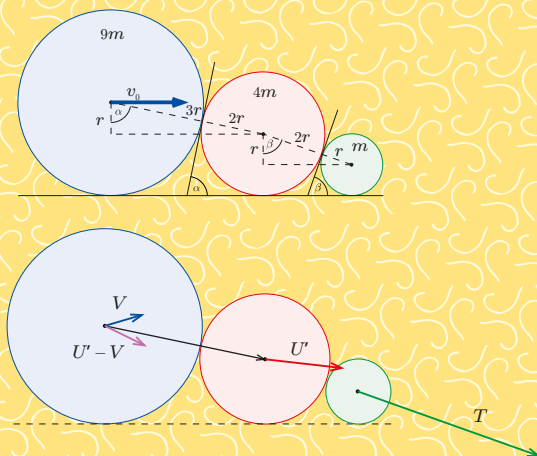


Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok

Informatika rovattal

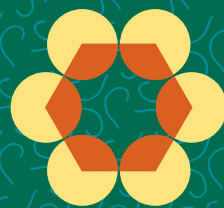
Ábra a P.5566-os fizika feladathoz



Képek a *Rejtvények, ördöglakatok* cikkhez



Az IMO első három feladatának megoldása | Kincsek a
KöMaL múltjából, Erdős Pál cikke | Ifjú Fizikusok
Nemzetközi Versenye: felhívás és beszámoló | Gráffal
modellezhető játékok | Versenynaptár



KöMaL

74. évfolyam
7. szám
2024.
október



Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenye 2024., Budapest



KöMaL Nyári Tábor 2024., Dombóvár



Élménybeszámoló és további képek a novemberi számban!



KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: ARANY DÁNIEL 1894-ben

74. évfolyam 7. szám

Budapest, 2024. október

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta. ÁRA: 1450 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

Kós Géza: A 65. Nemzetközi Matematikai Diák- olimpia feladatainak megoldása, I.	402
Vígh Viktor: Rejtvények, ördöglakatok	406
Kincsek a KöMaL múltjából	409
Németh László: Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire	417
Kozma Katalin Abigél: Megoldásvázlatok a 2024./6. szám matematika gyakorló feladat- sorához	420
Matematika feladatok megoldása (5390.)	429
A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok (824– 828.)	431
A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (827– 828., 1823–1827.)	431
A B pontversenyben kitűzött feladatok (5406– 5413.)	433
Az A pontversenyben kitűzött nehezebb felada- tok (887–889.)	434
Informatikából kitűzött feladatok (635–638.) ..	435
Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenye, Versenyfel- hívás és beszámoló	441
Mérési feladatok megoldása (430.)	443
Fizika gyakorlatok megoldása (855., 856.)	446
Fizika feladatok megoldása (5547., 5548., 5555., 5566)	449
Fizikából kitűzött feladatok (434., 861–864., 5589–5597.)	457
Problems in Mathematics	461
Problems in Physics	463

Főszerkesztő: KORÁNDI JÓZSEF
Fizikus szerkesztő: VANKÓ PÉTER
Műszaki szerkesztő: FRIED KATALIN
Borító: BURGHARDT ZSUZSA
Kiadja: MATFUND ALAPÍTVÁNY
Alapítványi képviselő: KÓS RITA
Felelős kiadó: KATONA GYULA
Nyomda: OOK-PRESS Kft.
Felelős vezető: SZATHMÁRY ATTILA
INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A matematika bizottság vezetője:
HERMANN PÉTER

Tagjai: BÁN-SZABÓ ÁRON, BÍRÓ BÁLINT,
GYENES ZOLTÁN, HUJTER BÁLINT,
IMOLAY ANDRÁS, KISS GÉZA, KÓS GÉZA,
KOZMA KATALIN ABIGÉL, LOVAS MÁRTON,
ÖKÖRDI PÉTERNÉ, PACH PÉTER PÁL,
PAULOVICS ZOLTÁN, RATKÓ ÉVA,
SZMERKA GERGELY, SZTRANYÁK ATTILA,
VÍGH VIKTOR

A fizika bizottság tiszteletbeli elnöke:
HOLICS LÁSZLÓ

Vezetője:
SZÉCHENYI GÁBOR

Tagjai: BARANYAI KLÁRA, GNÄDIG PÉTER,
HONYEK GYULA, OLOSZ BALÁZS, SZÁSZ
KRISZTIÁN, VÍGH MÁTÉ, VLADÁR KÁROLY,
WOYNAROVICH FERENC

Az informatika bizottság vezetője:
SCHMIEDER LÁSZLÓ

Tagjai: LÓCZI LAJOS, SIEGLER GÁBOR,
TÓTH TAMÁS

Fordítók: GYENES ZOLTÁN, TASNÁDI ANIKÓ

Nyelvi korrektork: ANDICS ÁGNES

Szerkesztőségi titkár: ONDINÉ SZABÓ SÁRA

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest,
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
Telefon: +36 20 320-1143
A lap megrendelhető a
<https://komalujzag.myshoprenter.hu>
oldalon keresztül.
Előfizetési díj egy évre: 12 000 Ft
Kéziratokat nem őrzünk meg és nem küldünk vissza.
Minden jog a KöMaL tulajdonosaié.
E-mail: szerk@komal.hu
Internet: <http://www.komal.hu>

This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
1117-Budapest, Hungary
telephone: +36 20 320-1143
or on the Internet:
<https://komalujzag.myshoprenter.hu>
A Lapban megjelenő hirdetések tartalmáért
felelősséget nem vállalunk.



A 65. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldása, I.*

A hagyományoknak megfelelően közöljük a Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldásait. A megoldások leírására idén is a magyar csapat tagjait kértük meg. Közreműködésüket köszönjük, és ezúton is gratulálunk eredményeikhez.

A szerkesztőség

Első nap**

1. feladat. Határozzuk meg az összes α valós számot, amelyre minden pozitív egész n esetén teljesül, hogy n osztja a következő egész számot:

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor.$$

(A $\lfloor z \rfloor$ a legnagyobb egész számot jelöli, amely kisebb vagy egyenlő, mint z . Például $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ és $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2,9 \rfloor = 2$.)

Megoldás (Varga Boldizsár). Belátjuk, hogy a feltételeknek pontosan a páros egész számok felelnek meg. Ezek jók, ugyanis ha α páros egész szám, akkor

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor = \alpha + 2\alpha + \cdots + n\alpha = \alpha \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \left(\frac{\alpha}{2}(n+1) \right) \cdot n,$$

ami osztható n -nel (ugyanis $\frac{\alpha}{2}$ egész).

Most belátjuk, hogy más megoldás nincs. Ehhez legyen $\lfloor \alpha \rfloor = k$. Két esetet különítünk el k paritása szerint.

1. eset: k páros. Ekkor teljes indukcióval belátjuk, hogy $\lfloor n\alpha \rfloor = nk$ minden n pozitív egészre. A $n = 1$ kiinduló esetben ez triviális, mert $\lfloor \alpha \rfloor = k$.

Tegyük fel, hogy minden $m \leq n$ -re már beláttuk, hogy igaz az állítás. Ekkor

$$(n+1)\alpha = n\alpha + \alpha = \lfloor n\alpha \rfloor + \{n\alpha\} + \lfloor \alpha \rfloor + \{\alpha\} = (n+1)k + \{n\alpha\} + \{\alpha\}$$

(kihasználva, hogy az indukciós feltevés miatt $\lfloor n\alpha \rfloor = nk$). Mivel $0 \leq \{n\alpha\}, \{\alpha\} < 1$, ezért $(n+1)k \leq (n+1)\alpha < (n+1)k + 2$, vagyis $\lfloor (n+1)\alpha \rfloor = (n+1)k$ vagy $\lfloor (n+1)\alpha \rfloor = (n+1)k + 1$. Az utóbbi esetben azonban az indukciós feltevést használva

$$\begin{aligned} \lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor (n+1)\alpha \rfloor &= k + 2k + \cdots + nk + (n+1)k + 1 = \\ &= k \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1 = (n+1) \cdot \left((n+2) \cdot \frac{k}{2} \right) + 1, \end{aligned}$$

* Sajnálatos módon szeptemberi számunkban hibásan jelent meg az IMO beszámoló címe. Helyesen: Beszámoló a 65. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról. Az elírásért elnézést kérünk.

** A második nap feladatainak megoldását a novemberi számban közöljük.

ami nem osztható $(n+1)$ -gyel (hiszen 1-gyel nagyobb egy $(n+1)$ -gyel osztható számnál, és $n+1 > 1$), ami ellentmond a feladat feltételeinek. Így csak $\lfloor (n+1)\alpha \rfloor = (n+1)k$ lehet, amivel az indukciós lépést befejeztük.

Ezután, mivel $\lfloor n\alpha \rfloor = nk$ minden pozitív egészre, $n\alpha < nk + 1$ is teljesül, amiből $\alpha < k + \frac{1}{n}$. Mivel $\frac{1}{n}$ tetszőlegesen kis pozitív értéket felvehet, ebből következik, hogy $\alpha \leq k$, és mivel $\lfloor \alpha \rfloor = k$, ez csak úgy lehet, ha $\alpha = k$, vagyis α páros egész szám.

2. eset: k páratlan. Ekkor azt látjuk be indukcióval, hogy $\lfloor n\alpha \rfloor = n(k+1) - 1$. Ez $n = 1$ -re megint csak teljesül, mert $\lfloor \alpha \rfloor = k$. Tegyük fel, hogy n -ig már minden pozitív egészre beláttuk az állítást.

Az előzőhöz hasonló gondolatmenettel $\lfloor (n+1)\alpha \rfloor = \lfloor n\alpha \rfloor + \lfloor \alpha \rfloor = n(k+1) - 1 + k = (n+1)(k+1) - 2$ vagy $\lfloor (n+1)\alpha \rfloor = \lfloor n\alpha \rfloor + \lfloor \alpha \rfloor + 1 = (n+1)(k+1) - 1$. Előbbi esetben azonban az indukciós feltevést használva

$$\begin{aligned} & \lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor + \lfloor (n+1)\alpha \rfloor = \\ & = ((k+1) - 1) + (2(k+1) - 1) + \cdots + (n(k+1) - 1) + ((n+1)(k+1) - 2) = \\ & = (k+1) \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{2} - (n+2) = \\ & = (n+1) \cdot \left((n+2) \cdot \frac{k+1}{2} - 1 \right) - 1, \end{aligned}$$

ami nem osztható $(n+1)$ -gyel, hiszen egy $(n+1)$ -gyel osztható számnál 1-gyel kisebb, és ez ellentmond a feladat feltételeinek. Ezzel befejeztük az indukciós lépést, $\lfloor n\alpha \rfloor = n(k+1) - 1$ minden n pozitív egészre.

Így tehát $n\alpha \geq n(k+1) - 1$ is fennáll minden n pozitív egészre, vagyis $\alpha \geq k + 1 - \frac{1}{n}$. Mivel $\frac{1}{n}$ tetszőlegesen kicsi lehet, ebből következik, hogy $\alpha \geq k+1$, ami ellentmond annak, hogy $\lfloor \alpha \rfloor = k$, vagyis ebben az esetben nincs megoldás.

Ezzel beláttuk, hogy α csak páros egész szám lehet, és azok tényleg mind megfelelőek.

2. feladat. Határozzuk meg az összes, pozitív egészekből álló (a, b) számpárt, melyre léteznek g és N pozitív egészek úgy, hogy

$$\text{luko}(a^n + b, b^n + a) = g$$

teljesül minden $n \geq N$ egészre. (Az x és y egész számok legnagyobb közös osztóját $\text{luko}(x, y)$ jelöli.)

Megoldás (Tarján Bernát). Megmutatjuk, hogy csak az $a = b = 1$ számpárra igaz az állítás.

Tekintsük az a, b, N, g számoknak egy olyan megválasztását, amelyre teljesül a feladat feltétele, és legyen $m = ab + 1$. Vegyük észre, hogy m relatív prím a -hoz és b -hez, ezért léteznek olyan a^{-1} és b^{-1} maradékok m -mel osztva, amelyekre $a^{-1} \cdot a \equiv 1$ és $b^{-1} \cdot b \equiv 1 \pmod{m}$. Továbbá, az Euler–Fermat tétel miatt $a^{k \cdot \varphi(m)} \equiv b^{k \cdot \varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ bármely nemnegatív egész k -ra, ahol $\varphi(m)$ az m -nél nem nagyobb, m -hez relatív prím pozitív egészek száma.

Vizsgáljunk egy olyan $n = k \cdot \varphi(m) - 1$ alakú egész számot, amelyre $n \geq N$. Vegyük észre, hogy

$$a^n + b \equiv a^{-1}a(a^n + b) = a^{-1}(a^{k \cdot \varphi(m)} + ab) \equiv a^{-1}(1 + ab) = a^{-1}m \equiv 0 \pmod{m},$$

és ugyanígy $b^n + a \equiv 0 \pmod{m}$, tehát az m közös osztója az $a^n + b$ és $b^n + a$ számoknak. A feltétel a szerint legnagyobb közös osztó g , ezért $m \mid g$.

Most vizsgáljunk egy olyan $n = k \cdot \varphi(m)$ alakú számot, amelyre $n \geq N$. A feltétel szerint $a^n + b$ és $b^n + a$ legnagyobb közös osztója g , ezért $m \mid g \mid a^n + b$ és $m \mid g \mid b^n + a$. Ismét az Euler–Fermat tételt alkalmazva,

$$a^n + b = a^{k \cdot \varphi(m)} + b \equiv 1 + b \pmod{m}$$

és ugyanígy $b^n + a \equiv 1 + a \pmod{m}$, tehát $m \mid b + 1$ és hasonlóan $m \mid a + 1$.

Mivel $m \mid b + 1$, az is igaz, hogy $m = ab + 1 \leq b + 1$, de akkor $a = 1$. Hasonlóan láthatjuk, hogy $m = ab + 1 \leq a + 1$, tehát csak $b = 1$ lehet. Így csak az $a = b = 1$ számpár lehet megoldás.

Az $a = b = 1$ pár és $g = 2$ valóban megoldás, mert $a^n + b = b^n + a = 2$, így valóban $\text{lko}(a^n + b, b^n + a) = g$ minden n -re.

3. feladat Legyen $a_1, a_2, a_3, \dots$ pozitív egészek egy végtelen sorozata, valamint legyen N egy pozitív egész. Tegyük fel, hogy minden $n > N$ esetén a_n megegyezik azzal a számmal, ahányszor a_{n-1} az $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ sorozatban szerepel.

Bizonyítsuk be, hogy $a_1, a_3, a_5, \dots$ és $a_2, a_4, a_6, \dots$ sorozatok valamelyike egy idő után periodikus.

(A $b_1, b_2, b_3, \dots$ végtelen sorozat egy idő után periodikus, ha léteznek p és M pozitív egészek, melyekre $b_{m+p} = b_m$ minden $m \geq M$ esetén.)

Hivatalos megoldás. Legyen $M > \max(a_1, \dots, a_N)$.

Először belátjuk, hogy van olyan egész szám, amely végtelen sokszor fordul elő a sorozatban. Ha ugyanis nem lenne ilyen, akkor tetszőlegesen nagy egész szám előfordulhatna (hiszen véges sok, egy bizonyos számnál kisebb szám csak véges sok lehet). Márpedig mindannyiszor, ahányszor egy M -nél nagyobb szám először megjelenik, azt 1 követi. Tehát az 1 végtelen sokszor fordul elő, ami ellentmond annak, hogy nincs végtelen sokszor előforduló szám.

Most belátjuk, hogy minden $x \geq M$ egész szám legfeljebb $(M - 1)$ -szer fordul elő. Ha ugyanis nem így lenne, akkor lenne olyan szám, amely legalább M -szer szerepel. Tekintsük az első olyan alkalmat, amikor valamely x éppen M -edszerre fordul elő. Eddig a tagig x -et minden esetben olyan szám előzte meg, amelyből azt megelőzőleg $x (\geq M)$ darab volt a sorozatban. Eszerint legalább M olyan szám van a sorozatban, amely legalább M alkalommal fordult elő, mielőtt x megjelent volna M -edszer, ami ellentmondás, hiszen x -et úgy választottuk, hogy az a legelső olyan szám, amely M -edszerre jelent meg.

