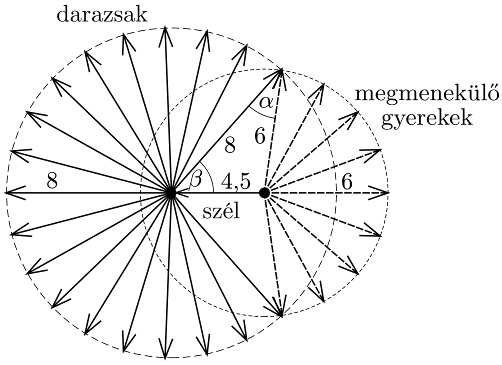
Biró Kata (Miskolc, Földes F. Gimn., 9. évf.)

28 dolgozat érkezett. Helyes 14 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 5, hiányos (1–2 pont) 3, hibás 6 dolgozat.

G. 772. *A gyerekek körjátékot játszanak a mezőn. Szerencsétlen módon a kör közepén álló társuk darázsfészekbe lép, és a mérges darazsak szétrepülnek. A mezőn keleti irányból* 4,5 m/s *sebességű szél fúj, a gyerekek* 6 m/s *nagyságú sebességgel sugárirányban menekülnek. A tudósok vizsgálata szerint ezek a darazsak szélcsendben* 8 m/s *sebességgel tudnak repülni. Becsüljük meg, hogy a gyerekek hány százaléka menekül meg biztosan a darázscsípésektől! A válasz megadásához használhatunk akár vonalzót, körzőt és szögmérőt is.*

(*4 pont*)

I. megoldás. Az *1. ábrán* a folytonos vonallal jelölt elmozdulásvektorok a darazsak helyzetét jelölik a darázsfészekbe lépés után valamennyi (mondjuk 1 másodpercnyi) idő elteltével. A szaggatott vonallal húzott nyilak a darazsaktól megmenekülő gyerekek elmozdulásvektorait jelölik. A két vektorsereg egy 8 egység, illetve 6 egység sugarú kör kerületi pontjaiba mutat; a körök középpontja közötti távolság a szél sebességének megfelelően 4,5 egység.



1. ábra

Az ábrán látható kis háromszögre alkalmazva a koszinusztételt:

$$4{,}5^2 = 6^2 + 8^2 - 2\cdot 6\cdot 8\cos\alpha,$$

ahonnan

$$\cos\alpha = \frac{36+64-20{,}25}{96} = 0{,}83, \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 33{,}83^\circ,$$

majd a szinusztétel szerint

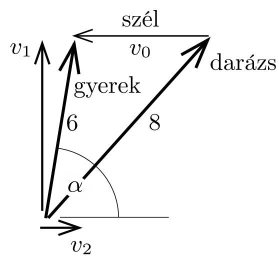
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{4{,}5}{6}, \qquad \Rightarrow \qquad \sin\beta = 0{,}742, \qquad \Rightarrow \qquad \beta = 47{,}92^\circ.$$

A gyerekek közül azok menekülnek meg biztosan a darázscsípéstől, akik az ábrán sötétebben jelölt $2(\alpha+\beta) = 163{,}5^\circ$-os szögű tartomány irányában kezdenek el szaladni. Ez a szög a teljes, 360°-nak 0,454-ed része, tehát a gyerekek kb. 45%-a menekül meg a darazsaktól.

Team cucu:
Esztinka Anna Karolina, Braun Júlia, Ludvig Csenge Lilla
(Budapest, Városmajori Gimn., 10. évf.)

II. megoldás. Bontsuk fel a sebességeket szélirányra merőleges és a széllel ellentétes irányú komponensekre. Tekintsük azt a gyereket, akit éppen nem érnek utol a darazsak. Az ő sebességének komponensei legyenek v_1 és v_2, abszolút értéke $\sqrt{v_1^2+v_2^2} = 6$ m/s, amiből (m/s egységekkel számolva)

$$v_1^2 + v_2^2 = 36. \tag{1}$$



2. ábra

Legyen a szél sebessége $v_0 = 4{,}5$ m/s. Ekkor a gyereket üldöző és őt majdnem utolérő darázs *talajhoz viszonyított* repülési sebességének komponensei v_1 és v_2, a *levegőhöz képest* mért sebessége v_1 és v_2+v_0 komponensű, a nagysága

$$\sqrt{v_1^2 + (v_2+v_0)^2} = 8 \text{ m/s},$$

amiből

$$v_1^2 + v_2^2 + v_0^2 + 2v_2v_0 = 64. \tag{2}$$

A (2) egyenletből (1)-et kivonva kapjuk, hogy

$$v_0^2 + 2v_2v_0 = 28, \qquad \Rightarrow \qquad v_2 = \frac{28 - 20{,}25}{9} = 0{,}86\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

továbbá $v_1^2 + v_2^2 = 36$ alapján

$$v_1 = \sqrt{36 - 0{,}86^2}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 5{,}94\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

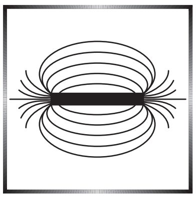
A darazsak elől éppen megmenekülő gyerek a keleti szélirányhoz képest $\alpha = \mathrm{arctg}\,\frac{5{,}94}{0{,}86} = 82^\circ$-os szögben szalad. Így azok a gyerekek menekülnek meg, akiknek sebessége legfeljebb 82°-kal tér el a keleti iránytól, ők a csoport $\frac{82}{180} \approx 0{,}45$ hányada, vagyis a 45%-a.

Csilling Dániel (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.)

Megjegyzés. A fenti megfontolások nem vették figyelembe a gyerekek alkotta kör r_0 sugarát. Ez a méret nyilván nullától különböző, ellenkező esetben a darazsak rögtön megcsíphetik az összes gyereket. A gyereket utolérő darázs a gyereknél r_0-lal hosszabb utat kell megtegyen, ez az útkülönbség azonban az üldözési idő növekedtével a darázs által megtett úthoz viszonyítva egyre jelentéktelenebbé válik. A gyereket éppen utolérő darázs repülési ideje viszonylag nagy, tehát a megoldás során alkalmazott $r_0 \approx 0$ közelítés jogos.

(*G. P.*)

21 dolgozat érkezett. Helyes 9 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 7, hiányos (1–2 pont) 4, nem versenyszerű 1 dolgozat.

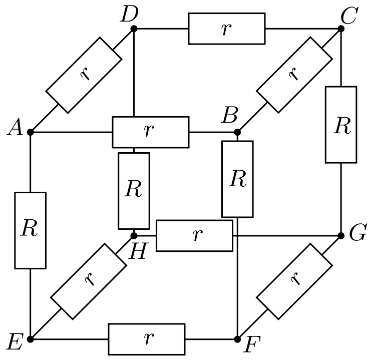


Fizika feladatok megoldása

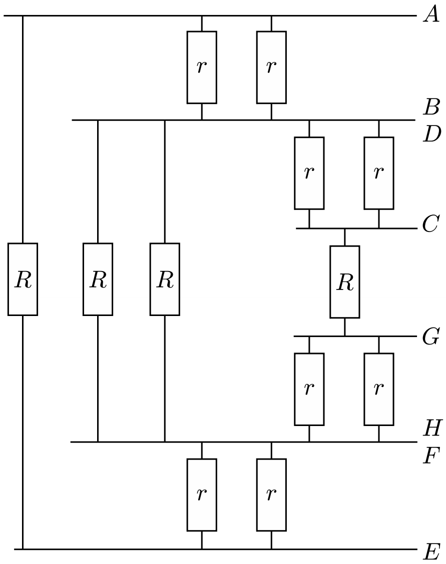
P. 5359. *Egy kocka élei kétféle ellenállásból épülnek fel. Valamelyik két szemközti laphoz tartozó* 8 db *él ellenállásának értéke r, míg az ezekre merőleges* 4 db *élt alkotó ellenállások értéke R. Határozzuk meg a hálózat eredő ellenállását az egyik R ellenállást közrefogó, két szomszédos csúcspont között!*

(*4 pont*) Közli: *Szekeres Béla,* Budapest

Megoldás. A vizsgált két szomszédos csúcspont legyen az *1. ábrán* látható A és E pont. A szimmetria miatt a D és a B, valamint az F és a H pontok azonos potenciálúak. Ezt kihasználva a kapcsolás *2. ábrán* láthatóra egyszerűsödik.