Eszerint véges sok olyan szám van, amely végtelen sokszor szerepel a sorozatban. Jelölje k a legnagyobbat közülük. Mivel k végtelen sokszor szerepel, így végtelen sok olyan M -nél nagyobb számnak kell lennie, amely legalább k -szor fordul elő a sorozatban (a k -t megelőző számok), vagyis 1-től $(k - 1)$ -ig az összes természetes szám ugyanígy végtelen sokszor fordul elő. Azonban $k + 1$ csak véges sokszor szerepel, vagyis csak véges sok szám fordul elő k -nál többször. Jelölje l azt a legnagyobb számot, amely k -nál többször szerepel. Erre $l \geq k$, hiszen k -ig minden szám legfeljebb $(k - 1)$ -szer fordul elő. A továbbiakban nevezzünk egy x pozitív egész számot

nagynak, ha $x > l$, közepesnek, ha $l \geq x > k$ és kicsinek, ha $x \leq k$. Összefoglalva tehát: kis számokból végtelen sok van a sorozatban, nagyokból legfeljebb k .

Válasszunk egy elegendően nagy $N' > N$ számot úgy, hogy $a_{N'}$ kicsi, továbbá az $a_1, \dots, a_{N'}$ tagok között

- minden közepes szám minden előfordulása szerepelt már;
- minden kis szám többször szerepelt már, mint $\max(k, N)$.

Mivel minden kis szám k -nál többször szerepelt, ezután minden kis számot nagy szám követ. Továbbá, definíció szerint, minden nagy szám legfeljebb k -szor jelenik meg, vagyis az ilyeneket kis szám követi. Eszerint a sorozat az $a_{N'}$ tagot követően felváltva áll kis és nagy számokból.

1. lemma. *Legyen g egy olyan nagy szám, amely megjelenik $n_{N'}$ után. Ha g -t a h kis szám követi, akkor h azon kis számok számával egyenlő, amelyek eddig legalább g -szer szerepeltek.*

Bizonyítás. Az N' index definíciója szerint a kis szám, amely g -t követi több mint $\max(k, N)$ alkalommal fordult elő, tehát $g > \max(k, N)$. Továbbá, mivel $g > N$, minden kis szám g -edik előfordulása az N -edik tag után következik be, tehát g követi. Mivel pedig a kis számok száma k , és g pedig legfeljebb k -szor fordul elő, így g pontosan k -szor kell, hogy szerepeljen, és mindig egy a_N utáni kis számot követ. Vagyis g -nek a h -adik előfordulása előtt pontosan h darab kis szám szerepelt már. $\square$

Jelölje $a_{[i,j]}$ az $a_i, a_{i+1}, \dots, a_j$ részsorozatot.

2. lemma. *Ha i és j olyan indexek, amelyekre teljesül, hogy*

- $j > i > N' + 2$,
- a_i és a_j is kis szám és egyenlők,
- semmilyen kis szám nem fordul elő egynél többször az $a_{[i,j-1]}$ -ben,

akkor a_{i-2} valamely $a_{[i,j-1]}$ -beli kis számmal egyenlő.

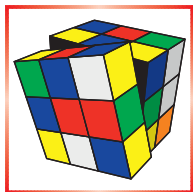
Bizonyítás. Jelöljük $\mathcal{I}$ -vel azon kis számok halmazát, amelyek legalább a_{i-1} -szer szerepelnek az $a_{[1,i-1]}$; illetve $\mathcal{J}$ -vel azon kis számokét, amelyek legalább a_{j-1} -szer fordulnak elő az $a_{[1,j-1]}$ részsorozatban. Akkor az 1. lemma alapján $a_j = |\mathcal{J}|$, ezért a (b) feltétel szerint $|\mathcal{I}| = |\mathcal{J}|$, továbbá $\mathcal{I}$ és $\mathcal{J}$ definíciója miatt $a_{i-2} \in \mathcal{I}$ és $a_{j-2} \in \mathcal{J}$.

Tegyük most fel, hogy az a_{j-2} kis szám nincs az $\mathcal{I}$ halmazban. Ez azt jelentené, hogy a_{i-1} -nél kevesebbszer szerepelt az $a_{[1,i-1]}$ részsorozatban. A (c) feltétel szerint a_{j-2} legalább a_{i-1} -szer fordult elő az $a_{[1,j-1]}$ -ben, tehát $a_{j-1} \leq a_{i-1}$. Tekintetbe véve azt, hogy $a_{[1,i-1]} \subset a_{[1,j-1]}$, ez azt jelenti, hogy $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$. Viszont mivel $a_{j-2} \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{I}$, ez ellentmond annak, hogy $|\mathcal{I}| = |\mathcal{J}|$. Ezért $a_{j-2} \in \mathcal{I}$, így tehát legalább a_{i-1} -szer szerepel az $a_{[1,i-1]}$ -ben, és még egyszer az $a_{[i,j-1]}$ -ben. Tehát $a_{j-1} > a_{i-1}$.

A (c) feltétel szerint bármely kis szám, amely legalább a_{j-1} -szer szerepel az $a_{[1,j-1]}$ -ben, legalább $a_{j-1} - 1 \geq a_{i-1}$ alkalommal fordult elő az $a_{[1,i-1]}$ -ben. Vagyis $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$, amiből $\mathcal{I} = \mathcal{J}$, tehát $a_{i-2} \in \mathcal{J}$, ezért legalább még $a_{j-1} - a_{i-1} = 1$ alkalommal szerepel az $a_{[i,j-1]}$ -ben. $\square$

Minden olyan kis a_n számra, amelyre $n > N' + 2$ teljesül, legyen p_n a legkisebb olyan szám, amelyre $a_{n+p_n} = a_i$ is kis szám valamely i -re, ahol $n \leq i < n + p_n$. Más szóval, legyen $a_{n+p_n} = a_i$ a legelső olyan kis szám, amely kétszer fordul elő a_{n-1} -et követően. Ha $i > n$ lenne, akkor a 2. lemma alapján ($j = n + p_n$ szereposztással) a_{i-2}

ismét előfordulna a_{n+p_n} előtt, ami ellentmond annak, hogy p_n volt a legkisebb ilyen tulajdonságú szám. Vagyis $i = n$. A 2. lemmából az is következik, hogy $p_n \geq p_{n-2}$. Eszerint $p_n, p_{n+2}, p_{n+4}, \dots$ sorozat nem csökkenő sorozat, felülről korlátos (egy korlát a $2k$, hiszen csak k darab kis szám van). Ezért a $p_n, p_{n+2}, p_{n+4}, \dots$ sorozat egy tagtól kezdve konstans, és ettől kezdve a kis számok sorozata periodikus, mégpedig legfeljebb k a periódusa.



Rejtvények, ördöglakatok

Rovatunkban minden hónapban valamilyen szórakoztató matematikai fejtörőt mutatunk be. Ezek között fontos helyet foglalnak el a különböző kirakós játékok, topológiai feladványok, ördöglakatok és a matematikát felhasználó bűvészműtátrányok.

Manapság szinte mindent meg lehet találni az interneten, de az igazi élményt az adja, ha a feladatokat magunk oldjuk meg, a bűvészműtátrányok trükkjeit mi találjuk ki, és a szükséges kellékeket is mi tervezzük meg és készítjük el. Próbáljuk meg a feladatokat továbbgondolni, általánosítani, igyekezzünk új feladatokat kitalálni.

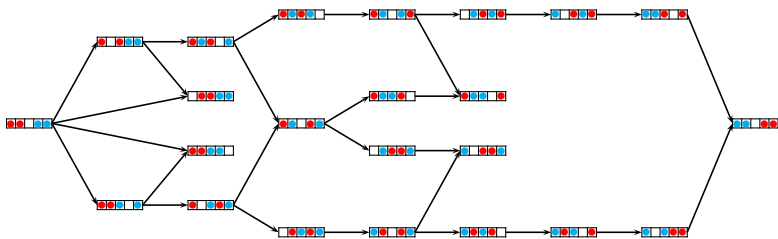
A szeptemberi számban bemutatott feladványok (Logi-toli és két átkelés a folyón típusú rejtvény) mind az ún. sorozatos mozgaton alapuló logikai játékok kategóriájába tartoznak. Ezek fontos közös tulajdonsága, hogy jól megkülönböztethető állapotokkal rendelkeznek, amelyek között a szabályokban definiált átmenetek vannak, amiket általában lépésnek nevezünk. A cél, hogy egy előre meghatározott állapotból (kezdőállapot, vagy kezdőállás) egy szintén jól meghatározott másik állapotba (végállapot, végállás) jussunk szabályos lépések sorozatával.

Az ilyen játékok mind természetes módon leírhatók egy gráffal: a lehetséges állapotok a gráf csúcsai, és két csúcsot akkor kötünk össze éllel, ha van közöttük lépés. Általában a lépések megfordíthatók, ezért elegendő irányítatlan gráfot használnunk. Nem megfordítható lépések esetén irányított gráfot definiálunk.

1. Békaugratás

Mutatunk egy egyszerű példát egy játék gráfjára. Tekintsünk egy 1×5 méretű négyzetrácsot, amelynek a bal oldali két mezőjében egy-egy piros (P), a jobb oldali két mezőjében egy-egy kék (K) béka csücsül, a középső mező kezdetben üres (Ü). A piros békák jobbra haladnak, a kékék pedig balra. Egy lépésben egy béka átugorhat az előtte lévő üres mezőre, vagy átugorhatja az előtte levő mezőn csücsülő békát, ha a kettővel előtte lévő mező üres. A célunk, hogy a piros és a kék békák helyet cseréljenek. A szabályok alapján könnyen felrajzolhatjuk a játék gráfját, amely most irányított, hiszen a békák hátrafelé nem ugranak.

Megfigyelhetjük, hogy a gráf szimmetrikus – ez nem nagy meglepetés, hiszen a játékban is szimmetrikus a piros és a kék békák szerepe. A játék végigjátszása – feladat megoldása – azt jelenti, hogy találunk irányított utat a kiindulási helyzetből a célként megjelölt állapotba. Észrevehetjük, hogy bizonyos, elvileg létező állapotok nincsenek a gráfban, pl. ÜKKPP vagy ÜPKKP. Ezek a kezdőállapotból



1. ábra. Színes békák helycseréje

nem érhetők el, ezért általában nem tekintjük a játék gráfjához tartozóknak őket, de speciális elemzéseknél szükséges lehet hozzávenni.

Hasonlóan egyszerű a káposzta, a kecske és a farkas átszállítási problémájának a gráfja, biztatjuk az olvasót, hogy rajzolja fel. Talán az egyetlen apróbb furfang, hogy nem szabad megfeledkezni az élekről sem, amikor egy már átvitt állatot visszahozunk, ezek nélkül a feladat nem oldható meg.

2. Játékok és gráfok

Számtalan olyan – jó és kevésbé jó – játék létezik, amelyikhez gráfot rendelhetünk. Tulajdonképpen minden labirintus ilyen: a gráf csúcsai itt az elágazások, az éleknek pedig a folyosók felelnek meg. Kellően nagy labirintus (kellően nagy gráf) esetén a teljes képet egyben látva sem feltétlen könnyű két pont között utat találni. Ez a probléma a különböző gráfbejárási algoritmusok [1] tanulmányozásához vezet, amivel részletesebben mi itt nem foglalkozunk.

Nehezíthető a feladat, ha nem látjuk egyszerre az egész útvesztőt; egy valódi labirintusban bolyongva mindig ez a helyzet. Ilyenkor már viszonylag kis méretű gráffal is meggyűlhet a bajunk, és sok múlik a labirintus fizikai megvalósításán is (vannak-e jellegzetességek, amik tájékozódási pontként szolgálnak, stb.). Ehhez kapcsolódóan két, kereskedelmi forgalomban is kapható játékot említünk meg, a Cast Plate és a Cast Du-et nevű ördöglakatokat. Mindkét játék gráfja viszonylag kicsi (kb. 30, illetve 60 csúcsú), az útkeresés nehézsége elsősorban a játékok fizikai megvalósításából jön. A játékok részletesebb elemzése, és a gráfjaik rajza megtalálható például a [2] prezentációban.



A [2] prezentáció QR kódja

A fent említett két példa esetében nincs igazán gondolkodásra lehetőség, a megoldás a játék „kifárasztásával” történhet, emiatt ezek az ördöglakatok a gráfjaik ismeretében lényegében érdektelenné válnak. A múlt hónapban feladott Logi-toli és nyolc személyes átkelés gráfja viszonylag nagy, de még mindig „kézzel” is kezelhető. A Logi-toli gráfját már egyáltalán nem triviális megadni. Ha gondolkodás nélkül kezdünk neki, akkor egy $\binom{10}{3} \cdot \binom{7}{3} = 4200$ csúcsú gráfot kezdünk felrajzolni, és menthetetlenül elveszünk. Némi valódi matematikus munkával a csúcsok száma 78-ra redukálható, és ezzel kezelhetővé válik a gráf. Hogy miként,



A logi-toli blog ([3]) QR kódja



2. ábra. Cast Plate. A kép forrása: mypuzzlecollection.blogspot.com



3. ábra. Cast Duet. A kép forrása: mypuzzlecollection.blogspot.com

arról részletesen olvashatunk a [3] cikkben. A gráfból természetesen a megoldás is kiolvasható.

Mindazonáltal a Logi-toli és a nyolc személyes átkelés kétségkívül jó játékok, amik a gráfok ismerete nélkül, logikus gondolkodással is megoldhatók. Például az átkelésnél világos, hogy ha az első átkelő felnőtt az apa (vagy az anya), akkor ő kénytelen a házastársát magával vinni, és utána nincs folytatás, így az első átkelő csak a rendőr lehet, és ő kénytelen a fegyencet is magával vinni. Ezután a rendőr visszatér, és ismét az egyetlen szabályos lehetőség, hogy átvisz egy gyereket, mondjuk egy fiút. Ezután a rendőr a fegyencel együtt kénytelen visszatérni, az apa átviszi a második fiút is, majd visszatér, és átviteti magát az anyával.

Ezen a ponton a „hölgyek” az innesső parton vannak a rendőrrel és a fegyencel, az „urak” a túlparton, a rendőrt és a fegyencet pedig állítsuk rá a tutajra. Ez egy logikailag szimmetrikus állapot: a fiúk és lányok szerepe nyilván felcserélhető, és úgy is gondolhatunk rá, hogy a túlpartról hoztuk a hölgyeket ide. Érdekes megjegyezni azt is, hogy minden lépésünk megfordítható. Innen tehát gondolkozhatunk úgy, hogy mostantól „a hölgyeket visszahordjuk a túlpartra”, vagyis velük a fiúk és apjuk átvitelekor megtett lépéseket tesszük meg visszafelé – és ezzel a játékot megoldottuk. A gráf felrajzolása leginkább abban segíthet ennél a feladványnál, hogy módszeresen haladva, biztosan minden esetre gondoljunk.

3. Játékok óriási gráffal



4. ábra. A tizenötös játék egy (a Logi-tolihoz hasonlóan) Kassa Györgytől származó dizájnya a bal oldalon, egy modern változat a jobban.

A téma két klasszikusával fejezzük be a gráffal modellezhető játékok sorát. A tizenötös játék online is játszható [4], ahogy a Rubik-kocka is – utóbbit azonban senkinek nem javasoljuk, a kézzel tekergetés egészen más élmény. A tizenötös játék története kalandos [5], az 1870–1880-as években óriási népszerűségnek ör-

vedett, és azóta sem merült feledésbe. A Rubik-kocka világsikere a mai napig töretlen [6], ez Magyarországon köztudott.

Mindkét játék úgynevezett permutációjáték, és természetesen mindkettő leírható egy-egy gráffal. Azonban ezek a gráfok már olyan nagyok, hogy felrajzolni őket szinte lehetetlen, a korábbi példákban látott módon nem használhatóak, ezért ezek a feladványok az emberi megoldóknak érdekesek maradtak (de még mennyire!). Ennek ellenére természetesen nem haszontalan a gráfjaik használata, ezek tanulmányozása további érdekes matematikai problémákhoz, fogalmakhoz vezet. Mindkét játék számos kutatást motivált, és motivál a mai napig, ezekkel külön írásban foglalkozunk majd.

4. Néhány kapcsolódó feladat

A bemutatott játékokhoz kapcsolódóan néhány feladványt adunk az érdeklődő olvasóknak.

1. probléma. Általánosítsuk a békaugratós játékot p db piros és k darab kék békára. (A játék kezdetén közöttük mindig egy üres hely van.) Megoldható mindig a feladat? Mit mondhatunk a lépésszámról?

2. probléma. Mutassuk meg, hogy a tizenötös játékban az a kezdőállás, amit a kirakott állapotból a 14-es és a 15-ös elem felcserélésével kapunk, nem megoldható.

3. probléma. Számoljuk meg, hány csúcsa van a tizenötös játék, illetve a Rubik-kocka gráfjának.

Irodalomjegyzék

- [1] <https://hu.wikipedia.org/wiki/Gr%C3%A1fbej%C3%A1r%C3%A1s>
- [2] <https://www.math.u-szeged.hu/~vigvik/morahalom.pdf>
- [3] https://ordoglakat.blog.hu/2012/06/08/logi_toli
- [4] <https://15puzzle.netlify.app/>
- [5] https://en.wikipedia.org/wiki/15_puzzle
- [6] <https://hu.wikipedia.org/wiki/Rubik-kocka>

Vígh Viktor



Kincsek a KöMaL múltjából

Ebben a rovatunkban a KöMaL hasábjain régebben megjelent érdekes, ám feledésbe merült cikkeket, feladatmegoldásokat veszünk elő és mutatjuk be. Felfrissítjük, a mai jelölésmódokhoz, szóhasználathoz igazítjuk a stílusukat, esetenként további gondolatokat fűzünk hozzájuk.

Ezúttal a világhírű matematikus, Erdős Pál emlékének adózunk, aki 14 évesen írta meg a *magasabb rendű számtani sorozatokról* szóló cikkét. (*Erdős Pál: A magasabbrendű számtani sorokról*, KöMaL, 1929/6, február, 187–189. oldal)

Két oka is van annak, hogy ezzel az 1927-ben íródott, 1929 februárjában megjelent cikkel foglalkozunk. Egyrészt az írás két nagyon szép, egyszerű és hasznos eredményt mutat be, amelyek az idők során részben feledésbe merültek – nem épültek be a közoktatásba még tagozatokon sem. Ugyanakkor további érdekes kérdések merülhetnek fel a cikk olvasása során, amelyek egy részét meg is válaszoljuk.

A téma izgalmasságát, érdekességét az is mutatja, hogy két évtizeddel később némileg eltérő tartalommal Koncz Károly is közölt cikket a KöMaL-ban. (*Koncz Károly: Magasabbrendű számtani sorozatokról*, KöMaL, 1950/4, november, 179–191. oldal)

Erdős Pál cikkének lényegén semmit nem változtattunk.

Erdős Pál: A magasabbrendű számtani sorozatokról

Definíció. Elsőrendű aritmetikai (számtani) sorozatnak nevezzük a nem konstans számtani sorozatot.

Egy (a_n) sorozat különbségsorozata (vagy differenciasorozata) az a (Δ_n) sorozat, amelyre $\Delta_k = a_{k+1} - a_k$, második különbségsorozata a különbségsorozatának a különbségsorozata stb.

Definíció. Egy sorozatot másodrendű aritmetikai (számtani) sorozatnak nevezzünk, ha a különbségsorozata elsőrendű aritmetikai (számtani) sorozat, illetve általában n -edrendű aritmetikai (számtani) sorozatnak nevezzük, ha az első differenciasorozata $(n-1)$ -edrendű, második differenciasorozata $(n-2)$ -edrendű stb., $(n-1)$ -edik differenciasorozata pedig elsőrendű aritmetikai (számtani) sorozat.

Jelölés. Az (a_n) sorozat k -adik differenciasorozatát az eredeti cikkben $(\Delta_n^{(k)})$ jelöli. Az egyszerűség kedvéért mi $(a_n^{(k)})$ -val fogjuk jelölni. Így (a_n) – a kiinduló sorozat – jelölhető $(a_n^{(0)})$ módon is.

Definíció. A nem-nulla konstans számtani sorozatot tekinthetjük 0-adrendű aritmetikai sorozatnak. Az n -edrendű aritmetikai sorozatot más szóval magasabbrendű aritmetikai (számtani) sorozatnak nevezzük $(n = 0, 1, 2, \dots)$.

Példa. Legyen (a_n) a köbszámok sorozata. Ekkor

(a_n) :	1	8	27	64	125	216...	
$(a_n^{(1)})$:	7	19	37	61	91...		
$(a_n^{(2)})$:		12	18	24	30...		nem konstans számtani
$(a_n^{(3)})$:			6	6	6...		nem azonosan 0 konstans (számtani)
$(a_n^{(4)})$:				0	0...		azonosan 0 konstans (számtani)

A köbszámok sorozata harmadrendű aritmetikai (számtani) sorozat, mert a második differenciasorozata elsőrendű aritmetikai (nem konstans számtani) sorozat; a harmadik differenciasorozata nem-nulla konstans – 0-adrendű – aritmetikai (számtani) sorozat; a negyedik (és minden további) differenciasorozata konstans 0.

Az alábbi két feladatra keressük a választ.

1. Fejezzük ki az r -edrendű (a_n) aritmetikai (számtani) sorozat n -edik tagját önmaga, illetve differenciasorozatai első tagja segítségével; vagyis az $a_1^{(0)}$, $a_1^{(1)}$, $a_1^{(2)}$, ..., $a_1^{(r)}$, $a_1^{(r+1)}$, ... tagokkal. (Természetesen, mivel a sorozat r -edrendű aritmetikai, az $(r+1)$ -edik és minden további differenciasorozata első tagja 0.)

2. Írjuk fel annak az (S_n) sorozatnak a képletét (hozzárendelési szabályát) szintén (a_n) differenciasorozatai első tagja segítségével, amelynek n -edik tagja az (a_n) r -edrendű aritmetikai sorozat első n tagjának az összege.

Az 1. feladat megoldása. Legyen (a_n) egy legalább elsőrendű aritmetikai sorozat. Írjuk fel (a_n) és a belőle képezhető differenciasorozatok első néhány tagját.

$$\begin{array}{cccccccc}
 a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & \dots \\
 a_1^{(0)} & a_2^{(0)} & a_3^{(0)} & a_4^{(0)} & a_5^{(0)} & a_6^{(0)} & a_7^{(0)} & \dots \\
 & a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & a_4^{(1)} & a_5^{(1)} & a_6^{(1)} & \dots \\
 & & a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & a_4^{(2)} & a_5^{(2)} & \dots \\
 & & & a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} & a_4^{(3)} & \dots \\
 & & & & a_1^{(4)} & a_2^{(4)} & a_3^{(4)} & \dots \\
 & & & & & \ddots & &
 \end{array}$$

Figyeljük meg, hogy

$$\begin{aligned}
 (1) \quad a_1 &= a_1^{(0)} \\
 (2) \quad a_2 &= a_1^{(0)} + a_1^{(1)} \\
 (3) \quad a_3 &= a_2^{(0)} + a_2^{(1)} = (a_1^{(0)} + a_1^{(1)}) + (a_1^{(1)} + a_1^{(2)}) = a_1^{(0)} + 2a_1^{(1)} + a_1^{(2)}, \\
 a_4 &= a_3^{(0)} + a_3^{(1)} = [a_1^{(0)} + 2a_1^{(1)} + a_1^{(2)}] + a_3^{(1)} =
 \end{aligned}$$

$a_3^{(1)}$ az első differenciasorozat – amely maga is egy magasabbrendű aritmetikai sorozat – harmadik tagja, így (3) alapján $a_3^{(1)} = a_1^{(1)} + 2a_1^{(2)} + a_1^{(3)}$:

$$\begin{aligned}
 (4) \quad &= [a_1^{(0)} + 2a_1^{(1)} + a_1^{(2)}] + [a_1^{(1)} + 2a_1^{(2)} + a_1^{(3)}] = a_1^{(0)} + 3a_1^{(1)} + 3a_1^{(2)} + a_1^{(3)}, \\
 a_5 &= a_4^{(0)} + a_4^{(1)} = [a_1^{(0)} + 3a_1^{(1)} + 3a_1^{(2)} + a_1^{(3)}] + [a_1^{(1)} + 3a_1^{(2)} + 3a_1^{(3)} + a_1^{(4)}] = \\
 &= a_1^{(0)} + 4a_1^{(1)} + 6a_1^{(2)} + 4a_1^{(3)} + a_1^{(4)}.
 \end{aligned}$$

Látható, hogy az $a_n^{(0)}$ felírásához a differenciasorozatok első tagjának binomiális együtthatókkal vett szorzatai összegét használjuk, mégpedig a sorozatot magát 0-dik differenciasorozatnak tekintve, az első n (a 0-adiktól az $(n-1)$ -edikig vett) differenciasorozat első tagját.

Azt, hogy ez továbbra is valóban így van, teljes indukcióval látjuk be.

Tegyük fel, hogy az n -edik tag valóban

$$\text{I. } a_n = a_n^{(0)} = \binom{n-1}{0} a_1^{(0)} + \binom{n-1}{1} a_1^{(1)} + \binom{n-1}{2} a_1^{(2)} + \dots + \binom{n-1}{n-1} a_1^{(n-1)}$$

alakban írható fel.

Akkor a sorozat $(n+1)$ -edik tagja az n -edik tag és az első különbségsorozat n -edik tagjának összegeként áll elő. Ám az első különbségsorozat is egy magasabbrendű aritmetikai sorozat, így annak n -edik tagja – az indukciós feltevés szerint – felírható

$$a_n^{(1)} = \binom{n-1}{0} a_1^{(1)} + \binom{n-1}{1} a_1^{(2)} + \dots + \binom{n-1}{n-1} a_1^{(n)}$$

alakban. E két kifejezés összege adja a_{n+1} -et:

$$\begin{aligned} & \binom{n-1}{0} a_1^{(0)} + \binom{n-1}{1} a_1^{(1)} + \binom{n-1}{2} a_1^{(2)} + \dots + \binom{n-1}{n-1} a_1^{(n-1)} + \\ & + \binom{n-1}{0} a_1^{(1)} + \binom{n-1}{1} a_1^{(2)} + \dots + \binom{n-1}{n-2} a_1^{(n-1)} + \binom{n-1}{n-1} a_1^{(n)}. \end{aligned}$$

Mivel $\binom{n-1}{0} = \binom{n}{0}$, $\binom{n-1}{n-1} = \binom{n}{n}$ és $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$ (Pascal tétele), így ez ekvivalens azzal, hogy

$$a_{n+1} = \binom{n}{0} a_1^{(0)} + \binom{n}{1} a_1^{(1)} + \binom{n}{2} a_1^{(2)} + \dots + \binom{n}{n-1} a_1^{(n-1)} + \binom{n}{n} a_1^{(n)},$$

ami éppen az indukciós állítás $(n+1)$ -re felírva. $\square$

Érdemes megjegyezni, hogy ha $n > r$ (azaz egy r -edrendű aritmetikai sorozat r -nél nagyobb indexű tagját írjuk fel), akkor az r -nél nagyobb sorszámú differenciasorozatok első tagja 0, vagyis itt a nemnulla tagok száma legfeljebb $r+1$.

A 2. feladat megoldása. S_n első tagja a_1 , második tagja $S_2 = S_1 + a_2$, ahonnan $S_2 - S_1 = a_1$, illetve általában $S_{n-1} + a_n = S_n$, vagyis $S_n - S_{n-1} = a_n$. Eszerint (a_n) az (S_n) első differenciasorozata – eltekintve attól, hogy a_1 -et nem kapjuk meg két szomszédos (S_n) -beli tag különbségeként. Ezen persze nem nehéz segíteni, bevezetjük az (S_n) sorozat 0-adik tagját, és mivel ekkor $S_1 - S_0 = a_1$ és $S_1 = a_1$, így $S_0 = 0$. (A nullát szokás üres összegnek nevezni.) Nem szabad azonban megfeledkeznünk arról, hogy így az (S_n) sorozat tagjait nem 1-től, hanem 0-tól számozzuk.

Ekkor I. alapján – nem elfelejtve, hogy az (S_n) sorozatban az első tag indexe 0, vagyis nem az n indexű, hanem az $n-1$ indexű tagot adja meg I.

$$S_{n-1} = \binom{n-1}{0} S_0 + \binom{n-1}{1} a_1 + \dots + \binom{n-1}{n-2} a_1^{(n-2)} + \binom{n-1}{n-1} a_1^{(n-1)},$$

ami az n indexű $((n+1)$ -edik) tag:

$$\text{II. } S_n = \binom{n}{0} S_0 + \binom{n}{1} a_1 + \dots + \binom{n}{n-1} a_1^{(n-1)} + \binom{n}{n} a_1^{(n)}.$$

Mivel (S_n) első differenciasorozata az r -edrendű (a_n) aritmetikai sorozat, így (S_n) $(r+1)$ -edrendű aritmetikai sorozatot alkot; az (a_n) -et megelőző magasabbrendű aritmetikai sorozat, amelynek első differenciasorozata (a_n) , így használhatjuk rá az $(a_n^{(-1)})$ jelölést, amely szerint:

$$a_n^{(-1)} = \binom{n}{0} a_1^{(-1)} + \binom{n}{1} a_1^{(0)} + \dots + \binom{n}{n-1} a_1^{(n-1)} + \binom{n}{n} a_1^{(n)}. \quad \square$$

Példák. Számítsuk ki ennek alapján a természetes számok négyzeteinek összegét. A természetes számok négyzetei másodrendű számtani sorozat, mert a differenciasorozata a páratlan számok sorozata (elsőrendű aritmetikai sorozat), így az összege harmadrendű aritmetikai sorozat. (Az első indexet 0-nak véve a sorozat n indexű tagja az első n négyzetszám összegét adja eredményül.) A sorozat első néhány tagja: 0, 1, $1+4=5$, $1+4+9=14$, $1+4+9+16=30$, ...

$$\begin{array}{llllll} (a_n^{(-1)}): & 0 & 1 & 5 & 14 & 30 \dots \\ (a_n^{(0)}): & & 1 & 4 & 9 & 16 \dots \\ (a_n^{(1)}): & & & 3 & 5 & 7 \dots \\ (a_n^{(2)}): & & & & 2 & 2 \dots \end{array}$$

$$\begin{aligned} S_n = a_n^{(-1)} &= \binom{n}{0} \cdot 0 + \binom{n}{1} \cdot 1 + \binom{n}{2} \cdot 3 + \binom{n}{3} \cdot 2 + \underbrace{\dots}_{=0} = \\ &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot n + 3 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + 2 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \\ &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

A természetes számok köbeinek összege (amely negyedrendű aritmetikai sorozat) első néhány tagja 0, 1, $1+8=9$, $9+27=36$, $36+64=100$, $100+125=225$.

Kiszámítva a differenciasorozatokat:

$$\begin{array}{llllll} (a^{(-1)}): & 0 & 1 & 9 & 36 & 100 & 225 \dots \\ (a^{(0)}): & & 1 & 8 & 27 & 64 & 125 \dots \\ (a^{(1)}): & & & 7 & 19 & 37 & 61 \dots \\ (a^{(2)}): & & & & 12 & 18 & 24 \dots \\ (a^{(4)}): & & & & & 6 & 6 \dots, \text{ konstans} \end{array}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \binom{n}{0} \cdot 0 + \binom{n}{1} \cdot 1 + \binom{n}{2} \cdot 7 + \binom{n}{3} \cdot 12 + \binom{n}{4} \cdot 6 + \underbrace{\dots}_0 = \\ &= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Megjegyzések

Erdős Pál: A magasabbrendű számtani sorozatokról című cikkéhez

Erdős Pál cikke két fontos eredményről szól. Az egyik szerint ha ismert egy r -edrendű aritmetikai (számtani) sorozat első r különbségsorozatának első tagja, akkor ezekkel kifejezhető a sorozat n -edik tagja:

$$\text{I. } a_n = a_n^{(0)} = \binom{n-1}{0} a_1^{(0)} + \binom{n-1}{1} a_1^{(1)} + \binom{n-1}{2} a_1^{(2)} + \dots + \binom{n-1}{n-1} a_1^{(n-1)},$$

ahol a kitevőbe zárójelben azt írtuk, hogy hányadik különbségsorozat első tagjáról van szó, és ahol természetesen legfeljebb $r+1$ tag lehet 0-tól különböző (a 0-adik különbségsorozattól az r -edikig), hiszen az r -edik különbségsorozat konstans, ám a továbbiak azonosan nullák.

A fenti kifejezésben a binomiális együtthatók az n polinomjai: az első (a nulladik különbségsorozat első tagjának együtthatója, konstans 1) nulladfokú, a második (az első különbségsorozat első tagjának együtthatója, $n-1$) elsőfokú és így tovább, az r -edik különbségsorozat első tagjának együtthatója n -nek r -edfokú polinomja. Az (a_n) -et megadó képlet tehát n polinomja, és mivel $a_1^{(r)}$ nem nulla, de $a_1^{(r+1)}$ már igen, a legmagasabb fokú tagban az n kitevője r .