1. ábra



2. ábra

Két egyforma nagyságú ellenállás párhuzamos eredője feleakkora, mint az egyikük ellenállása (pl. BD és A között $r/2$).

A párhuzamosan, illetve sorosan kapcsolt ellenállásokra érvényes összefüggések szerint a BD és HF közötti ellenállás:

$$\frac{1}{R_{BD-HF}}=\frac{1}{(r/2+r/2+R)}+\frac{2}{R}=\frac{3R+2r}{R(R+r)},$$

tehát a BD és HF pontok között látható rész ellenállása:

$$R_{BD-HF}=\frac{R(R+r)}{3R+2r}.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy az A és az E pontok közötti eredő ellenállásra érvényes:

$$\frac{1}{R_{A-E}}=\frac{1}{r+\frac{R(R+r)}{3R+2r}}+\frac{1}{R}=\frac{3R+2r}{2r^2+R^2+4Rr}+\frac{1}{R}=\frac{4R^2+2r^2+6Rr}{R(2r^2+R^2+4Rr)},$$

ahonnan a kérdéses eredő ellenállás

$$R_{A-E}=R\frac{R^2+2r^2+4Rr}{4R^2+2r^2+6Rr}.$$

Yokota Adan (Gödöllő, Török Ignác Gimn., 12. évf.)

47 dolgozat érkezett. Helyes 14 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 13, hiányos (1–2 pont) 6, hibás 11, nem versenyszerű 3 dolgozat.

P. 5382. *Egy régi szalagos magnetofon gyors áttekercseléskor a szedőorsót állandó fordulatszámmal forgatja. A két orsó belső átmérője* 5 cm, *a külső átmérőjük pedig* 15 cm. *A teljesen teli orsóról a magnószalag átcsévélési ideje* 3 perc. *A szalagot az üres orsóra tekercselik át. Indítástól számítva mennyi idő múlva lesz a két orsón éppen egyenlő hosszúságú magnószalag?*

(*4 pont*) Közli: *Holics László*, Budapest

Megoldás. Az áttekercselés kezdetekor a szedőorsón a magnószalag tekercsének külső sugara $r_1 = 2{,}5$ cm, $T = 3$ perc múlva pedig $r_2 = 7{,}5$ cm. A szalag hosszúsága az orsón lévő rész keresztmetszetének területével arányos. Legyen a tekercs külső sugara r_3 akkor, amikor a szalag fele éppen átkerült a szedőorsóra. A már áttekercselt rész keresztmetszetének területe ekkor megegyezik az áttekercseletlen rész területével:

$$r_3^2\pi - r_1^2\pi = r_2^2\pi - r_3^2\pi,$$

ahonnan

$$r_3 = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}} = 5{,}6 \text{ cm}.$$

A szedőorsó állandó fordulatszáma miatt a rajta lévő tekercs külső sugara időben egyenletesen növekszik. Ha a szalag felének áttekercseléséhez t időre van szükség, akkor fennáll:

$$\frac{r_3 - r_1}{r_2 - r_1} = \frac{t}{T},$$

ahonnan a keresett idő:

$$t = \frac{5{,}6 - 2{,}5}{7{,}5 - 2{,}5} \cdot (3 \text{ min}) = 1{,}85 \text{ min}.$$

Megjegyzés. Látható, hogy szalag felének áttekercselési ideje nem a teljes tekercselési idő fele, hanem annál kicsit több.

Vigh Zsófia (Szeged, SZTE Gyak. Gimn. és Ált. Isk. 11. évf.)

36 dolgozat érkezett. Helyes 19 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 3, hiányos (1–2 pont) 11, hibás 1, nem versenyszerű 2 dolgozat.

P. 5384. *Egy vékony, homogén, függőleges pálca tetején kicsiny golyó helyezkedik el. A pálca tömegéhez képest a golyó tömege elhanyagolható, és a pálca súrlódásmentesnek tekinthető asztalon áll. A pálca egyszer csak eldől. Mikor csapódik a golyó nagyobb sebességgel az asztallapra, ha a pálca tetejére van ragasztva, vagy ha egyszerűen csak rátettük a pálcára, ahonnan nagyon könnyen lebillenhet?*

(A merev testek forgómozgásáról rövid cikk olvasható a KöMaL honlapján.)*

(*4 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

* `https://www.komal.hu/cikkek/cikklista.h.shtml`.

Megoldás. *I. eset.* A golyó rögzítve van a pálca végéhez.

A pálca és a golyó tekinthető egyetlen merev testnek. Mivel a golyó tömege elhanyagolható, a teljes tehetetlenségi nyomaték megegyezik az m tömegű, ℓ hosszúságú homogén pálca saját (a tömegközéppontjára vonatkoztatott) tehetetlenségi nyomatékával:

$$\Theta = \tfrac{1}{12} m\ell^2. \tag{1}$$

A súrlódásmentességnek köszönhetően a pálca tömegközéppontja függőlegesen lefelé mozog, a pálca alsó végpontja pedig vízszintesen elcsúszik. Ha a becsapódás pillanatában a tömegközéppont sebessége v, a pálca szögsebessége pedig ω, akkor – az energiamegmaradás törvénye szerint – fennáll:

$$mg\frac{\ell}{2} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2. \tag{2}$$

Tudjuk még, hogy a pálca elcsúszó végének függőleges irányú sebessége mindvégig nulla, tehát a pálca becsapódásának pillanatában is

$$v - \frac{\ell}{2}\omega = 0. \tag{3}$$

Az (1), (2) és (3) egyenletekből kapjuk, hogy

$$mg\frac{\ell}{2} = \frac{1}{2}m\left(\frac{\omega\ell}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}\,m\ell^2\omega^2,$$

$$g = \omega^2\ell\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right),$$

tehát

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{\ell}}.$$

A golyó becsapódási sebessége a pálca végpontjának sebességével egyezik meg:

$$v_1 = v + \frac{\ell}{2}\omega = \ell\omega = \sqrt{3g\ell}.$$

II. eset. Az m_0 tömegű golyó nincs rögzítve a pálcához, ezért annak megmozdulása után leesik a pálcáról és ℓ magasságból szabadon esik. A becsapódás v_2 sebességére fennáll:

$$m_0 g\ell = \frac{1}{2}m_0v_2^2, \qquad \text{azaz} \qquad v_2 = \sqrt{2g\ell}.$$

Látható, hogy $v_1 > v_2$, tehát az *első* esetben csapódik a golyó nagyobb sebességgel az asztallapra.

Kovács Kinga (Kecskemét, Katona J. Gimn., 11. évf.)

42 dolgozat érkezett. Helyes 22 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 8, hiányos (1–2 pont) 8, hibás 2, nem versenyszerű 2 dolgozat.