Tehát az r -edrendű aritmetikai sorozat „képlete”, vagyis az n -edik (általános) tagját megadó függvény az n -nek r -edfokú polinomfüggvénye.

Természetesen adódik a kérdés: a különbségsorozatok első tagja helyett nem lehetne-e a sorozat első $r+1$ tagjával meghatározni a sorozatot megadó képletet?

Feladat. *Hogyan írható fel egy r -edrendű számtani sorozat általános tagja a sorozat első néhány $(r+1)$ tagja függvényében?*

Elsőként próbálkozhatunk azzal, hogy kifejezzük a differenciasorozatok első tagjait a sorozat első $r+1$ tagjából, hiszen abból I. alapján már meg tudjuk határozni a sorozatot előállító képletet. Anélkül, hogy részletekbe bocsátkoznánk, a cikkben leírtakhoz hasonlóan kapjuk, hogy az n -edik differenciasorozat első tagja

$$\text{I}^*. \quad a_1^{(n)} = \binom{n}{0} a_{n+1}^{(0)} - \binom{n}{1} a_n^{(0)} + \binom{n}{2} a_{n-2}^{(0)} - \dots + \dots + (-1)^{n-k} \binom{n}{n+1-k} a_k^{(0)} + \dots$$

alakban írható fel. Ezután alkalmazva az I. összefüggést, fel tudjuk írni a sorozatot előállító polinomot a sorozat első $r+1$ tagja segítségével.

Ez azonban nagyon komplikáltnak tűnik. Talán van ennél egyszerűbb módszer.

Állítsuk elő a sorozatot meghatározó polinomot tagról tagra úgy, hogy minden lépésben legfeljebb 1-gyel nőjön a polinom fokszáma, és a k -adik polinom az első $1, 2, \dots, k$ -ra az $a_1, a_2, \dots, a_k$ értékeket vegye fel.

Így például a polinom első tagjára $p_1(1) = a_1$ – konstans – teljesül.

Keressük azt a p_2 polinomot, amelyet úgy kapunk, hogy p_1 -hez alkalmas tagot adva 1-ben továbbra is a_1 , 2-ben a_2 legyen a felvett érték. Ehhez az kell, hogy az

a tag, amelyet hozzáadunk p_1 -hez 1-ben 0-t, 2-ben $(a_2 - a_1)$ -et vegyen fel. Ilyen elsőfokú polinom az $(a_2 - a_1)(n - 1)$. Tehát $p_2(n) = a_1 + (a_2 - a_1)(n - 1)$.

A következő, p_3 polinomot úgy kapjuk, hogy p_2 -höz hozzáadunk egy olyan (legfeljebb) másodfokú tagot, amely 1-ben és 2-ben is 0 (hogy az 1-ben és 2-ben felvett érték ne változzon), vagyis valamilyen c konstanssal $c(n - 1)(n - 2)$ alakú, de $p_3(3) = a_3$ legyen. Mivel ekkor $p_3(3) = a_1 + 2(a_2 - a_1) + c \cdot 2$, így $c = \frac{a_3 - 2a_2 + a_1}{2}$ kell legyen, tehát

$$p_3(n) = a_1 + (a_2 - a_1)(n - 1) + \frac{a_3 - 2a_2 + a_1}{2}(n - 2)(n - 1).$$

Hasonlóan kapjuk p_4 -et:

$$p_4(n) = a_1 + \frac{a_2 - a_1}{1}(n - 1) + \frac{a_3 - 2a_2 + a_1}{2}(n - 2)(n - 1) + c(n - 3)(n - 2)(n - 1),$$

és mivel az kell, hogy $p_4(4) = a_4$ legyen, vagyis

$$p_4(4) = a_1 + \frac{a_2 - a_1}{1}(4 - 1) + \frac{a_3 - 2a_2 + a_1}{2}(4 - 2)(4 - 1) + c(4 - 3)(4 - 2)(4 - 1) = a_4,$$

$$\text{innen } c = \frac{a_4 - 3a_3 + 3a_2 - a_1}{6}.$$

Azt látjuk, hogy ismét a binomiális együtthatók segítségével lehet kifejezni a megfelelő együtthatókat. Azt is vegyük észre, hogy a törtek nevezőjében pedig a faktoriálisok szerepelnek. (Ezeket az állításokat ismét teljes indukcióval lehet bizonyítani, ezt azonban az olvasóra bízjuk.) Vagyis az r -edrendű sorozat szabálya az

$$c_1 + \frac{c_2}{1!}(n - 1) + \frac{c_3}{2!}(n - 1)(n - 2) + \frac{c_4}{3!}(n - 1)(n - 2)(n - 3) + \dots$$

összeg első $r + 1$ tagja segítségével adható meg, ahol

$$c_k = \binom{k-1}{0}a_k - \binom{k-1}{1}a_{k-1} + \dots - \dots + (-1)^t \binom{k-1}{t}a_{k-t} + \dots + (-1)^{k-1} \binom{k-1}{k-1}a_1.$$

Például a négyzetek összegéből álló harmadrendű aritmetikai sorozat (1, 5, 14, 30, 55, ...) esetén

$$a_n = 1 + 4(n - 1) + \frac{5}{2}(n - 1)(n - 2) + \frac{2}{6}(n - 1)(n - 2)(n - 3) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{1}{6}.$$

Vegyük észre, hogy I^* . szerint c_k a k -adik differenciasorozat első tagja.

Tehát – úgy tűnik – egy újabb felírását kapjuk a sorozatot előállító képletnek:

$$a_n = \frac{a_1^{(0)}}{0!} + \frac{a_1^{(1)}}{1!}(n - 1) + \frac{a_1^{(2)}}{2!}(n - 1)(n - 2) + \frac{a_1^{(3)}}{3!}(n - 1)(n - 2)(n - 3) + \dots,$$

de valójában csak ismét megkaptuk az I. összefüggést.

Megjegyezzük, hogy az így megkonstruált polinomot Newton-féle interpolációs polinomnak nevezzük, amely a fent leírtaknál sokkal általánosabban alkalmazható. Ha adott egy függvény $n + 1$ (különböző) helyen felvett értéke, akkor létezik – és egyértelműen meghatározott – egy olyan legfeljebb n -edfokú polinom, amely az adott helyeken az adott értékeket veszi fel. Tetszőleges sorrendben tekintve a

helyeket, megkonstruálhatók az egyes pontokra illeszkedő polinomok úgy, hogy az első pontra konstans polinomot, az első két pontra (legfeljebb) elsőfokút, az első háromra (legfeljebb) másodfokú polinomot stb. illesztünk. Mindeközben az egyes lépésekben egy-egy taggal gyarapodik a polinom, amelyhez csak egy-egy lineáris egyenletet kell megoldanunk.

Ám ha már eljárásokról beszélünk és a sorozatot (polinom)függvényként tekintjük, akkor alkalmas függvénytranszformációk sorozatával lépcsőről lépésre 1-gyel csökkentve a polinom fokszámát eljutunk egy (az eljárás során kiszámítható) konstans polinomig, majd a transzformációs lépéseket visszafelé elvégezve megkapjuk az eredeti polinomot. Ezt egy példán mutatjuk be.

Legyen a sorozatot meghatározó hozzárendelés az $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$, de tegyünk úgy, mintha ezt nem ismernénk, csak azt tudjuk, hogy másodfokú – ezt kell meghatároznunk a hozzá tartozó sorozat első három tagja alapján: $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $a_3 = 13$.

Célunk, hogy $f(x)$ -en olyan függvénytranszformációt végezzünk, hogy $xf_1(x)$ alakúra hozzuk, így f_1 fokszáma 1-gyel kisebb, mint f -é. Mivel $xf_1(x)$ a 0-ban 0-t vesz fel, így $f(x)$ grafikonját úgy transzformáljuk, hogy átmenjen a $(0;0)$ ponton. Tudjuk, hogy $f(1) = 1$, ezért az f grafikonját eltoljuk az y tengely irányában (-1) -gyel és az x tengely irányában is (-1) -gyel (összességében a $(-1; -1)$ vektorral). Az x tengely irányú (-1) -gyel való eltolás az $f(x+1)$ transzformációt, az y tengely irányú (-1) -gyel történő eltolás az $f(x+1) - 1$ transzformációt eredményezi. Ekkor tehát $f(x+1) - 1$ a 0-ban $f(1) - 1 = 0$, vagyis olyan polinomfüggvényt kapunk, amelynek a konstans tagja 0, ezért kiemelhető belőle x :

$$f(x+1) - 1 = xf_1(x).$$

Mivel $f(x)$ másodfokú volt, $f_1(x)$ elsőfokú. Ezután f_1 -en végzünk hasonló transzformációt. Ha $x = 1$, akkor $1 \cdot f_1(1) = \frac{f(1+1)-1}{1} = 4$, eszerint f_1 grafikonját a $(-1; -4)$ vektorral kell eltolnunk, azaz $xf_2(x) = f_1(x+1) - 4$. f_2 konstans polinom, és mivel

$$f_2(1) = \frac{f_1(1+1) - 4}{1} = f_1(2) - 4 = \frac{f(2+1) - 1}{2} - 4 = \frac{f(3) - 1}{2} - 4 = 2,$$

így $f_2(x) = 2$ (maga a 2 konstans függvény). Most végezzük el f_2 grafikonján a transzformációs lépéseket visszafelé: az $f_2(x) = 2$ függvényt x -szel szorozva, majd eltolva az $(1;4)$ vektorral a $2(x-1) + 4 = 2x + 2$ függvényt kapjuk, azután ezt x -szel szorozva, majd $(1;1)$ -gyel eltolva a $2(x-1)^2 + 2(x-1) + 1 = 2x^2 - 2x + 1$ függvényt kapjuk.

Valóban ez volt a sorozatot meghatározó függvény.

Túlzás lenne azt mondani, hogy lezártuk a témát, annál is kevésbé, mert további kérdéseket is fel lehet vetni. Meg lehet például kérdezni, hogy ha ismert az (a_n) magasabbrendű aritmetikai sorozat képlete, akkor ebből hogyan kapható meg az „összessorozat” vagy a különbségsorozat képlete. Ez viszont már egy következő cikk témája. Talán majd újabb évek múlva valaki más újra előveszi ezt a cikket is, és folytatja a gondolatokat...

Fried Katalin

Gyakorló feladatsor

emelt szintű matematika érettségire



I. rész

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán

a) a $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1} = \sqrt{x-4}$ egyenletet,

b) a $4^x - 16 \leq 6 \cdot 2^x$ egyenlőtlenséget. (12 pont)

2. A H halmaz elemei azok a kétjegyű pozitív egész számok, amelyekben az első számjegy négyzetéből kivonva a második számjegy négyzetét a két szám összegét vagy különbségét kapjuk.

a) Elemeinek felsorolásával adjuk meg a H -t.

b) Számítsuk ki a H elemeinek átlagát, szórását, mediánját, alsó és felső kvartilisét. (12 pont)

3. a) Mutassuk meg, hogy ha n páratlan természetes szám, akkor $n^3 + 11n$ osztható 12-vel.

b) Igazoljuk, hogy az ABC háromszög derékszögű, ha a csúcsainak koordinátái a derékszögű koordináta-rendszerben $A(8;2)$, $B(5;7)$ és $C(-2;-4)$. (13 pont)

4. a) Egy számtani sorozat első öt tagjának összege 40, az első és ötödik tag szorzata 48.

Számítsuk ki a sorozat első 10 tagjának összegét.

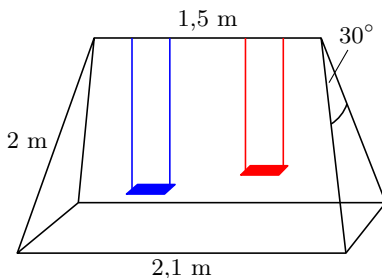
b) Egy számtani sorozat négy egymás utáni tagjához rendre 4-et, 3-at, 6-ot és 17-et adva egy mértani sorozat egymást követő tagjait kapjuk.

Határozzuk meg a számtani sorozat így kapott négy tagját. (14 pont)

II. rész

5. Az ábrán egy kétüléses gyermekhinta vázlatos rajza látható.

A 2 méteres ferde rudak a vízszintes talajjal ugyanakkora szöget zárnak be. Két ilyen rúd egymással bezárt szöge pedig 30° -os. A hintákat tartó vízszintes 1,5 m-es rúd talajra eső merőleges vetülete a téglalap 2,1 m-es oldalával párhuzamos középvonalán van, és szimmetrikus a téglalap középpontjára.



a) Mekkora szöget zárnak be a vízszintes talajjal a 2 m-es rudak?

b) Az egyik hinta lengésideje 2,4, a másiké 2,2 másodperc, mozgásuk csillapítatlan, periodikus mozgásnak tekinthető. Egyszerre elindítjuk a hintákat.

Hány másodperc múlva lesz először mindkét hinta egyszerre ugyanabban a helyzetben, mint induláskor?

c) Anna, Béla, Cili, Dani és Emi együtt játszanak. Kitalálták, hogy párosával fognak hintázni úgy, hogy mindenki mindegyik társával hintázik egyszer, két percet. Minden hintázás után mindenkinek le kell szállni, és átadni a hintát két olyan hintázónak, akik még nem hintáztak együtt.

Végrehajtható-e ez a terv? Ha igen, a gyerekek nevének kezdőbetűivel adjunk meg egy lehetséges sorrendet, ha nem, indokoljuk válaszukat. (16 pont)

d) A gyerekek vászonnal borított zárható sátrat szeretnének készíteni úgy, hogy a hinta rúdjaikat használják a sátor tartóiként.

Legalább hány négyzetméter anyagra van szükségük a sátor elkészítéséhez?

6. Egy tájékozási sportegyesület 100 sportolója három sportágban indul az idei versenyeken. Ebben az évben 85-en tájfutó, 40-en tájbringa és 18-an sítájfutó számokban versenyeznek. Mindenki indul legalább egy sportágban, pontosan két számban 29-en neveznek.

a) Hányan vesznek részt mindhárom versenyszámban?

b) A klub tagjai életkoruk alapján három csoportot alkotnak: junior, felnőtt és szenior. A tagság 25%-a szenior, ezen belül másfélszer annyi férfi van, mint nő. A felnőttek között kétszer annyi a férfi, mint a női versenyző, a junioroknál pedig 3-mal kevesebb lány van, mint fiú. A klubtagság 60%-a férfi.

Korosztályonként hány női és hány férfi versenyzője van a szakosztálynak?

c) Az egyik versenyző annyira sikeres, hogy amennyiben elindul egy versenyen, akkor 70%-os valószínűséggel dobogón végez. Az idei szezonban 10 versenyen indul majd.

Mennyi a valószínűsége, hogy legalább négyszer dobogós helyezést ér el?

d) A szezonnyitó összejövetelen a legfiatalabb versenyzők között vásárlási utalványokat sorsolnak ki. A sorsoláson 6 fiú és 4 lány nevét egy urnába helyezik, majd visszatevés nélkül kihúznak három cédulát.

Mennyi a valószínűsége annak, hogy két lány és egy fiú nyer utalványt?

(16 pont)

7. Az $f: [-2; 2] \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = 4 - x^2$ függvény grafikonja és az x tengely által bezárt korlátos tartományba berajzoltunk egy téglalapot, amelynek oldalai párhuzamosak a koordináta-rendszer tengelyeivel.

a) Mekkora az oldalai a legnagyobb kerületű ilyen téglalapnak?

b) Adott az $A(0; 4)$ és a $B(0; 8)$ pont. Az AB szakaszon véletlenszerűen felvett P pontból érintőket húzunk az $f(x)$ függvény grafikonjához, a két érintési pontot jelöljük E -vel és F -fel.

Mennyi a valószínűsége annak, hogy az EF háromszög tompaszögű? (16 pont)

8. Egy foci VB döntőjébe jutott 48 csapat nevét négy kalapba helyezik, mind-egyikbe 12-t, majd ezekből egyet-egyet sorsolva alakítják ki a 4-4 csapatból álló 12 csoportot, amelyeket az $A, B, C, \dots, K, L$ betűkkel jelölnek meg. A sorsolást az A

csoport résztvevőinek sorsolásával kezdik, majd az ábécé sorrendjében haladnak a K -ig.

a) Hányféleképpen alakulhat ki a 12 csoport? (Két sorsolás akkor különböző, ha van olyan csoport, ahova nem pontosan ugyanazok a csapatok kerültek. A különböző betűjelű csoportokat különbözőeknek tekintjük.)