P. 5385. *Hányadrészére csökken az ablakon kiszökő hőáram, ha az egyrétegű, $d_{üveg} = 3$ mm vastag üvegből készült ablakot ugyanilyen üvegtáblából készült, kétrétegű ablakra cseréljük, melynek üvegei között $d_{levegő} = 7$ mm-es levegőrés van? A levegő és az üveg hővezetési tényezője $\kappa_{levegő} = 0{,}025$ W/(m K) és $\kappa_{üveg} = 1{,}2$ W/(m K).*

(*4 pont*) Példatári feladat nyomán

Megoldás. A hővezetés törvénye szerint

$$I_Q = \Delta T\,\frac{A\kappa}{d},$$

ahol $I_Q = \frac{Q}{t}$ az időegységenként átadott hő, $\Delta T = T_{\text{szoba}} - T_{\text{külső}}$ a hőmérséklet-különbség, A a felület nagysága, d a réteg vastagsága, κ pedig a hőátadást biztosító anyag hővezetési tényezője.

Megjegyzés. A hővezetési törvény alakilag nagyon hasonlít az elektromos vezetőkre alkalmazott Ohm-törvényre. A hőáram megfelelője az elektromos áramerősség, a hőmérséklet-különbség megfelelője a potenciálkülönbség (feszültség), az $\frac{A\kappa}{d}$ mennyiségnek pedig az elektromos ellenállás reciproka (a vezetőképesség) felel meg.

Az egyrétegű ablak esetében a hőáram

$$I_Q^{(1)} = A\Delta T\,\frac{\kappa_{\text{üveg}}}{d_{\text{üveg}}}.$$

A „kétrétegű" ablak (ami az üvegek közötti levegővel együtt tulajdonképpen háromrétegű) három sorosan kapcsolt „ellenállásnak" is tekinthető, és így

$$I_Q^{(2)} = A\Delta T\,\frac{1}{\frac{2d_{\text{üveg}}}{\kappa_{\text{üveg}}} + \frac{d_{\text{levegő}}}{\kappa_{\text{levegő}}}}.$$

A kérdéses hányados:

$$\frac{I_Q^{(2)}}{I_Q^{(1)}} = \frac{1}{2 + \frac{d_{\text{levegő}}}{d_{\text{üveg}}}\,\frac{\kappa_{\text{üveg}}}{\kappa_{\text{levegő}}}} = \frac{1}{2 + \frac{7}{3}\cdot\frac{1{,}2}{0{,}025}} = \frac{1}{2+112} = \frac{1}{114}.$$

A kétrétegű ablak tehát nem kétszer, hanem 114-szer jobb hőszigetelő, mint az egyrétegű.

Elekes Dorottya (Budapest-Fasori Evangélikus Gimn., 9. évf.)
dolgozata alapján

36 dolgozat érkezett. Helyes 15 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 7, hiányos (1–2 pont) 10, hibás 3, nem versenyszerű 1 dolgozat.

P. 5387. *Egy U_0 üresjárási feszültségű, R_{b} belső ellenállású telepre különböző R nagyságú külső ellenállásokat kapcsolunk.*

a) Mekkora maximális „hasznos" (a külső ellenállásra jutó) teljesítményt nyújthat ez a telep? Milyen R esetén érhetjük el a legnagyobb $P_{\max}$ teljesítményt?

b) Mutassuk meg, hogy bármely, $P_{\max}$-nál kisebb P hasznos teljesítmény két különböző, $R_1 \neq R_2$ nagyságú külső ellenállás esetén is megvalósulhat. Mekkora az R_1 és R_2 számtani, illetve mértani középértéke?

c) Mekkora a fenti két esetben mérhető kapocsfeszültségek összege?

d) Mekkora az R_1, illetve R_2 ellenálláson folyó áramok összege?

e) Az energialeadás hatásfokát a hasznos teljesítmény és a telep által leadott összes teljesítmény hányadosaként értelmezzük. Mekkora a fenti két eset hatásfokának összege?

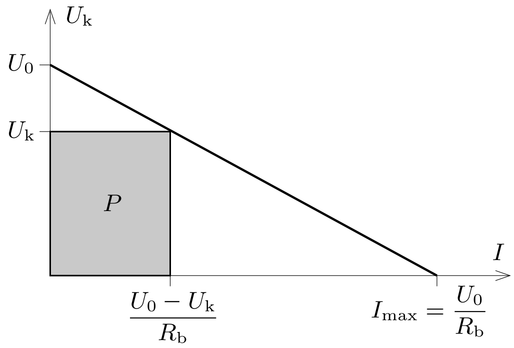
(*4 pont*) Közli: *Siposs András,* Budapest

Megoldás. *a*) Belátjuk, hogy a hasznos teljesítmény akkor a legnagyobb, amikor a külső ellenállásra jutó feszültség (a kapocsfeszültség) megegyezik a belső ellenállás feszültségével, vagyis $U_\mathrm{k} = U_\mathrm{b} = U_0/2$.

Ábrázoljuk az U_k kapocsfestültséget a terhelő áram (I) függvényében! Mivel

$$U_\mathrm{k} = U_0 - IR_\mathrm{b}, \qquad \text{azaz} \qquad I = \frac{U_0 - U_\mathrm{k}}{R_\mathrm{b}},$$

a függvény grafikonja egy egyenes (az ún. *munkaegyenes*), amelynek tengelymetszetei: U_0 és $I_{\max} = \frac{U_0}{R_\mathrm{b}}$, vagyis rendre az üresjárási feszültség és a rövidzárási áram (*1. ábra*).



1. ábra

A külső ellenállásra jutó teljesítmény általános esetben:

$$P = IU_\mathrm{k} = \frac{U_\mathrm{k}(U_0 - U_\mathrm{k})}{R_\mathrm{b}}, \tag{1}$$

ami az ábrán látható téglalap területével egyezik meg.

Mivel R_b adott érték, a hasznos teljesítmény akkor a legnagyobb, amikor $U_\mathrm{k}(U_0 - U_\mathrm{k})$ maximális. A számtani közép és a mértani közép közötti összefüggés szerint

$$\sqrt{U_\mathrm{k}(U_0 - U_\mathrm{k})} \leqslant \frac{U_\mathrm{k} + (U_0 - U_\mathrm{k})}{2} = \frac{U_0}{2},$$

tehát

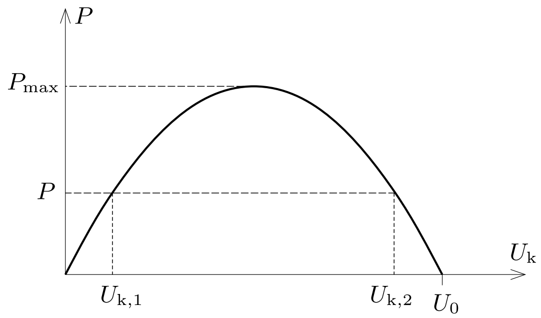
$$P \leqslant \frac{U_0^2}{4R_\mathrm{b}} = P_\mathrm{max}.$$

Az egyenlőség akkor teljesül, ha $U_\mathrm{k} = U_0 - U_\mathrm{k}$, vagyis ha a terhelő ellenállásra jutó kapocsfeszültség megegyezik a belső ellenállásra jutó feszültséggel, tehát ha $IR = IR_\mathrm{b}$, azaz $R = R_\mathrm{b}$.

b) Ábrázoljuk a hasznos teljesítményt a kapocsfeszültség függvényében. Az (1) összefüggés szerint

$$P = -\frac{1}{R_\mathrm{b}}\,U_\mathrm{k}^2 + \frac{U_0\,U_\mathrm{k}}{R_\mathrm{b}},$$

aminek grafikonja egy lefelé nyitott parabola $U_\mathrm{k} = U_0$ és $U_\mathrm{k} = 0$ zérushelyekkel (*2. ábra*).