A csoportmérkőzéseken minden csapat mindegyik csoporttársával játszik egy mérkőzést, amelyen a győztes 3, a vesztes 0, döntetlen esetén mindkét csapat 1-1 pontot kap. Az egyik csoportban, amelyben a Dzéta (ζ), az Éta (η), a Théta (ϑ) és az Ióta (ι) csapat volt, a csoportmérkőzések végén a ζ csapatnak 6, az η -nak 5 és a ϑ -nak 1 pontja lett.

b) Hány pontot szerzett az ι csapat?

A csoportmérkőzések befejezése után 32 csapat jut tovább az egyenes kieséses szakaszba, ahol a mérkőzéseken nincs már döntetlen, a győztes továbbjut a következő fordulóba, a vesztes kiesik. Az első fordulóban 16 mérkőzést játszanak, minden továbbibban feleannyit, mint az előzőben. Az a csapat nyeri a VB-t, amelyik az utolsó mérkőzésen nyerni tud. A döntő előtt lejátsszanak még egy mérkőzést a harmadik helyért az utolsó előtti fordulóban vesztes csapatok. A VB után készített elemzésekből kiderült, hogy az összes mérkőzés 25%-a végződött döntetlennel.

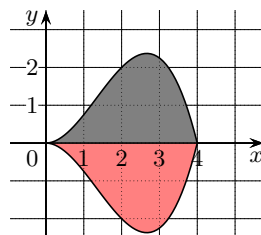
c) Ha az összes csoportmérkőzés közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet, mennyi annak a valószínűsége, hogy döntetlennel végződött? (16 pont)

9. a) Határozzuk meg az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^2 - \frac{x^3}{4}$ függvény zérushelyeit.

b) Hol van helyi maximuma az $f(x)$ függvénynek?

c) Mekkora az ábrán látható színes alakzat területe?

A szürke részt a $g(x) = x^2 - \frac{x^3}{4}$, $x \in [0; 4]$ függvény grafikonja határolja, a pirosat pedig a $-g(x)$, $x \in [0; 4]$ függvényé. (16 pont)



Németh László

Fonyód

Technikai tudnivalók a beküldéshez

A megoldásodat az emeltkomal@gmail.com címre küldheted be, a határidő a feladatsor megjelenését követő hónap 7. napja.

A megoldást szkennelve vagy fényképezve, lehetőség szerint egyetlen pdf文件中 mellékel a levededhez. A megoldás leírásakor és szkennelésekor/fényképezésekor is ügyelj a jól olvashatóságra! Ha a kép felbontása 200 dpi, akkor az általában megfelelő.

A dolgozatból egyértelműen derüljön ki, hogy ki készítette, tehát tüntesd fel az elején a nevedet, iskoládat, osztályodat!

A kijavított dolgozatot arra a címre küldjük vissza, ahonnan az eredeti érkezett.

Megoldásvázlatok a 2024./6. szám matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. a) Oldjuk meg az $\log_x(64x^2) = -4$ egyenletet a pozitív valós számok halmazán.
(5 pont)

b) Oldjuk meg a $\frac{(2x+14)(x-2)}{(x-7)(x+5)} > 2$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.
(7 pont)

Megoldás. a) A logaritmus alapja x , ezért $x > 0$ (ez a feladat kikötése is), és $x \neq 1$; $64x^2 > 0$ pedig nyilván teljesül. A logaritmus definícióját alkalmazzuk, majd rendezzük az egyenletet:

$$64x^2 = x^{-4} \iff 2^6 = x^{-6} \iff \left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = x^{-6} \iff x = \frac{1}{2},$$

az ekvivalenciák $x \neq 0$, valamint a logaritmus-, illetve a hatványfüggvény egy-egyértelműsége miatt teljesülnek.

Ellenőrzés: $\log_{\frac{1}{2}}(64 \cdot 0,5^2) = \log_{\frac{1}{2}}(64 \cdot \frac{1}{4}) = \log_{\frac{1}{2}}(16) = -4$, valóban.

b) A nevező kizárólag nemnulla tényezőket tartalmazhat, ezért $x \neq 7$, és $x \neq -5$. Nullára redukálunk, majd elvégezzük a kijelölt műveleteket:

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 - 4x + 14x - 28}{(x-7)(x+5)} - 2 &> 0, \\ \frac{2x^2 + 10x - 28 - 2(x-7)(x+5)}{(x-7)(x+5)} &> 0, \\ \frac{14x + 42}{(x-7)(x+5)} &= \frac{14(x+3)}{(x-7)(x+5)} > 0. \end{aligned}$$

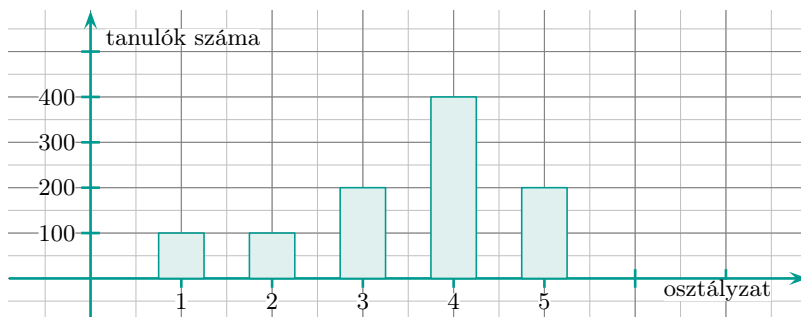
Látjuk, hogy a számláló $x = -3$ -ban vált előjelet, a nevezőben pedig $x = 7$ -ben, illetve $x = -5$ -ben történik előjelváltás. Ezek alapján elkészítjük a tényezők előjelét tartalmazó táblázatot:

	$x < -5$	$-5 < x < -3$	$-3 < x < 7$	$7 < x$
$x + 5$	–	+	+	+
$14(x + 3)$	–	–	+	+
$x - 7$	–	–	–	+

A tört értéke pontosan akkor pozitív, ha páros számú negatív előjelű tényezőt tartalmaz. Jelen esetben a negatív tényezők száma 0 vagy 2, azaz mindhárom tényező pozitív (utolsó oszlop), vagy a nevező második tényezője pozitív, de a számláló és a nevező első tényezője negatív (második oszlop). Ekvivalens átalakításokat végeztünk és a megoldások megfelelnek a kikötésnek, így a megoldáshalmaz:

$$M =]-5; -3[\cup]7; \infty[.$$

2. Egy középiskola tanulói az elmúlt tanév végén matematikából az alábbi oszlopdiagramon szemléltetett osztályzatokat szerezték:



a) Számítsuk ki az osztályzatok szórását. (5 pont)

b) Készítsünk dobozdiagramot az adatok szemléltetésére. (7 pont)

Megoldás. a) Az oszlopdiagramról leolvasott értékek alapján gyakoriságtáblázatot készítünk: A szórás kiszámításához szükségünk van az átlagra:

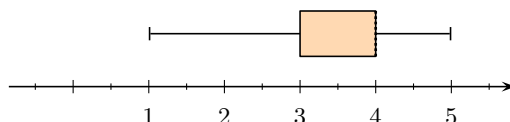
osztályzat	elégtelen	elégséges	közepes	jó	jeles
gyakoriság	100	100	200	400	200

$$\bar{X} = \frac{100 \cdot 1 + 100 \cdot 2 + 200 \cdot 3 + 400 \cdot 4 + 200 \cdot 5}{100 + 100 + 200 + 400 + 200} = \frac{3500}{1000} = 3,5.$$

Ennek segítségével meghatározzuk a szórást:

$$\sigma = \sqrt{\frac{100 \cdot (-2,5)^2 + 100 \cdot (-1,5)^2 + 200 \cdot (-0,5)^2 + 400 \cdot 0,5^2 + 200 \cdot 1,5^2}{1000}} = \sqrt{1,45} \approx 1,204.$$

b) A dobozdiagram elkészítéséhez meghatározzuk az alsó kvartilist, a mediánt és a felső kvartilist. Az adatok növekvő sorrendben szerepelnek a gyakoriság táblázatban. A két középső az 500. és az 501. elem, mindkettő 4, így ezek átlaga is, azaz a medián is 4. Hasonlóképpen kapjuk, hogy az alsó kvartilis 3, a felső kvartilis pedig 4, azaz egyenlő a mediánnal, így a mediánt a doboz jobb szélén jelöljük be (lásd az ábrán).



3. a) Három pozitív egész szám szorzata 33339600. Az elsőt 3-mal, a másodikat 4-gyel, a harmadikat 5-tel megszorozva ugyanazt a számot kapjuk.

Melyek ezek a számok? (5 pont)

b) Egy paralelogramma átlói által közbezárt szög nagysága $77^\circ 17'$, az átlók hossza 386 cm és 42 dm.

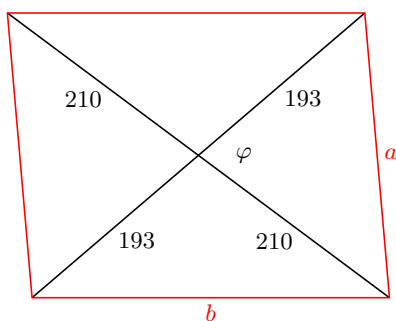
Adjuk meg (egészre kerekítve) a paralelogramma oldalainak centiméterben mért hosszát. (7 pont)

Megoldás. a) Az első számot a -val, a másodikat b -vel, a harmadikat c -vel jelöljük. A feltételek alapján $abc = 33\,339\,600$, és $3a = 4b = 5c = x$. Ekkor $a = \frac{x}{3}$, $b = \frac{x}{4}$, $c = \frac{x}{5}$. A három szám szorzata:

$$\frac{x}{3} \cdot \frac{x}{4} \cdot \frac{x}{5} = 33\,339\,600,$$

amiből $x^3 = 60 \cdot 33\,339\,600$, ezért $x = \sqrt[3]{60 \cdot 33\,339\,600} = 1260$.

A keresett három szám, rendre: $a = \frac{1260}{3} = 420$, $b = \frac{1260}{4} = 315$ és $c = \frac{1260}{5} = 252$. Ezek valóban kielégítik a feladat feltételeit.



b) Bármely paralelogramma középpontosan szimmetrikus az átlók metszéspontjára, ezért az átlók két-két egybevágó háromszögre bontják a paralelogrammát. Jelen esetben e háromszögek egyik oldala $\frac{386}{2} = 193$ cm, másik oldala pedig $\frac{42}{2} = 21$ dm = 210 cm hosszúságú (lásd a mellékelt ábrán).

Az átlók által bezárt szög ($\varphi = 77^\circ 17'$) ismeretében alkalmazhatjuk a koszinusztételt, ezzel megkapjuk a paralelogramma rövidebbik oldalának hosszát:

$$a^2 = 193^2 + 210^2 - 2 \cdot 193 \cdot 210 \cdot \cos(77^\circ 17') \approx 63505,26,$$

amiből $a \approx 252$ cm.

A paralelogramma hosszabbik oldalát hasonlóképpen kapjuk, ám ebben a háromszögben a 193 és 210 cm hosszúságú oldalak $180^\circ - 77^\circ 17' = 102^\circ 43'$ nagyságú szöget zárnak be. A koszinusztételt használjuk ismét:

$$b^2 = 193^2 + 210^2 - 2 \cdot 193 \cdot 210 \cdot \cos(102^\circ 43') \approx 99192,74,$$

amiből $b \approx 315$ cm.

A paralelogramma oldalainak hossza egész centiméterekre kerekítve 252 és 315 cm.

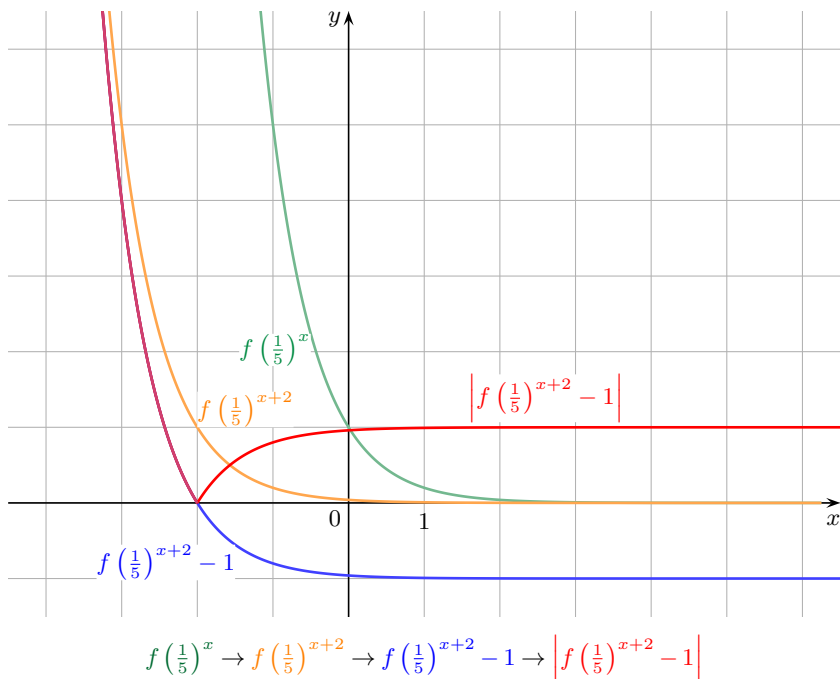
4. a) Ábrázoljuk az $f:]-3; 3[\rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \left| \left(\frac{1}{5} \right)^{x+2} - 1 \right|$ függvény grafikonját

koordináta-rendszerben, és adjuk meg f értékkészletét. (6 pont)

b) Határozzuk meg az f értelmezési tartományának azon elemeit, amelyekre $f(x) = 0,8$. (6 pont)

c) Hol metszi az f függvény grafikonja az y -tengelyt? (3 pont)

Megoldás. a) Függvénytranszformációk segítségével – az alábbi ábrán látható – négy lépésben ábrázoljuk a grafikont.



A függvény értékkészlete: $R = [0; 4[$.

b) Megoldjuk az $\left|\left(\frac{1}{5}\right)^{x+2} - 1\right| = 0,8$ egyenletet.

1. eset $\left(\frac{1}{5}\right)^{x+2} - 1 = 0,8$, amiből $\left(\frac{1}{5}\right)^{x+2} = 1,8$, innen $x_1 = \log_{\frac{1}{5}} 1,8 - 2 \approx -2,365$.

2. eset $\left(\frac{1}{5}\right)^{x+2} - 1 = -0,8$, amiből $\left(\frac{1}{5}\right)^{x+2} = \frac{1}{5}$, innen $x_2 = -1$.

Mindkét szám eleme az értelmezési tartománynak, így az f függvény a 0,8 értéket két helyen, az $x_1 = \log_{\frac{1}{5}} 1,8 - 2$ -ben és az $x_2 = -1$ -ben veszi fel.

c) Az y tengelyen $x = 0$, tehát kiszámítjuk $f(0)$ -t.

$$f(0) = \left|\left(\frac{1}{5}\right)^{0+2} - 1\right| = \left|\frac{1}{25} - 1\right| = \left|-\frac{24}{25}\right| = \frac{24}{25}.$$

A grafikon az y tengelyt az $M\left(0; \frac{24}{25}\right)$ pontban metszi.

II. rész

5. Egy derékszögű háromszög oldalhosszai számtani sorozatot alkotnak (azaz a hosszabb befogó ugyanannyival nagyobb a rövidebb befogónál, amennyivel az átfogó hosszabb nála).

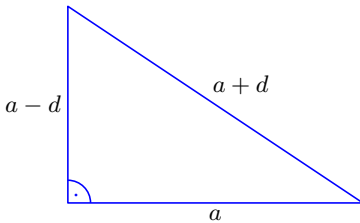
a) Hányszorosa a háromszög köré írt kör területe a háromszögbe írható kör területének? (8 pont)

b) A háromszög átfogójához tartozó magasságának hossza 24 egység. Mekkora a háromszög kerülete? (4 pont)

c) Adott az $a_n = \frac{42n^3 - 24n + 2000}{6n^2 - 100}$ sorozat. Konvergens-e ez a sorozat? Indokoljuk válaszunkat. (4 pont)

Megoldás. a) Ábrát készítünk, amelyen a hosszabbik befogót a -val, a differenciát d -vel jelöljük ($0 < d < a$ a geometriai tartalom miatt). Ekkor a rövidebb befogó hossza $a - d$, az átfogóé pedig $a + d$.

Pitagorasz tételét alkalmazzuk, hiszen derékszögű a háromszög.



$$(a - d)^2 + a^2 = (a + d)^2,$$

$$a^2 - 2ad + d^2 + a^2 = a^2 + 2ad + d^2.$$

Rendezés után kiemelünk a -t:

$$a^2 - 4ad = a(a - 4d) = 0,$$

ami azt jelenti, hogy $a = 0$, vagy $a - 4d = 0$.

Mivel $a > d > 0$, ezért csak a második megoldás megfelelő, azaz $a = 4d$, ekkor a háromszög oldalhosszai növekvő sorrendben: $3d$; $4d$; $5d$. Ismert, hogy a derékszögű háromszög köré írható körének sugara az átfogó felével egyenlő, azaz $R = 2,5d$. A beírt kör sugarát többféleképpen, például akár területképletek segítségével is meghatározhatjuk. Egyrészt a háromszög területe a befogóhosszak szorzatának a fele:

$$T_{\Delta} = \frac{3d \cdot 4d}{2} = 6d^2,$$

másrészt $T_{\Delta} = r \cdot s$, ahol r a beírt kör sugara, s pedig a háromszög kerületének felével egyenlő, azaz

$$s = \frac{K_{\Delta}}{2} = \frac{3d + 4d + 5d}{2} = 6d.$$

Kifejezzük r -et:

$$r = \frac{T_{\Delta}}{s} = \frac{6d^2}{6d} = d.$$

Vagy másképp, a csúcsokból a beírt körhöz húzott érintőszakaszok hosszából: $5d = (3d - r) + (4d - r) = 7d - 2r$, tehát $r = d$.

A háromszög köréírt, illetve beírt körének területaránya:

$$\frac{R^2 \pi}{r^2 \pi} = \frac{(2,5d)^2}{d^2} = 6,25.$$

b) Felhasználjuk, hogy $T_{\Delta} = 6d^2$, és egy újabb területképletet alkalmazunk:

$$T_{\Delta} = \frac{c \cdot m_c}{2},$$

ahol c az átfogó hossza, azaz esetünkben $5d$, m_c pedig az átfogóhoz tartozó magasság hossza, azaz 24 egység. Mindezek alapján felírjuk a

$$6d^2 = \frac{5d \cdot 24}{2}$$

egyenletet, amiből $d = \frac{5 \cdot 24}{6 \cdot 2} = 10$. A háromszög kerülete

$$K_{\Delta} = 3d + 4d + 5d = 12d = 12 \cdot 10 = 120 \text{ (egység)}.$$

c) Először osszuk a számlálót és a nevezőt is (a pozitív) n^2 -tel. Ezután alkalmazzuk a sorozatok határértékére vonatkozó tételeket, illetve néhány ismert határértéket az alábbiak szerint:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{42n^3 - 24n + 2000}{6n^2 - 100} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{42n - \frac{24}{n} + \frac{2000}{n^2}}{6 - \frac{100}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 42n - \frac{24}{n} + \frac{2000}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 6 - \frac{100}{n^2}}.$$

Itt $\lim_{n \rightarrow \infty} 42n - \frac{24}{n} + \frac{2000}{n^2} = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} 6 - \frac{100}{n^2} = 6$, azaz a sorozat végtelenhez tart, tehát divergens (nem konvergens).

6. Legyen T azon 12-jegyű pozitív egész számok halmaza, amelyek tízes számrendszerbeli alakjában legalább egyszer szerepel a 2024 blokk. (T eleme például a 120245678900 és a 202477772024, viszont nem eleme az 520022444202.)

a) Hány elemű a T halmaz? (8 pont)

b) Pistike a T halmazból véletlenszerűen kiválaszt egyszerre három számot. Mekkora a valószínűsége, hogy mindhárom szám 1-nél többször tartalmazza a 2024 blokkot? (5 pont)

c) Móricka a T halmazból véletlenszerűen visszatévéssel választ ki három számot. Mekkora a valószínűsége, hogy mindhárom szám 1-nél többször tartalmazza a 2024 blokkot? (3 pont)

Megoldás. a) A 2024-es blokkok száma alapján végezzük az összeszámlálást. Ha van egy 2024-es blokk, akkor az lehet a szám legelején, ekkor a maradék 8 helyre bármilyen számjegy kerülhet, így 10^8 darab ilyen szám van. Ha az adott blokk nem legelöl van, akkor 8-féleképpen rakhatjuk le, az első számjegy nem lehet nulla, így 9-féle értéket kaphat, a többi 7 helyre 0-tól 9-ig bármi. Ez összesen $8 \cdot 9 \cdot 10^7 = 7,2 \cdot 10^8$ darab szám.

Az imént a pontosan két 2024-es blokkot tartalmazókat kétszer, a pontosan három ilyen blokkot tartalmazókat háromszor számoltuk. Ezért egyszer levonjuk a pontosan két ilyen blokkot tartalmazók számát, amihez most meghatározzuk ezek számát. Ha az egyik 2024-es blokk legelöl van, akkor a másik ilyen blokkot 5-féleképpen helyezhetjük el (vagy közvetlenül a másik után, vagy 1, 2, 3, illetve 4 helyet kihagyva – több helyet nem hagyhatunk ki, mert akkor legalább 13-jegyű számot kapnánk). A maradék 4 helyre bármilyen számjegy kerülhet, így $5 \cdot 10^4 = 50000$ darab ilyen szám van. Ha pedig nem a 2024 van a szám legelején, akkor az első számjegy 9-féle lehet, utána a két adott blokkot a maradék 5 helyre

(az első 2024 a balról 11., 10., 9., 8. helyi értékeken kezdődhet, a második ezekhez rendre 4, 3, 2, 1-féleképpen helyezhető el) 10-féleképpen helyezhetjük el, majd a még üresen maradt három helyet tetszőlegesen kitölthetjük, tehát ilyen számból $9 \cdot 10 \cdot 10^3 = 90000$ darab van. Végül 3 darab 4-jegyű blokkot csupán 1-féleképpen, sorban egymás mellé helyezhetünk el, így egyetlen szám van, amely pontosan 3 blokkot tartalmaz. Ebben a lépésben a pontosan két 2024-es blokkot tartalmazó számokat egyszer számoltuk meg (így tényleg egyszer kell levonni), a három blokkot tartalmazókat pedig $\binom{3}{2} = 3$ -szor. Ezért hozzá kell adni egyszer a pontosan 3 blokkot tartalmazókat, így (a logikai szita formula alapján is) összesen

$$10^8 + 7,2 \cdot 10^8 - 50000 - 90000 + 1 = 820000000 - 140000 + 1 = 819860001$$

ilyen 12-jegyű szám van, ami éppen a T halmaz elemszámát adja.

b) Az a) feladatrészen láttuk, hogy olyan 12-jegyű számból, amely legalább két 2024-es blokkot tartalmaz nem lehet több, mint $5 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^4 = 140000$ darab. Valójában ennél 2-vel kevesebb, azaz 139998 darab van, hiszen a 202420242024 számot háromszor is megszámláltuk, más számot pedig nem számoltunk meg többször. Pistike tehát 819860001 szám közül választ hármat, azaz összesen $\binom{819860001}{3}$ eset van. A kedvező esetek száma $\binom{139998}{3}$, így a kért valószínűség

$$p = \frac{\binom{139998}{3}}{\binom{819860001}{3}} (\approx 4,97894 \cdot 10^{-12}).$$

c) Móricka visszatevéssel választ háromszor, így a valószínűség

$$p = \left(\frac{139998}{819860001} \right)^3 (\approx 4,97905 \cdot 10^{-12}).$$

7. a) Határozzuk meg az alábbi állítások logikai értékét. Indokoljuk válaszunkat.

(8 pont)

A: Van olyan függvény, amelyet négyszer egymás után deriválva önmagát kapjuk.

B: Ha egy függvény folytonos egy pontban, akkor abban a pontban differenciálható.

C: Ha egy függvénynek egy pontban az első és a második deriváltja is nulla, akkor abban a pontban inflexió pontja van.

b) Fogalmazzuk meg az előző feladatrészen **B** állításának megfordítását és állapítsuk meg a megfordítás logikai értékét. (Indoklás nem szükséges.) (3 pont)

c) Fogalmazzuk meg a b) feladatrészen megfogalmazott állítás tagadását.

(2 pont)

d) Fogalmazzuk meg az a) feladatrészen **C** állításának megfordítását és állapítsuk meg a megfordítás logikai értékét. (Indoklás nem szükséges.) (3 pont)

Megoldás. a) **A:** Igaz, például e^x , $\sin x$, $\cos x$. konstans 0. (Egy helyes példa elegendő.)

B: Hamis, például $|x|$ a 0-ban.

C: Hamis, például x^4 a 0-ban.

b) Ha egy függvény differenciálható egy pontban, akkor abban a pontban folytonos. Logikai értéke: Igaz.

c) Az b)-ben megfogalmazott állítás tagadása: „Van olyan függvény, amely differenciálható egy pontban, de ott nem folytonos.” (Természetesen hamis.)

d) Ha egy függvénynek inflexiós pontja van egy pontban, akkor abban a pontban az első és a második derivált is nulla. Logikai értéke: Hamis. (Például a $\sin x$ függvénynek a 0-ban inflexiós pontja van, de a deriváltja ebben a pontban nem 0.)

8. Adott a $k_1: x^2 + y^2 - 20x + 10y - 19 = 0$ egyenletű kör. A k_2 kör kerülete a k_1 kör kerületénél ennek 75%-ával kisebb. A két kör koncentrikus.

a) Írjuk fel a k_2 kör egyenletét. (5 pont)

b) Mutassuk meg, hogy a $P(10; -2)$ pont illeszkedik a k_1 vagy a k_2 körre. (3 pont)

c) Határozzuk meg a k_2 kör $Q(7; -5)$ pontjában húzott érintőegyeneseinek egyenletét. (5 pont)

A k_1 kör belsejében véletlenszerűen kiválasztunk egy pontot.

d) Mekkora a valószínűsége, hogy a kiválasztott pont a k_2 körön kívül van, ha a körön bármely alakzat eltalálásának valószínűsége egyenesen arányos annak területével? (3 pont)

Megoldás. a) A k_1 kör egyenletét átalakítjuk:

$$(x - 10)^2 + (y + 5)^2 = 144,$$

ebből látjuk, hogy a középpont $O_1(10; -5)$, a sugár pedig $r_1 = \sqrt{144} = 12$. A körök koncentrikusak, ezért $O_1 = O_2$, és k_2 kerülete 75%-kal kisebb, mint k_1 -é, ezért a sugarakra is ugyanez fennáll, azaz $r_2 = 0,25 \cdot r_1 = 0,25 \cdot 12 = 3$. Így a kisebb, k_2 kör egyenlete:

$$k_2: (x - 10)^2 + (y + 5)^2 = 9.$$

b) A P koordinátáit behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$(10 - 10)^2 + (-2 + 5)^2 = 0^2 + 3^2 = 9,$$

ahonnan $P \in k_2$, azaz igazoltuk, hogy a P pont illeszkedik a k_2 körre.

c) A $Q(7; -5)$ pont koordinátái kielégítik a k_2 kör egyenletét, így Q valóban rajta van ezen a körön. A kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra, ezért a sugárvektor normálvektora az érintőegyenestnek:

$$\mathbf{n}_e = \overrightarrow{QO_2} = (10 - 7; -5 - (-5)) = (3; 0).$$

Az érintő átmegy a Q ponton, így a normálvektoros egyenlet felírásához megvan minden szükséges adatunk:

$$e: 3 \cdot x + 0 \cdot y = 3 \cdot 7 + 0 \cdot (-5),$$

ahonnan $x = 7$. Az érintőegyenest egyenlete: $e: x = 7$.

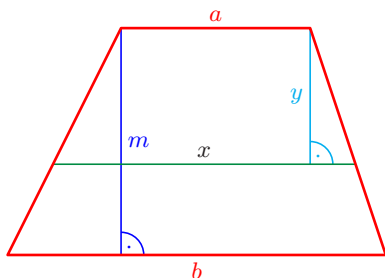
d) A geometriai valószínűségi modell alapján a keresett valószínűséget a megfelelő területek aránya adja:

$$p = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{12^2 \cdot \pi - 3^2 \cdot \pi}{12^2 \cdot \pi} = \frac{144 - 9}{144} = \frac{15}{16}.$$

9. a) Bizonyítsuk be, hogy bármely trapéz területét felező, az alapokkal párhuzamos szakasz hossza éppen az alapok négyzetes közepével egyenlő. (11 pont)

b) Egy trapéz egyik alapjának hossza 5 cm, a trapéz területét felező, az alapokkal párhuzamos szakasz hossza 45 cm. Számítsuk ki a másik alap hosszának pontos értékét. (5 pont)

Megoldás. a) Készítsünk ábrát, és használjuk a jelöléseit.



A feladat szövegéből következik, hogy az x hosszúságú szakasz két kisebb trapézra bontja az eredeti trapézt, a területét pedig felezi. Ebből az következik, hogy a nagy trapéz területe kétszerese a kisebb trapézok területének, így felírjuk a következő egyenletrendszert:

$$(1) \quad \frac{a+b}{2}m = 2 \cdot \frac{a+x}{2}y = (a+x)y,$$

$$(2) \quad \frac{a+b}{2}m = 2 \cdot \frac{b+x}{2}(m-y) = (b+x)(m-y).$$

Kifejezzük y -t az (1)-ből: $y = \frac{(a+b)m}{2(a+x)}$ (a geometriai jelentésükből adódóan a és x is pozitív), majd behelyettesítjük (2)-be:

$$(a+b)m = 2(b+x)m \left(1 - \frac{a+b}{2(a+x)}\right).$$

Látjuk, hogy mindkét oldalon szorzótényező m (pozitív), ezért mindkét oldalt elosztjuk vele, majd rendezzük az egyenletet:

$$\begin{aligned} (a+b)(a+x) &= (b+x)(2x + 2x - (a+b)) = (b+x)(a-b+2x) \\ a^2 + ab + ax + bx &= ab - b^2 + 2bx + ax - bx + 2x^2 \\ a^2 &= -b^2 + 2x^2, \end{aligned}$$

amivel egyenértékű, hogy

$$x^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}, \quad \text{vagyis} \quad x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Ezzel a bizonyítás végére értünk, megmutattuk, hogy x éppen a és b négyzetes közepével egyenlő.

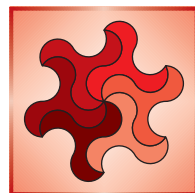
b) Legyen a trapéz nagyobb alapjának hossza z . Felhasználva az a) feladatrészt eredményét, felírjuk és megoldjuk az alábbi egyenletet

$$\sqrt{\frac{5^2 + z^2}{2}} = 45 \iff z^2 = 2 \cdot 45^2 - 5^2 = 4025 \iff z = \sqrt{4025} \text{ cm.}$$

A trapéz másik alapja $\sqrt{4025}$ cm hosszúságú.

Kozma Katalin Abigél

Győr



Matematika feladatok megoldása

B. 5390. Léteznek-e olyan $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ páros egész számok, amelyekre az $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ polinom osztható az $x^2 + x + 1$ polinommal?

(3 pont)

Javasolta: Kós Géza (Budapest)

1. Megoldás. Megmutatjuk, hogy nem léteznek a feladat feltételeinek eleget tevő $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ páros egész számok.

Indirekten tegyük fel, hogy $x^2 + x + 1$ osztja az $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ polinomot, vagyis létezik egy $(n-2)$ -edfokú $b_{n-2}x^{n-2} + b_{n-3}x^{n-3} + \dots + b_1x + b_0$ polinom, amelyre

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = (x^2 + x + 1)(b_{n-2}x^{n-2} + b_{n-3}x^{n-3} + \dots + b_1x + b_0).$$

Az egységesebb jelölés érdekében legyen $a_n = 1$, és $b_{-1} = b_{-2} = b_{n-1} = b_n = 0$. A zárójeleket felbontva, minden $0 \leq k \leq n$ -re az x^k együtthatója az egyenlet két oldalán

$$a_k = b_k + b_{k-1} + b_{k-2}.$$

Most k szerinti indukcióval megmutatjuk, hogy minden $-2 \leq k < n$ -re b_k egy páros egész szám. Ez a kiinduló $k = -2$ és $k = -1$ esetekben $b_{-1} = b_{-2} = 0$ miatt igaz. Az indukciós lépéshez tegyük fel, hogy $0 \leq k < n$, és állításunk igaz $(k-1)$ -re és $(k-2)$ -re. Mivel $b_k = b_{k-1} + b_{k-2} - a_k$, és a jobboldalon mindhárom tag páros egész szám, a b_k is egy páros egész szám.

Azonban $b_{n-2} = b_{n-2} + b_{n-1} + b_n = a_n = 1$, ami páratlan, ez pedig ellentmondás. Tehát az indirekt feltevésünk hamis volt, ezért nem léteznek olyan $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ páros egészek, amelyekre az $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ polinom osztható az $x^2 + x + 1$ polinommal.