2. ábra

Láthatjuk, hogy bármely – a maximálisnál kisebb – hasznos teljesítmény két különböző kapocsfeszültség esetén is megvalósulhat. Jelöljük ezt a két feszültséget $U_{\mathrm{k},1}$-gyel és $U_{\mathrm{k},2}$-vel. Ezekhez (lásd az 1. ábrát) különböző I_1 és I_2 áramerősség tartozik. A megfelelő terhelő ellenállások (R_1 és R_2) is különbözőek lesznek, hiszen $P = I_1^2 R_1 = I_2^2 R_2$ miatt

$$\frac{R_1}{R_2} = \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^2 \neq 1.$$

A terhelő ellenállás és a teljesítmény közötti kapcsolat:

$$P = \left(\frac{U_0}{R + R_\mathrm{b}}\right)^2 R,$$

amit algebrai átalakítások után így is felírhatunk:

$$R^2 - \left(\frac{U_0^2}{P} - 2R_\mathrm{b}\right) R + R_\mathrm{b}^2 = 0.$$

Adott P esetén a fenti egyenlet R-re nézve másodfokú, melynek gyökei R_1 és R_2. A gyökök és az együtthatók közötti összefüggés szerint

$$R_1 + R_2 = \frac{U_0^2}{P} - 2R_\mathrm{b}, \qquad \text{illetve} \qquad R_1 R_2 = R_\mathrm{b}^2,$$

vagyis a két különböző terhelő ellenállás számtani középértéke

$$A=\frac{R_1+R_2}{2}=\frac{U_0^2}{2P}-R_\mathrm{b},$$

a mértani középértékük pedig

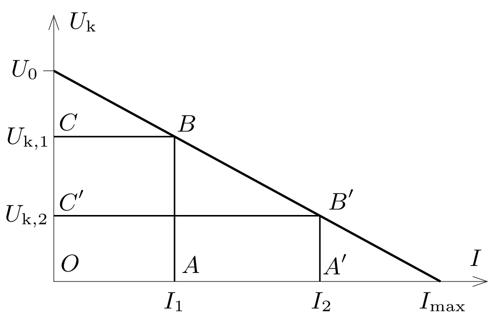
$$G=\sqrt{R_1R_2}=R_\mathrm{b}.$$

Az ismert $A\geqslant G$ egyenlőtlenség szerint

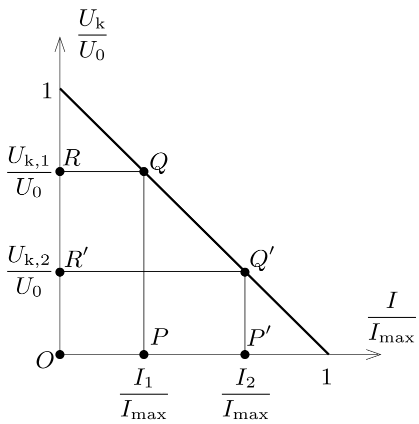
$$\frac{U_0^2}{2P}-R_\mathrm{b}\geqslant R_\mathrm{b},\qquad \text{azaz}\qquad P\leqslant\frac{U_0^2}{4R_\mathrm{b}}=P_\mathrm{max},$$

ahogy ezt már korábban beláttuk.

c) Térjünk vissza a kapocsfeszültség és az áramerősség 1. ábrán látható kapcsolatához. Ha adott U_0 és R_b mellett kétféle módon is megvalósul a hasznos teljesítmények egyenlősége, akkor a *3. ábrán* látható $OABC$ és $OA'B'C'$ téglalapok területe megegyezik.



3. ábra



4. ábra

Ha mind az áramerősséget, mind pedig a kapocsfeszültséget elosztjuk a maximális értékükkel, és az ezek közötti kapcsolatot ábrázoljuk (*4. ábra*), akkor a munkaegyenes meredeksége -1 lesz, miközben a két téglalap területe továbbra is egyenlő marad, hiszen

$$\frac{U_\mathrm{k,1}}{U_0}\cdot\frac{I_1}{I_\mathrm{max}}=\frac{U_\mathrm{k,2}}{U_0}\cdot\frac{I_2}{I_\mathrm{max}}=\frac{P}{U_0I_\mathrm{max}}.$$

A 4. ábra szimmetriájából következik, hogy az egyforma területű $OPQR$ és az $OP'Q'R'$ téglalap egybevágó, egymásból 90°-os elforgatással kapható meg. Ezek szerint

$$\frac{U_\mathrm{k,1}}{U_0}+\frac{U_\mathrm{k,2}}{U_0}=1,$$

vagyis a két esetben mérhető kapocsfeszültségek összege éppen az U_0 üresjárati feszültséggel egyezik meg.

d) Ugyancsak a 4. ábráról olvashatjuk le, hogy

$$\frac{I_1}{I_{\max}} + \frac{I_2}{I_{\max}} = 1,$$

tehát az ugyanakkora hasznos teljesítményhez tartozó áramerősségek összege a rövidzárási árammal egyenlő:

$$I_1 + I_2 = I_{\max} = \frac{U_0}{R_\mathrm{b}}.$$

e) A hasznos teljesítmény és a telep által leadott teljesítmény hányadosa (a hatásfok):

$$\eta = \frac{IU_\mathrm{k}}{IU_0} = \frac{U_\mathrm{k}}{U_0}.$$

A két eset hatásfokának összege (a *c*) kérdésre adott választ felhasználva):

$$\eta_1 + \eta_2 = \frac{U_{\mathrm{k},1}}{U_0} + \frac{U_{\mathrm{k},2}}{U_0} = 1.$$

Schmercz Blanka (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 11. évf.) dolgozatának felhasználásával

26 dolgozat érkezett. Helyes 19 megoldás. Hiányos (2–3 pont) 5, hibás 2 dolgozat.

P. 5388. *Egy* 15 mW*-os lézer* $\lambda = 632{,}8$ nm *hullámhosszú, lineárisan polarizált fénye egy* 2 mm *átmérőjű körkörös apertúrán lép ki a lézer dobozából.*

a) Mekkora az elektromos térerősség maximális értéke a lézernyalábban?

b) Mekkora az impulzusa a lézernyaláb 1 méter *hosszú darabjának?*

(*4 pont*) Példatári feladat nyomán

Megoldás. *a*) A lézernyaláb $s = 1$ m hosszúságú utat

$$t = \frac{s}{c} = \frac{1\ \mathrm{m}}{3\cdot 10^8\ \mathrm{m/s}} = 3{,}33\cdot 10^{-9}\ \mathrm{s}$$

idő alatt tesz meg. Ennyi idő alatt a P teljesítményű lézer

$$W = P\,t = \left(15\cdot 10^{-3}\ \mathrm{W}\right)\cdot\left(3{,}33\cdot 10^{-9}\ \mathrm{s}\right) = 5\cdot 10^{-11}\ \mathrm{J}$$

elektromágneses energiát bocsát ki. A nyaláb 1 méter hosszú, 3,14 mm^2 keresztmetszetű darabjának térfogata $V_0 = 3{,}14\cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^3$.

A lézernyaláb energiasűrűsége (térfogategységre jutó energiája)

$$w = \frac{W}{V_0} = \frac{5\cdot 10^{-11}\ \mathrm{J}}{3{,}14\cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^3} = 1{,}59\cdot 10^{-5}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}.$$

Az energiasűrűség kifejezhető a lineárisan polarizált fény elektromos térerősségének maximális értékével is:

$$w=\frac{1}{2}\varepsilon_0\,E_{\max}^2.$$

Megjegyzés. Az elektromágneses síkhullám energiasűrűsége egy adott $\boldsymbol{r}$ helyen

$$w(\boldsymbol{r})=\frac{1}{2}\varepsilon_0\,E^2(\boldsymbol{r})+\frac{1}{2}\varepsilon_0\,c^2B^2(\boldsymbol{r})=\varepsilon_0\,E^2(\boldsymbol{r}).$$

A lineárisan polarizált síkhullámban az elektromos térerősség

$$E(\boldsymbol{r})=E_{\max}\cdot\sin\frac{2\pi}{\lambda}x$$

módon változik, így az átlagos értéke:

$$w_{\text{átlag}}=\varepsilon_0\,E_{\max}^2\cdot\left(\sin^2\frac{2\pi}{\lambda}x\right)_{\text{átlag}}=\frac{1}{2}\varepsilon_0\,E_{\max}^2.$$

Ha a lézerfény cirkulárisan poláros, abban az elektromos térerősség nagysága a nyaláb mentén nem változik, így az energiasűrűség a fenti érték kétszerese lenne.

A nyalábban az elektromos térerősség maximális értéke a fentiek szerint:

$$E_{\max}=\sqrt{\frac{2w}{\varepsilon_0}}=1{,}9\cdot10^3\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}=1{,}9\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{mm}}.$$

b) A lézerfény fotonjainak energiája:

$$E_{\text{foton}}=\frac{hc}{\lambda}=\frac{\left(6{,}63\cdot10^{-34}\ \mathrm{Js}\right)\left(3\cdot10^8\ \mathrm{m/s}\right)}{632{,}8\cdot10^{-9}\ \mathrm{m}}=3{,}14\cdot10^{-19}\ \mathrm{J}.$$

A nyaláb 1 méter hosszú darabjában lévő fotonok száma:

$$n=\frac{W}{E_{\text{foton}}}=\frac{5\cdot10^{-11}\ \mathrm{J}}{3{,}14\cdot10^{-19}\ \mathrm{J}}=1{,}59\cdot10^8.$$

Minden foton

$$P_{\text{foton}}=\frac{h}{\lambda}=1{,}05\cdot10^{-27}\ \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}$$

impulzussal rendelkezik, így a nyaláb 1 méter hosszú darabjának összimpulzusa:

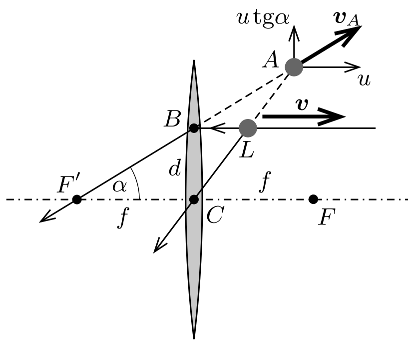
$$P_{\text{összes}}=n\cdot P_{\text{foton}}=1{,}66\cdot10^{-19}\ \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}.$$

Albert Máté (Szeged, SZTE Gyak. Gimn. és Ált. Isk., 11. évf.) és
Szabó Márton (Szeghalom, Péter András Gimn. és Koll., 11. évf.)
dolgozata alapján

13 dolgozat érkezett. Helyes 6 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 2, hiányos (1–2 pont) 4, hibás 1 dolgozat.

P. 5389. *Egy (pontszerűnek tekinthető) légy repül állandó v sebességgel az f fókusztávolságú lencse optikai tengelyével párhuzamosan, attól d távolságra. Legalább mekkora nagyságú a légy és a légy képének relatív sebessége?*

(*5 pont*) *Észtországi versenyfeladat* nyomán



1. ábra

Megoldás. Többféle lehetőséget fogunk vizsgálni. Kezdjük azzal, amikor gyűjtőlencsénk van, és a légy (L) a lencse B pontjától indulva v sebességgel repül jobbra (*1. ábra*). Ameddig a légy a fókusztávolságnál közelebb van még a lencséhez, az A kép látszólagos (virtuális), és az $F'B$ egyenesen mozog ugyancsak jobb felé. Jelöljük az A pont sebességének az optikai tengellyel párhuzamos komponensét u-val. Mivel az $F'B$ egyenes meredeksége

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{BC}{F'C} = \frac{d}{f},$$

az A pont sebességvektorának az optikai tengelyre merőleges irányú komponense $u\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

A légy sebességvektora: $\boldsymbol{v} = (v, 0)$, a képé pedig $\boldsymbol{v}_A = (u, u\,\mathrm{tg}\,\alpha)$. A légy és a légy képének relatív sebessége

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_A = (v-u, -u\,\mathrm{tg}\,\alpha).$$

Keressük azt az u-t, amire a relatív sebesség nagysága, vagyis

$$v_{\mathrm{rel}} = |\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}| = \sqrt{(v-u)^2 + (u\,\mathrm{tg}\,\alpha)^2}$$

a lehető legkisebb. Ezt deriválással könnyen meg lehet kapni, de elemi módszerekkel is célhoz érhetünk, ha v_{rel} helyett

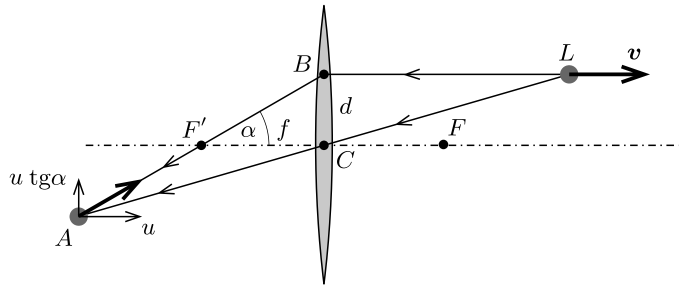
$$v_{\mathrm{rel}}^2 = (v-u)^2 + (u\,\mathrm{tg}\,\alpha)^2 \equiv (1+\mathrm{tg}^2\,\alpha)u^2 - 2vu + v^2$$

legkisebb értékét keressük meg. Ez u-nak másodfokú kifejezése, aminek minimuma teljes négyzetté alakítással is meghatározható. Mivel $\mathrm{tg}\,\alpha = d/f$, ezt kapjuk:

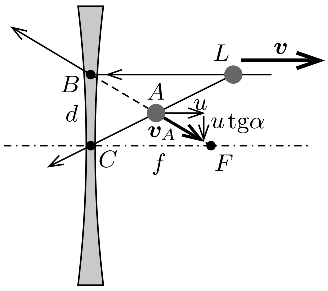
$$v_{\mathrm{rel}}^2 = \left(u\frac{\sqrt{f^2+d^2}}{f} - \frac{vf}{\sqrt{f^2+d^2}}\right)^2 + v^2\frac{d^2}{f^2+d^2} \geqslant \left(v\frac{d}{\sqrt{f^2+d^2}}\right)^2,$$

vagyis a légynek és a virtuális képének relatív sebessége legalább $vd/\sqrt{f^2+d^2}$.

Amikor a légy már távolabb került a lencsétől, mint annak fókusztávolsága, az A kép valódivá válik (*2. ábra*). Az A pont sebességét most is $(u, u\,\mathrm{tg}\,\alpha)$ alakban írhatjuk fel, éppen úgy, mint a látszólagos kép esetében. A relatív sebességet és annak legkisebb értékét is ugyanazok az összefüggések határozzák meg, és így ebben a tartományban is v_{rel} legkisebb értéke $vd/\sqrt{f^2+d^2}$.