Keresztély Zsófia (Budapest, Szent István Gimn., 11. o.)

Megjegyzés. A polinomok maradékos osztási algoritmusában mindig az osztó polinom főegyütthatójával kell osztanunk. Ha tehát egy egész együtthatós $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ polinom osztható az $x^2 + x + 1$ polinommal (aminek főegyütthatója 1), akkor a hányadosuk is egész együtthatós. Erre hivatkozva a megoldás azzal is kezdhető, hogy $b_k, \dots, b_1, b_0$ egész számok.

2. megoldás. Azt állítjuk, hogy páros egész $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ számok esetén $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ nem lehet osztható az $x^2 + x + 1$ polinommal.

A komplex számok körében az $x^2 + x + 1$ polinom szorzattá alakítható:

$$x^2 + x + 1 = (x - \omega)(x - \bar{\omega}),$$

ahol $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ és $\bar{\omega} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. A megoldás alapötlete az, hogy ha $P(x)$ osztható az $x^2 + x + 1 = (x - \omega)(x - \bar{\omega})$ polinommal, akkor P -nek gyöke ω és $\bar{\omega}$ is.

Mivel $(x^2 + x + 1)(x - 1) = x^3 - 1$, az ω és az $\bar{\omega}$ az $x^3 - 1$ polinomnak is gyökei, tehát az 1-től különböző harmadik egységgyökök.

Először a következő lemmát igazoljuk:

Lemma. Ha az A, B, C valós számokra $A\omega^2 + B\omega + C = 0$, akkor $A = B = C$.

Bizonyítás. Legyen $Q(x) = Ax^2 + Bx + C$. A feltétel szerint $Q(\omega) = 0$, a konjugáltját véve pedig $Q(\bar{\omega}) = \bar{Q}(\omega) = 0$. Ezzel a – legfeljebb másodfokú – Q polinomnak mindkét komplex gyökét ismerjük, a Q gyöktényezős alakja tehát

$$Q(x) = Ax^2 + Bx + C = A(x - \omega)(x - \bar{\omega}) = A(x^2 + x + 1),$$

amiből látjuk, hogy $B = A$ és $C = A$. Ezzel a lemmát igazoltuk.

Most nézzük, mi történik a $P(x)$ kifejezéssel, ha behelyettesítünk $x = \omega$ -t. Mivel $\omega^3 = 1$, minden tag az 1, ω , ω^2 számok valamelyike, megszorozva a megfelelő együtthatóval. Legyen ismét $a_n = 1$; a tagokat az ω hatványai szerint csoportosítva

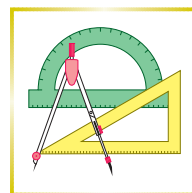
$$P(\omega) = (a_2 + a_5 + \dots)\omega^2 + (a_1 + a_4 + \dots)\omega + (a_0 + a_3 + \dots) = A\omega^2 + B\omega + C.$$

Mivel $P(\omega) = 0$, a Lemma szerint ebből következik, hogy $A = B = C$. Vegyük viszont észre, hogy az $A = a_2 + a_5 + \dots$, a $B = a_1 + a_4 + \dots$ és a $C = a_0 + a_3 + \dots$ számok közül pontosan az egyik páratlan – amelyekben szerepel az $a_n = 1$ együttható –, a másik kettő pedig páros. Emiatt $A = B = C$ nem lehetséges; így a $P(x)$ polinom nem lehet osztható $(x^2 + x + 1)$ -gyel.

Tehát nem létezik a feltételeket teljesítő polinom.

Aravin Peter (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 7. o.) és
Bodor Máttyás (Csíkszereda, Márton Áron Líceum, 10. o. t.)
 dolgozata alapján

A feladatra összesen 64 versenyző és csapat küldött megoldást. 3, 2, 1, illetve 0 pontos rendre 42, 12, 6, illetve 4 dolgozat.



úgy, hogy öt alma ára legyen két krajcár, és azt mondta, hogy a maga bevételéért később visszajön.

a) Ha ez az ember Pali gondolatát elfogadva mind a 60 almát eladta és a saját maga által tervezett bevételt megtartotta, akkor hány krajcár maradt Okos Palinak?

b) Hány krajcárért kellett volna adni a 60 alma darabját, hogy mindketten megkapják az eredetileg tervezett bevételüket?

Mikszáth Kálmán „Pali pályája” című elbeszélése alapján

C. 1824. Jövőre Boglárka tíz különböző könyvet szeretne elolvasni; minél vastagabb egy könyv, annál hosszabb ideig foglalkozik majd vele. Elhatározta, hogy 5, 10, 15, ... 45, 50 napot szán az egyes könyvek elolvasására. A fennmaradó időszakot három egyenlő részre osztja, amelyet aktív pihenésre használ. Ezeket a pihenő időszakokat sportolásra bármikor felhasználhatja az év során (akár egymás után többet is). Ha két könyvet pihenő időszak közbeiktatása nélkül kell elolvasnia, akkor mindig a vastagabbal fogja kezdeni. Hány különböző módon oszthatja be a 365 napot Boglárka a könyvek elolvasására?

Javasolta: *Kozma Katalin Abigél*, Győr

C. 1825. Az e egyenes a k_1 kört a különböző A és B pontokban metszi. A k_2 kör a C pontban érinti a k_1 kört és a D pontban az e egyenest. A CD egyenes és a k_1 kör másik metszéspontja T . Mutassuk meg, hogy $AT = TB$.

Svájci olimpiai feladat

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1826. Bizonyítsuk be, hogy ha $0 < x \leq 1$, akkor

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{4-x} < 1 + \sqrt{4-3x}.$$

Javasolta: *Hujter Mihály*, Budapest

C. 1827. Bizonyítsuk be, hogy ha két derékszögű háromszög kerülete egyaránt 1 egység, akkor az átfogóik hossza közötti különbség kisebb, mint $1,5 - \sqrt{2}$.

Javasolta: *Czizmazia Norbert*, Pécs

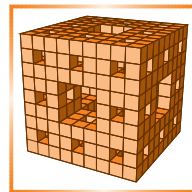


Beküldési határidő: 2024. november 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5405–5413.)



B. 5406. Bizonyítandó, hogy a

$$\sqrt{\frac{123456787654321}{1234321}} = 10001$$

egyenlőség fennáll az n alapú számrendszerben, ha $n \geq 9$.

(3 pont)

Javasolta: *Hujter Mihály* (Budapest)

B. 5407. Melyek azok az a , b , c és d pozitív egész számok, amelyekre teljesül, hogy

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} \quad \text{és} \quad \frac{a+c}{2} = b+1?$$

(4 pont)

Javasolta: *Sztranyák Attila* (Budapest)

B. 5408. Egy háromszög egyik oldala számtani közepe a másik kettőnek. Bizonyítandó, hogy ezen középső oldalt kettévágó szögfelező hossza $\frac{\sqrt{3}}{2}$ -szerese a másik két oldal mértani közepének.

(4 pont)

Javasolta: *Hujter Mihály* (Budapest)

B. 5409. A magyar kártya minden lapjának van színe és van értéke. Bármelyik lap színe lehet „piros”, „tök”, „zöld” és „makk”, és bármelyik lap értéke lehet „VII”, „VIII”, „IX”, „X”, „alsó”, „felső”, „király” vagy „ász”. A kártyacsomag lapjai között minden lehetséges szín-érték párosítás előfordul. A 32 lapból álló kártyacsomag lapjait véletlenszerűen letesszük egy 4 sorból és 8 oszlopból álló elrendezésbe. Legyen A az az esemény, hogy nincs olyan oszlop, amelyben két lap színe megegyezik, B pedig az az esemény, hogy nincs olyan sor, amelyben két lap értéke megegyezik. Melyik esemény valószínűsége nagyobb?

(5 pont)

Javasolta: *Bertalan Zoltán* (Békéscsaba)

B. 5410. Egy derékszögű háromszög csúcsai köré úgy írunk köröket, hogy egymást páronként kívülről érintik. Határozzuk meg annak a körnek a középpontját és sugarát, amelyet mindhárom kör belülről érint.

(5 pont)

Javasolta: *Németh László* (Fonyód)

B. 5411. Mutassuk meg, hogy minden $n \geq 2$ pozitív egész szám esetén

$$\sum_{k=1}^{n^2-1} \left[\sqrt{k} \right]^2 = \frac{(n-1)n(3n^2-n-1)}{6}.$$

Az $[x]$ az x valós szám egészrészét jelenti.

(4 pont)

Javasolta: *Bencze Mihály* (Brassó)

B. 5412. Egy összefüggő véges gráf egyik csúcsában van egy szökevény, akit a gráf három másik csúcsában lévő rendőrök szeretnének elkapni. Először a szökevény lép egyet egy él mentén, majd a rendőrök is léphetnek egyet-egyet, szintén élek mentén. Ezután ezt így folytatják felváltva. Biztosan el tudják-e kapni a rendőrök a szökevényt, vagyis garantálni tudják-e, hogy valamelyikük véges sok lépésen belül a szökevénnel egy csúcsra kerüljön?

(6 pont)

Javasolta: *Pach Péter Pál* (Budapest)

B. 5413. Legyen az ABC nem szabályos háromszög magasságpontja M , súlypontja S , beírt körének középpontja I . Mutassuk meg, hogy $\angle MIS < 90^\circ$.

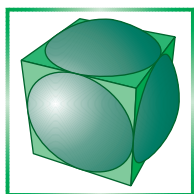
(6 pont)

Javasolta: *Vígh Viktor* (Sándorfalva)



Beküldési határidő: 2024. november 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (887–889.)

A. 887. A derékszögű koordináta-rendszerben adott egy önmagát nem metsző sokszög, melynek a kerületén nincs rácspont, és a csúcsainak nincs egész koordinátája. Egy pontot *félegésznek* nevezzük, ha pontosan az egyik koordinátája egész. Jelölje $P_1, P_2, \dots, P_k$ a sokszög kerületén lévő félegész pontokat. Jelölje n_i a P_i pont nem egész koordinátájának alsó egészrészét. Bizonyítsuk be, hogy az $n_1, n_2, \dots, n_k$ számokat két részre lehet úgy osztani, hogy a két részben a számok összege megegyezzen.

Javasolta: *Bán-Szabó Áron* (Budapest)

A. 888. Legyen n egy rögzített pozitív egész szám. Határozzuk meg a legkisebb k pozitív egész számot, melyre teljesül a következő állítás: tetszőleges G egyszerű, összefüggő gráf és $V_1, V_2, \dots, V_n$ minimális vágások esetén legfeljebb k csúcs választható ki úgy, hogy bármely két kiválasztott csúcshoz létezzen egy $1 \leq i \leq n$ egész szám, melyre a két kiválasztott csúcst elválasztja V_i .

A gráf V csúcshalmazának két diszjunkt nemüres részre való bontását *minimális vágásnak* nevezzük, ha a két rész között haladó élek száma minimális.

Javasolta: *Imolay András* (Budapest)

A. 889. Legyenek W, A, B rögzített valós számok, ahol $W > 0$. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi állítások ekvivalensek.

- Ha az $x, y, z \geq 0$ számokra teljesül, hogy $x + y \leq z + W$, $x + z \leq y + W$, $y + z \leq x + W$, akkor $Axyz + B \geq x^2 + y^2 + z^2$.
- $B \geq W^2$ és $AW^3 + B \geq 3W^2$.

Javasolta: *Somogyi Ákos* (London)

Informatikából kitűzött feladatok (635–638.)



I. 635. Kíváncsiak vagyunk arra, hogy az N jegyű pozitív egészek közül melyik szám esetében a legnagyobb az osztók összege. Például a kétjegyű számok esetében a 10 osztóinak összege 18, a 11 osztóinak összege 12 és így tovább. A kétjegyű pozitív egészek között a 96 az a szám, amely osztóinak összege a legnagyobb, ez az összeg 252.

Készítsünk programot *i635* néven, amely bekéri a vizsgálandó pozitív egészek számjegyeinek N számát ($1 \leq N \leq 5$), majd megadja, hogy melyik szám esetében a legnagyobb az osztók összege és mekkora ez az összeg. Ha több ilyen szám van, akkor azok közül a legkisebbet adja meg a program.

A program standard bemenetének egyetlen sorában a számjegyek száma szerepel.

A standard kimenet egyetlen sorába a keresett szám és a szám osztóinak összege szerepeljen egy szóközzel elválasztva.

Példa bemenet	Kimenet
1	8 15

Beküldendő egy tömörített *i635.zip* állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

(10 pont)

I. 636. Néhány üvegházhatású gáz hazai kibocsátási adatait vizsgáljuk az 1985-től 2021-ig terjedő időszakban.

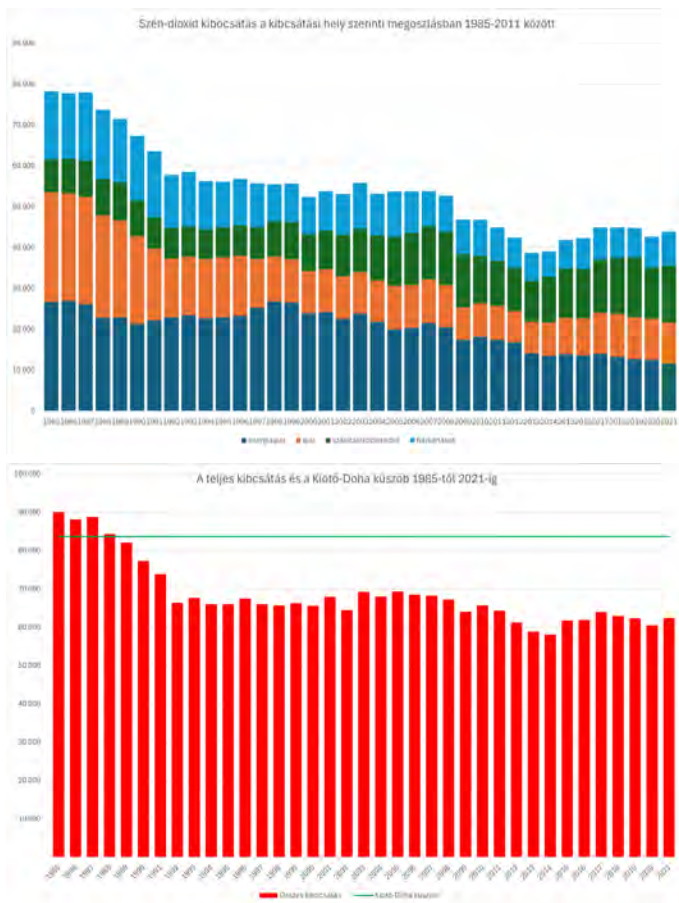
1. Nyissunk egy üres táblázatkezelő munkafüzetet.
2. Töltsük be egy üres munkalapra az A1 cellától kezdve az UTF-8 kódolású, tabulátorokkal tagolt **ueveg.txt** fájl tartalmát. Munkánkat mentjük **uevehaz** néven a táblázatkezelő alapértelmezett formátumában.
3. Formázzuk meg az adatokat a minta és a leírás szerint:
 - a. egyesítsük az **A1:AM1** cellatartományt;
 - b. szélesítsük ki annyira az oszlopokat, hogy minden adat látható legyen;
 - c. szegélyezzük az **A1:AM1** és az **A2:AO22** cellatartomány adatokat vagy képleteket tartalmazó celláit;
 - d. az első sor betűmérete legyen 18 pontos, a betűk félkövérek és a cella balra igazított;
 - e. a második sor szövege is legyen félkövér és középre igazított;
 - f. az **1.** és **2.** sor, illetve az **A3:B18** tartomány adatot tartalmazó cellái kapjanak a minta szerinti háttérszínt;
 - g. a **19.**, a **20.** és a **21.** sorban egyesítsük az **A** és **B** oszlopokat, tartalmukat igazítsuk jobbra;
 - h. a **C21:E21** tartomány csak külső szegélyt kapjon.

4. Készítsünk a Szén-dioxid nevű, diagram típusú munkalapra halmozott oszlopdiagramot a minta szerint a szén-dioxid kibocsátás részleteiről.