2. ábra



3. ábra

Vizsgáljuk meg most a szórólencse esetét (*3. ábra*)! A légy képe – a légy helyzetétől függetlenül – mindig látszólagos, és a sebességvektora így adható meg:

$$\boldsymbol{v}_A=(u,-u\operatorname{tg}\alpha),\quad \text{ha}\quad \boldsymbol{v}=(v,0).$$

A relatív sebesség ebben az esetben

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_A=(v-u,u\operatorname{tg}\alpha),$$

aminek abszolút értéke:

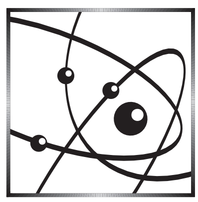
$$v_{\mathrm{rel}}=\sqrt{(v-u)^2+(u\operatorname{tg}\alpha)^2}.$$

Ennek a minimumát keressük u függvényében. Látjuk, hogy ez a kifejezés ugyanaz, mint amit a gyűjtőlencsénél kaptunk, így a legkisebb értéke is ugyanakkora, nevezetesen $vd/\sqrt{f^2+d^2}$.

Gábriel Tamás (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

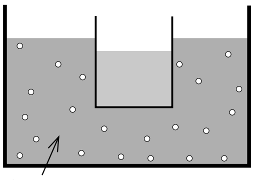
13 dolgozat érkezett. Helyes Antalóczy Szabolcs, Biebel Botond, Gábriel Tamás, Kertész Balázs és Téglás Panna megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 1, hiányos (2–3 pont) 6, nem versenyszerű 1 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok



M. 414. Mérjük meg a csúszási súrlódási együttható értékét több, különböző finomságú csiszolópapír és egy fahasáb között!

(*6 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Biatorbágy



G. 781. Forraljunk vizet egy nagy lábosban a tűzhelyen. Tegyünk egy vékonyfalú pohárba csapvizet, majd merítsük a forrásban lévő vízbe úgy, hogy az sehol se érintkezzen a lábos falával. Felforr-e a pohárban a víz, ha elegendően hosszú ideig várunk?

(*3 pont*)

G. 782. Egy kerékpár egyenletesen, 3 m/s sebességgel halad vízszintes úton. Kerekeinek átmérője 70 cm. Ábrázoljuk a kerék különböző helyzeteiben az egyik kerületi pont sebességvektorait és gyorsulásvektorait egy-egy közös pontból indulva, azaz készítsük el a sebesség- és gyorsuláshodográfokat.

(A hodográfról rövid cikk olvasható a KöMaL honlapján.*)

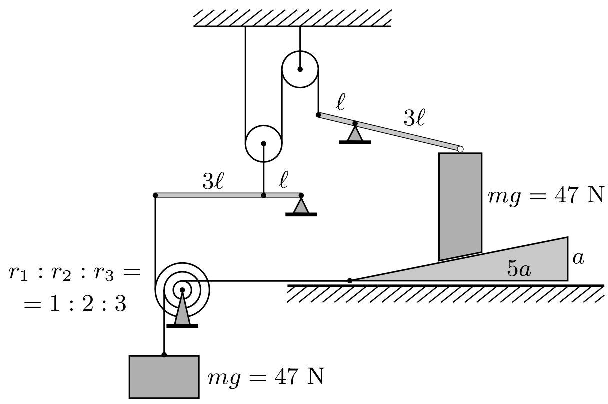
(*4 pont*) *Vermes Miklós* feladata nyomán

G. 783. Egy homogén, n törésmutatójú, R sugarú üveggömb középpontjában pontszerű fényforrás helyezkedik el. A gömböt kívülről nézzük. Hol látjuk a fényforrás képét?

(*3 pont*)

G. 784. Az *alábbi ábrán* egyszerű gépek kavalkádját láthatjuk. A súrlódás, valamint a csigák és emelők tömege elhanyagolható. Melyik irányba indul el a legalsó test?

(*4 pont*)



P. 5409. A *fenti ábrán* egyszerű gépek kavalkádját láthatjuk. A súrlódás, valamint a csigák és emelők tömege elhanyagolható. Mekkora erő ébred a fonalakban?

(*4 pont*) *Holics László* feladata nyomán

* `https://www.komal.hu/cikkek/cikklista.h.shtml`

P. 5410. A vándorsólyom szárnycsapások nélkül is képes megtenni nagyobb távolságokat. Ilyenkor a mozgása két részből áll. Az első részben kiterjesztett szárnyakkal körözve emelkedik egy fölfelé áramló meleg levegőoszlopban (termikben) v_1 függőleges sebességgel. A második részben a termiket elhagyva a vízszintessel α szöget bezárva állandó sebességgel siklik a következő, L távolságra lévő termikig. A v_2 siklási sebesség jó közelítéssel egyenesen arányos a siklás vízszintessel bezárt α szögének szinuszával: $v_2 = k \sin\alpha$, ahol k egy ismert állandó.

a) Legalább milyen magasra kell a madárnak emelkednie a termikben, hogy egy emelkedésből és egy siklásból álló mozgás a legrövidebb ideig tartson?

b) Legalább mennyi időre van szüksége a vándorsólyomnak, hogy az egyik termik aljától eljuthasson a másik termik aljáig?

c) Határozzuk meg az optimális menetidejű mozgáshoz tartozó siklási szöget!

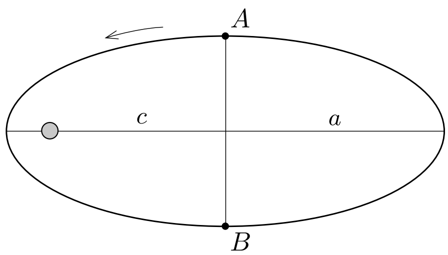
Adatok: $v_1 = 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $k = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $L = 2$ km.

(*5 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

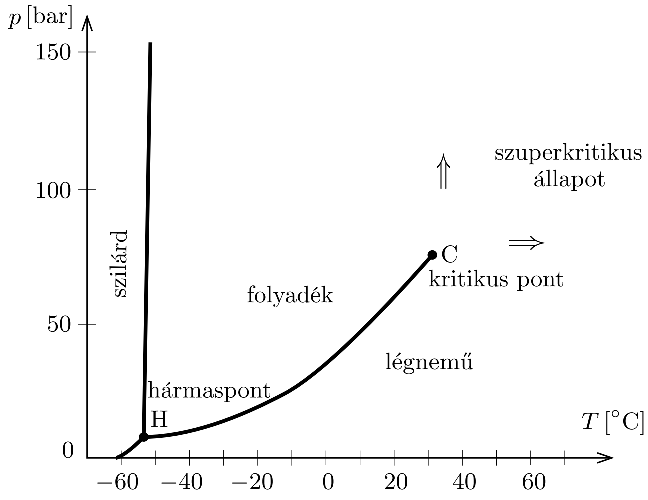
P. 5411. A Föld körül egy műhold $c/a = e$ numerikus excentricitású ellipszispályán kering, keringési ideje T. Mennyi idő alatt ér a műhold az *ábrán* jelölt A pontból a B pontba?

(*4 pont*)

Közli: *Szász Krisztián,* Budapest

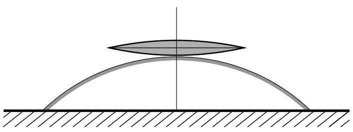


P. 5412. Ha egy gázt (állandó nyomás mellett) lehűtünk, akkor elegendően alacsony hőmérsékleten a gáz általában cseppfolyósodik (kondenzálódik, lecsapódik). Ez azonban csak bizonyos nyomástartományban történik így. Az *ábra* a szén-dioxid „fázisdiagramját" mutatja. Legalább, illetve legfeljebb mekkora nyomás mellett történik meg a cseppfolyósodás a fenti módon? Mi történik, ha a hűtést ennél a tartománynál magasabb, illetve alacsonyabb nyomáson végezzük?



(Lásd még „A gőz, gáz és a kritikus hőmérséklet” c. rövid cikket a KöMaL honlapján*.)

(*3 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

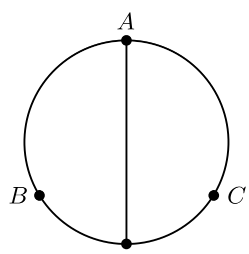


P. 5413. Egy 20 cm fókusztávolságú gyűjtőlencsét az *ábra* szerint egy domború gömbtükörre helyezünk. Mekkora legyen a tükör görbületi sugara, hogy a lencsére függőlegesen érkező, párhuzamos fénynyaláb a rendszerről való visszaverődés után is párhuzamos maradjon?

(*4 pont*) *Példatári feladat nyomán*

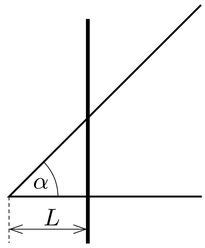
P. 5414. Fémdrótból egy R sugarú kört formáztunk, és ugyanebből a drótból az egyik átmérőt is elkészítettük. Mekkora legyen az $AB=AC$ ívek hossza, hogy az A és B pontok között mérhető eredő ellenállás megegyezzen a B és C pontok között mérhető eredő ellenállással?

(*4 pont*) Közli: *Gáspár Merse Előd,* Budapest



* `https://www.komal.hu/cikkek/cikklista.h.shtml`

P. 5415. Egy elhanyagolható ellenállású, szigetelés nélküli huzalból, a vízszintes síkban elhelyezkedő, $\alpha = 45°$-os szöget bezáró, V alakot hajlítunk. Ezt az elrendezést olyan mágneses mezőbe helyezzük, melynek $\boldsymbol{B}$ indukcióvektora merőleges a vízszintes síkra, és nagysága a $B(t) = B_0/t_0 \cdot t$ összefüggés szerint változik az időben, ahol B_0 és t_0 ismert állandók. A V alakú vezetőre szigetelés nélküli, kezdetben rögzített fémrudat helyezünk az *ábrának* megfelelő módon. A rúd egységnyi hosszúságú darabjának ellenállása r.



a) Mennyi hő fejlődik a fémrúdban t_0 idő alatt?

b) A bekapcsolástól ($t = 0$ időpillanat) számított t_0 időpillanatban a mágneses indukció változása megszűnik. Ebben a pillanatban az eddig rögzített fémrudat a vízszintes síkban, a fémrúdra merőlegesen v_0 sebességgel mozgatni kezdjük. Mekkora legyen ez a sebesség, hogy a rúdban folyó áram erőssége ne változzon?

c) Hányszor több hő fejlődik a fémrúdban a mozgatás során, mint a rögzített helyzetben, ha a fémrudat $2t_0$ hosszú ideig mozgatjuk?

(*5 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

P. 5416. Egy 1,1 nm hosszúságú, hozzá képest elhanyagolható szélességű és vastagságú térrészben öt elektron van. Ebben a térrészben a potenciális energia nulla, ezen kívül nagyon nagy. (Az elektronok egymással való kölcsönhatásától eltekinthetünk.)

a) Mekkora a rendszer elektronjainak gerjesztéséhez szükséges minimális energia?

b) Mekkora hullámhosszúságú elektromágneses hullám képes ezt a gerjesztést létrehozni? Hol a helye ennek az elektromágneses hullámnak a spektrumban?

(*5 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

P. 5417. Vízszintes talajon álló R sugarú, elhanyagolható tömegű keskeny hengeres abroncs tetejére kis méretű, m tömegű nehezéket helyezünk (de nem erősítjük hozzá), és a rendszert a labilis egyensúlyi helyzetéből kimozdítjuk. Az egyre gyorsabban guruló abroncsról a kis test valahol lerepül.

a) Legalább mekkora az érintkező felületek között a tapadási súrlódási együttható, ha a mozgás során sem a kis test az abroncson, sem az abroncs a talajon nem csúszik meg?

b) Hol fog földet érni a lerepülő kis test?

(*6 pont*) Közli: *Balogh Péter,* Gödöllő

❄

Beküldési határidő: 2022. június 15.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 72. No. 5. May 2022)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition C (see page 289): **Exercises up to grade 10: C. 1721.** Bonnie listed 2022 numbers such that the ratio of the second number divided by the first number equals the third number on the list, and so on, for example, the seventh number equals the ratio of the sixth number divided by the fifth. What is the last number on Bonnie's list if the first number is 20, and the second number is 22? **C. 1722.** In a quadrilateral $ABCD$, sides AD and DC are equal in length. If α denotes the angle DAB then $\angle ABC = 2\alpha$, $\angle BCD = 3\alpha$ and $\angle CDA = 4\alpha$. Prove that side AB is twice as long as side AD. (*German competition problem*) **Exercises for everyone: C. 1723.** Determine all at most four-digit numbers $\overline{abcd}$ of distinct digits (allowing $a = 0$, too) for which $9 \cdot \overline{abcd} = \overline{acbcd}$. (Proposed by *A. Siposs,* Budapest) **C. 1724.** In a triangle ABC, $\angle CAB = 30^\circ$. Find the measures of the other angles of the triangle, given that the median drawn from vertex C encloses an angle of 45° with line AB. **C. 1725.** Let p denote a positive prime number. Given that the roots of the equation $x^2 - px - 580p = 0$ are integers, find the value of p. (Proposed by *M. Szalai,* Szeged) **Exercises upwards of grade 11: C. 1726.** Prove that if x, y, z are real numbers such that $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} = 1$, then $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} = 0$. Find all real numbers satisfying this condition. **C. 1727.** In a solid sphere of radius R, a cylindrical bore of radius $r < R$ is made along a line passing through its centre. Express the volume of the remaining solid in terms of the height m of the remaining solid. (Proposed by *B. Szabó,* Miskolc, 1986)

New exercises – competition B (see page 290): **B. 5246.** There are 14 people sitting around a table. Each of them is wearing either a blue shirt or a yellow shirt. What is the maximum possible number of people who have adjacent neighbors with shirts of different color? (*3 points*) **B. 5247.** The ends of a rope are fixed to the ground at two points separated by a distance shorter than the length of the rope. The rope will become taut if its midpoint is raised to a height of 150 cm. The rope will also become taut if a point of the rope 90 cm from one end is raised to a height of 90 cm. How long is the rope? (*3 points*) **B. 5248.** Solve the following simultaneous equations over the set of real numbers: $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} + x + y = \frac{8}{xy}$, $x(x+1) + y(y+1) = 6$. (*4 points*) **B. 5249.** Let T_0 denote the area of the triangle formed by the points of tangency of the inscribed circle of triangle ABC on the sides, and let T_1 denote the area of the triangle formed by the centres of the escribed circles. Show that the geometric mean of T_0 and T_1 equals the area of triangle ABC. (*5 points*) (Proposed by *P. Bártfai*) **B. 5250.** Prove that for all non-negative integers n, $2^{2^n(n-2)+n+2} \leqslant (2^n)! \leqslant 2^{2^n(n-1)+1}$. (*5 points*) (Proposed by *I. Blahota,* Nyíregyháza) **B. 5251.** The vertices of a rectangle $ABCD$ in the coordinate plane are $A(0,0)$, $B(2022,0)$, $C(2022,2)$, $D(0,2)$. Consider those triangles of unit area that have all three vertices at lattice points lying on the longer sides of the rectangle. These triangles are to be coloured so that no triangles of the same colour have an interior point in common. What is the minimum number of colours needed? (*5 points*) (Proposed by *Z. L. Nagy* Budapest) **B. 5252.** A polyhedron $ABCA_1B_1C_1$ has six vertices. Faces ABC and $A_1B_1C_1$ are triangles. The edges AA_1, BB_1 and CC_1 are parallel. Faces AA_1B_1B, BB_1C_1C and CC_1A_1A are trapeziums in which the diagonals intersect at points P, Q and R, respectively. Show that the volumes of polyhedra $ABCPQR$ and $A_1B_1C_1PQR$ are equal. (*6 points*) (Proposed by *Sz. Kocsis,* Budapest) **B. 5253.** Is it true that if $\binom{n}{k}$

is even, then the k-element subsets of an n-element set S can be paired up so that the symmetric difference of every pair should have exactly 2 elements? (*6 points*)

New problems – competition A (see page 291): **A. 827.** Let $n>1$ be a given integer. In a deck of cards the cards are of n different suites and n different values, and for each pair of a suite and a value there is exactly one such card. We shuffle the deck and distribute the cards among n players giving each player n cards. The players' goal is to choose a way to sit down around a round table so that they will be able to do the following: the first player puts down an arbitrary card, and then each consecutive player puts down a card that has a different suite and different value compared to the previous card that was put down on the table. For which n is it possible that the cards were distributed in such a way that the players cannot achieve their goal? (The players work together, and they can see each other's cards.) (Proposed by *Anett Kocsis,* Budapest) **A. 828.** Triangle ABC has incenter I and excircles Ω_A, Ω_B, and Ω_C. Let ℓ_A be the line through the feet of the tangents from I to Ω_A, and define lines ℓ_B and ℓ_C similarly. Prove that the orthocenter of the triangle formed by lines ℓ_A, ℓ_B, and ℓ_C coincides with the Nagel point of triangle ABC. (The Nagel point of triangle ABC is the intersection of segments AT_A, BT_B, and CT_C, where T_A is the tangency point of Ω_A with side BC, and points T_B and T_C are defined similarly.) (Proposed by *Nikolai Beluhov,* Bulgaria) **A. 829.** Let G be a simple graph on n vertices with at least one edge, and let us consider those $S:\, V(G)\to\mathbb{R}^{\geqslant 0}$ weighings of the vertices of the graph for which $\sum\limits_{v\in V(G)} S(v)=1$. Furthermore define $f(G)=\max\limits_{S}\min\limits_{(v,w)\in E(G)} S(v)S(w)$, where S runs through all possible weighings. Prove that $f(G)=\frac{1}{n^2}$ if and only if the vertices of G can be covered with a disjoint union of edges and odd cycles. ($V(G)$ denotes the vertices of graph G, $E(G)$ denotes the edges of graph G.)

Problems in Physics

(see page 313)

M. 414. Measure the coefficient of kinetic friction between several sheets of sandpaper with different grit sizes and a wooden block.

G. 781. Boil water in a large pot on the stove. Put some cool water in a thin-walled glass, then immerse the glass of water into the boiling water so that it does not touch the walls of the pot. Will the water in the glass boil if we wait for a long enough time? **G. 782.** A bicycle is moving uniformly along a horizontal path at a speed of 3 m/s. Its wheels have a diameter of 70 cm. Choose an arbitrary point on the circumference of the wheel and at different positions of the wheel draw the velocity vectors and the acceleration vectors of this point starting from one common point for each quantity, that is draw the velocity and acceleration hodographs. **G. 783.** There is a point-like light source at the centre of a uniform glass ball of radius R and of refractive index n. The sphere is observed from the outside. Where do we see the image of the light source? **G. 784.** The *figure* shows a whole range of simple machines. Friction and the masses of pulleys and levels are negligible. Into which direction will the lowermost object start moving?

P. 5409. The *figure* shows a whole range of simple machines. Friction and the masses of pulleys and levels are negligible. What are the values of the tension in the threads? **P. 5410.** The peregrine falcon can travel long distances without flapping its wing. Doing so, its movement has two parts. In the first part, it circles with its wings extended and rises in an upward flowing column of warm air (thermals) at a vertical speed of v_1. In the second part, it leaves the thermal at an angle of α with respect to the horizontal and glides at a constant speed to the next thermal at a distance of L. The glide speed v_2 is approximately directly proportional to the sine of the angle α (the direction of glide with the horizontal): $v_2 = k \sin \alpha$, where k is a known constant. *a*) To what minimum height must a peregrine rise in the thermal so that the time of its rising and gliding motion should be the shortest possible? *b*) At least how much time is needed for the peregrine to move from the bottom of a thermal to the bottom of the next thermal? *c*) Determine the glide angle which belongs to the motion with the optimal flight time. *Data:* $v_1 = 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $k = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $L = 2$ km. **P. 5411.** A satellite orbits the Earth in an elliptical orbit of numerical eccentricity $c/a = e$, with a period of T. How long does it take for the satellite to go from point A to point B, shown in the *figure?* **P. 5412.** If a gas is cooled (at constant pressure), then at a sufficiently low temperature the gas will usually liquefy (condense). However, this only happens over a certain pressure range. The *figure* shows the "phase diagram" of carbon dioxide. What are the values of the minimum and the maximum pressure at which this condensation can occur as described above? What happens if cooling is carried out at pressures higher or lower than this range? (Translation of the labels in the figure is as follows: légnemű = gas, folyadék = liquid, szilárd = solid, hármaspont = triple point, kritikus pont = critical point, szuperkritikus állapot = supercritical fluid.) **P. 5413.** A converging lens with a focal length of 20 cm is placed on a convex spherical mirror as shown in the *figure.* What should the radius of curvature of the mirror be in order that a vertical parallel beam of light incident on the lens remain parallel after reflection from the system? **P. 5414.** We formed a circle of radius R from a piece of metal wire and from the same wire we made one of the diameters of the circle as well. What should the length of the arcs $AB = AC$ be in order that the equivalent resistance between points A and B be the same as the equivalent resistance between points B and C? **P. 5415.** From a piece of wire of negligible resistance a V shaped figure was bent. The wire has no insulation, the angle between the two parts of the V is $\alpha = 45^\circ$. It is placed horizontally into a magnetic field whose induction $\boldsymbol{B}$ is perpendicular to the plane of the wire. The magnitude of this induction $\boldsymbol{B}$ changes with time according to $B(t) = B_0/t_0 \cdot t$, where B_0 and t_0 are known constants. A metal rod, also without insulation, is placed onto the V shaped wire, initially it is fixed, as shown in the *figure.* The resistance of a unit length of the rod is r. *a*) How much heat is produced in the metal rod in a time of t_0? *b*) At time t_0 from the moment of switching on (time $t = 0$), the change in magnetic induction ceases. At this instant we begin to move the metal rod (which was fixed till this time) in the horizontal plane and perpendicularly to the rod at a constant speed of v_0. What should this speed be in order that the value of the current in the rod should not change? *c*) By what factor will the heat produced in the moving rod be greater than that produced in a static rod, if the rod is moved for a time of $2t_0$? **P. 5416.** There are five electrons in a region of length 1.1 nm with respect to which the width and thickness of the region is negligibly small. The potential energy in this region is zero, and outside it is very big. We can neglect the interaction of the electrons with each other. *a*) What is the minimum energy required to excite the electrons in the system? *b*) What is the wavelength of the electromagnetic wave that can produce this excitation? Where is this electromagnetic wave in the spectrum? **P. 5417.** A small body of mass m is placed (but not fixed) onto the top of a thin cylindrical ring of radius R and of negligible mass being at rest on the horizontal ground. The system is displaced from its unstable equilibrium position. As the ring rolls faster and faster, the small body flies off somewhere. *a*) What is the least value of the coefficient of static friction between the surfaces in contact if neither the small body on the ring nor the ring on the ground is skidding during the motion? *b*) Where will the small object hit the ground?