	A	B	C	D	E	F
1	Üvegházhatású gázok kibocsátása [ezer tonna]					
2	Megnevezés	Keletkezés helye	1985	1986	1987	1988
3	Szén-dioxid (CO₂) (bruttó)		86 364	84 833	85 420	81 212
4		energiaipar	26 646	26 987	26 148	22 818
5		ipar	26 882	26 290	26 265	24 918
6		szállítás/közlekedés	8 083	8 499	8 846	8 818
7		háztartások	16 587	15 993	16 665	17 018
8	Biomassa szén-dioxid (CO₂)		2 712	2 361	2 423	2 018
9	Dinitrogén-oxid (N₂O)		38	37	37	37
10		mezőgazdasági talajok	17	17	18	18
11		salétromsavgyártás	15	14	14	14
12	Metán (CH₄)		530	517	515	515
13		hulladékkezelés	114	119	124	124
14		mezőgazdaság	231	222	218	218
15		tűzelőanyagokból szivárgó emisszió	138	132	129	129
16	Fluorozott szénhidrogén (HFC)		0	0	0	0
17	Perfluor-karbon (PFC)		330	334	336	336
18	Kén-hexafluorid (SF₆)		6	7	9	9
19	Összes kibocsátás		89 980	88 089	88 740	84 240
20	Növekedés az előző évhez képest				+	
21	Hazánk vállalása a kiotói és dohai egyményben				83 600	

5. A továbbiakban az eredeti munkalapon minden számított adat legyen közpre igazítva.
6. Számítsuk ki a **C19:AM19** tartományban minden évre az összes kibocsátást.
7. A **D20:AM20** tartomány celláiba kerüljön „+” jel, ha az adott évi összes kibocsátás meghaladta az előző évit.
8. Az **AN3:AN18** cellába kerüljön az az évszám, amikor az adott kibocsátási mód a legnagyobb értékű volt, az **AO3:AO18** tartomány cellái maradjanak üresek, ha a tőlük balra álló cellában 1985 szerepel. Egyébként, ha az 1985-ös év adata nagyobb, mint a 2021-es évé, akkor az „Igen”, máskülönben a „Nem” szó jelenjen meg.
9. Az ENSZ 1992-es, Rio de Janeiro-i konferenciáján elfogadott – az emberiség katalizálta éghajlatváltozás miatti – jegyzőkönyvet 1997-ben Kiotóban ratifikálták. Ebben arra kérték az országokat, hogy 2008–2012 között csökkentsék az üvegházhatású gázok kibocsátását az 1990-es szint 5,2%-ával. A szerződést később a katarai Dohában meghosszabbították 2020-ig. Magyarország azt vállalta, hogy az 1985–1987 évek kibocsátási átlagát csökkenti 6%-kal. Számítsuk ki az átlagot, csökkentsük 6%-kal, és egészre kerekítve jelenítsük meg a **D21**-es cellában. A **Z21:AL21** tartomány celláiba kerüljön „T” betű, ha az adott évben teljesült a célkitűzés, különben az adott cella maradjon üres.
10. Készítsünk a Kiotó-Doha nevű, diagram típusú munkalapra oszlopdiagramot a minta szerint az éves kibocsátásokról, jelenítsük meg vonalként a Kiotó-Doha küszöböt.

Segédszámításokat az **AP** oszloptól jobbra, illetve a **23.** sortól lefelé végezhetünk. A megoldásban saját függvény vagy makró nem használható.



Beküldendő egy tömörített *i636.zip* állományban a táblázatkezelő munkafüzet, illetve egy rövid dokumentáció, amelyben szerepel a megoldáskor alkalmazott táblázatkezelő neve, verziószáma.

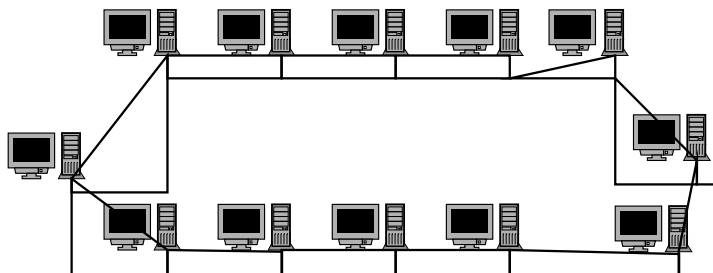
Az adatok forrása: https://www.ksh.hu/stadat_files/kor/hu/kor0017.html

Letölthető fájl: **uveg.txt**.

(10 pont)

I. 637. A számítógépes hálózatok fejlesztésének hőskorában különféle eljárásokat találtak ki a gépek közötti kommunikáció megvalósítására. Az egyik ilyen technológia logikailag kör alakban egymáshoz kapcsolt számítógépek közötti adatátvitelt valósít meg. A kört gyűrűnek is hívják, a technológia neve Token Ring, elterjesztője az 1980-as évektől az IBM volt.

Tekintsük úgy, hogy a számítógépek kör alakban vannak elrendezve és egy közös adatátviteli vonalra csatlakoznak. Ezen a vonalon halad egy irányba körbe egy speciális jel, a token, illetve mögötte az adatok. Ha nincs a vonalon adat, tehát egyik gép sem küld a másoknak, akkor csak a token utazik körbe. Ha van adat,



akkor az a token mögött van és tartalmazza az adatot küldő és fogadó számítógép címét is.

A számítógépek a vonalat figyelik, és ha elér egy géphez a token, akkor a következők egyike történik:

- Ha a token 0 értékű és nincs mögötte adat, akkor a vonalon éppen nem történik adatküldés. Ha a gép küldeni akar adatot, akkor megteheti: a token 1-re állítja, és elhelyezi mögötte a vonalon az adatot a küldő és fogadó gép címével együtt. Ha nem akar küldeni, akkor csak továbbküldi a 0 értékű token a körben következő gépnek.
- Ha a token 1 értékű és van mögötte adat, akkor a gép megvizsgálja, hogy ki az adat címzettje. Ha ő a címzett, akkor kiolvassa az adatot, majd továbbküldi a token 0 értékkel és magát az adatot is. Ha nem ő a címzett, akkor továbbküldi a kapott token 1-es értékkel és az adatot is.
- Ha a token 0 értékű és van mögötte adat, akkor a gép megvizsgálja, hogy ő volt-e az adat feladója. Amennyiben ő volt, akkor törli az adatot és továbbküldi a token 0 értékkel. Ha nem ő volt a feladó, akkor továbbküldi az adatot és a token 0 értékkel.

A gépek ilyen szabályok szerinti működése biztosítja, hogy a hálózaton mindig csak egy adat legyen, és ne történhessen meg, hogy két gép egyszerre küld adatot, mert ekkor a vonalon lévő elektromos jelek értelmezhetetlenné válnának. Ezt a jelenséget ütközésnek nevezik, amelyet a Token Ring technológiával így el lehet kerülni. A ma legelterjedtebb Ethernet technológia másként oldja meg az ütközés problémáját.

A Token Ring működésének hatékonysága függ attól, hogy hány számítógép van a körben, illetve ezek a gépek mekkora valószínűséggel kívánnak adatokat küldeni. Készítsünk számítógépes programot és modellezzük a hálózat működését: vizsgáljuk meg, hogy átlagosan mennyi időbe telik egy adatsomag átvitele két gép között. A modellezés során feltételezzük, hogy a token és az adat egyik géptől a mellette lévő másik gépig egy időegység alatt ér át. A számítógépek a modellben elhanyagolható idő alatt végzik a tevékenységüket, tehát a t -edik időegységben fogadott token és adatot a $(t + 1)$ -edik időegységben küldik tovább.

A szimuláció során minden gép, amely éppen nem kíván adatot küldeni egy véletlenszámtól függően eldönti, hogy a következő időegységtől kezdve küld-e adatot, vagy sem. Az adatküldésre való hajlandóságot egy H véletlenszámmal adjuk meg. Ha egy gép egyszer úgy döntött, hogy küldeni szeretne, akkor egészen addig ebben

az állapotában marad, amíg az adat elküldése és annak nyugtázása meg nem történik. Ez a Token Ring esetében akkor következik be, amikor egy 0 értékű token mögött olyan adatot olvas a gép a vonalról, amelynek ő a feladója.

Példaként egy 10 gépből álló hálózatban az egyik gép adatot akar küldeni egy tőle 4 egységre lévő másik géphez. Az adatküldés igényétől kezdve példaként még várnia kell 15 időegységet, hogy elérjen hozzá a 0 értékű token adatok nélkül. Ekkor feladja az adatot és 1-re állítja a tokent, amely 4 időegység múlva megérkezik a fogadóhoz. A fogadó beolvassa a számára küldött adatot, majd 0 tokennel továbbítja azt. A token és az adat 6 időegység után visszaérkezik a feladó géphez, amely nyugtázza a sikeres adatküldést, ami így $15 + 4 + 6$ időegységig tartott.

A program standard bemenetének egyetlen sorában a gépek N száma ($2 \leq N \leq 255$), a gépek adatküldését jellemző H valószínűség ($0 \leq H < 1$), valamint a szimuláció teljes idejét időegységben megadó T érték ($1000 \leq T < 100000$) található egy-egy szóközzel elválasztva.

A program a standard kimenetre egy egész és egy valós számot írjon szóközzel elválasztva: mennyi adatot sikerült a szimuláció során átjuttatni a hálózaton, illetve átlagosan mennyi idő telt el egy-egy adat esetén a küldési hajlandóságtól az adatküldés nyugtázásáig.

Példák:

Bemenet	Kimenet
10 0.001 2000	18 17.8
10 0.002 2000	36 16.3
10 0.01 2000	148 37.8
10 0.02 2000	175 60.1
20 0.02 10000	475 363.1
25 0.05 10000	384 612.0

Beküldendő egy tömörített *i637.zip* állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

(10 pont)

I. 638. A www.balatonihajok.hu portálról sok olyan balatoni hajózásra jellemző adatot ismerhetünk meg, amely történetileg és a jelenben érdekes lehet.

A rendelkezésre álló és letölthető adatbázisban a különböző korú, típusú, funkciójú és tulajdonosú hajókkal foglalkozunk, ezek adatai állnak rendelkezésre.

Az adatbázis a következő táblákat tartalmazza:

Táblák

hajo (az, nev, tipus, tulaz, uzemel)

az a hajó azonosítója (szám), ez a kulcs

nev a hajó jelenlegi neve (szöveg)

tipus a hajó típusa (szöveg), például: komp, személyhajó, uszály stb.

tulaz a hajó tulajdonosának azonosítója (szám), kitöltetlen, ha az adat ismeretlen

uzemel a hajó jelenleg üzemel-e (logikai), ha üzemel, akkor értéke 1, ha a forgalomból kivonták, akkor 0

tort (az, hajoz, nev)

az a hajó történeti bejegyzésének azonosítója (számláló), ez a kulcs

hajoz a hajó azonosítója (szám)

nev a hajó régebbi neve (szöveg)

tulajdonos (az, nev, varos)

az a tulajdonos azonosítója (szám), ez a kulcs

nev a jelenlegi tulajdonos neve (szöveg)

varos a tulajdonos székhelye (szöveg)

A következő feladatokat megoldó SQL parancsokat rögzítsük a *bh_megoldas.sql* nevű állományban a feladatok végén zárójelben megadott névvel. A javítás során csak ennek az állománynak a tartalma lesz értékelve. Ügyeljünk arra, hogy a lekérdezésekben pontosan a kívánt mezők szerepeljenek, felesleges mezőt ne jelenítsünk meg. A feladat megoldásához a digitális kultúra emelt szintű érettségien használható XAMPP használatát javasoljuk.

1. A *hajolista.sql* állomány tartalmazza az adatbázist és a táblákat létrehozó, valamint az adatokat a táblába beszűrő SQL parancsokat. Futtassuk a lokális SQL szerveren a *hajolista.sql* parancsfájlt.
2. Készítsünk lekérdezést, amely ábécérendben jeleníti meg a jelenleg is üzemelő vitorlások nevét. (**2vitorlas**)
3. Lekérdezés segítségével írassuk ki azoknak a hajóknak a nevét és tulajdonosait, amelyek jelenlegi neve tartalmazza a „**Balaton**” szórészetet. (**3balaton**)
4. Készítsünk lekérdezést, amely az „**Angolna**” nevű hajó tulajdonosának birtokában lévő hajók nevét és típusát kilistázza. (**4angolna**)
5. Készítsünk lekérdezést, amely meghatározza, hogy a „**Balatoni Hajózási Zrt.**” az összes hajó hány százalékának tulajdonosa. (**5bahart**)
6. Lekérdezés segítségével határozzuk meg azoknak a tulajdonosoknak a nevét és székhelyét, akik személyhajóval nem, de uszályval rendelkeznek. A listában minden tulajdonosnév egyszer jelenjen meg. (**6uszaly**)
7. Lekérdezés segítségével írassuk ki a legtöbb névváltoztatáson átesett hajók jelenlegi nevét és tulajdonosait. (**7soknev**)
8. Lekérdezés segítségével adjuk meg azoknak a tulajdonosoknak a nevét, akik személyhajóval nem rendelkeznek. A listában a tulajdonosok neve ábécé sorrendben, ismétlődés nélkül jelenjen meg. (**8nevek**)
9. Készítsünk lekérdezést, amely megadja, hogy típusonként hány hajó nem üzemel jelenleg. A listában a típus neve és a darabszám jelenjen meg – az utóbbi szerint csökkenően rendezve. (**9tipus**)

Letölthető állomány: *hajolista.sql*.

(10 pont)



Beküldési határidő: 2024. november 15.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>





Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenye Versenyfelhívás és beszámoló



Ha szereted a fizikát, a kísérletezést, jól beszélsz angolul, és egy életre szóló élményre vágysz, akkor itt a helyed!

A Fizika Világ bajnokságnak is nevezett IYPT (Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenye, angolul International Young Physicists' Tournament, <https://www.iypt.org>) egy angol nyelvű, kísérleti fizikai csapatverseny, ahova a világ minden tájáról (több mint 30 országból) érkeznek középiskolások, hogy összemérjék tudásukat. Az IYPT a XXI. század kihívásainak megfelelő készségeket vár el az indulóktól: nemcsak a fizikában kell jártasnak lenni, hanem az eredményeket prezentálni és megvédeni is tudni kell! A résztvevő diákok a versenyt megelőzően elvégzett fizikai méréseiket és kutatásaikat egy – angol nyelven előadott – tudományos prezentáció formájában mutatják be a rivális csapatoknak. Az IYPT verseny magyarországi első fordulójára (Hungarian Young Physicists' Tournament, HYPT) a <http://www.hypt.elte.hu> oldalon való regisztráció határideje:

2024. október 24. éjfél.

A jelentkező diákoknak a honlapról választott IYPT problémáról (elérhetőek itt: <http://hypt.elte.hu/hypt/versenyfeladatok/>) egy legfeljebb 8 oldalas magyar nyelvű dolgozatot kell beküldeniük. Beküldési határidő: 2024. november 29. Ezek alapján a legjobbak az ELTE TTK-án, 2024 december közepén megrendezésre kerülő szóbeli fordulón vehetnek részt. Az induló diákoknak itt az általuk beküldött dolgozat eredményeit élőben kell előadniuk 10 percben, majd kutatásukat megvédeniük.

A decemberi szóbeli fordulót követően a 10 legmagasabb pontszámot elérő diák az ELTE TTK Anyagfizikai Tanszékén végezheti a további kutatásait. A felkészülés során nyújtott teljesítmény alapján 3 diák indulhat az osztrák AYPT versenyen, az 5 legjobb diák pedig bekerül a svédországi Lundban megrendezésre kerülő 38. IYPT magyar csapatába.

További információkért látogass el a 2024. október 16-án megrendezésre kerülő nyílt napunkra (<http://hypt.elte.hu/hypt-nyilt-nap-2024/>). Jelentkezés, a feladatok szövege és sok hasznos tudnivaló a <http://hypt.elte.hu> weboldalon.

Néhány példa a 2025-re kitűzött IYPT problémák közül:

3. Lato Lato: Egy madzag mindkét végéhez rögzítsünk egy golyót, és a madzag közepét kössük egy tengelyhez. Amikor a tengely függőleges irányban rezeg, a golyók ütközni kezdenek és növekvő amplitúdóval rezegnek. Vizsgáld meg a jelenséget!

7. Vonalzóágyú: Két vonalzót szorítsunk egymáshoz szorosan. Egy kerek lövedéket (pl. egy műanyag palack kupakját vagy egy golyót) helyezzünk közéjük az egyik végükhöz közel. Ha a vonalzők felületére extra erőt fejtünk ki, a lövedék nagy sebességgel kilöködik. Vizsgáld meg ezt a hatást és a kilövési sebességet befolyásoló paramétereket!

14. Vízpalack-rakéta: Pumpálj levegőt egy vízzel részben teli műanyag vizes palackba. Bizonyos körülmények között a palack elindul és a levegőbe repül. Vizsgáld meg, hogy a felszállás közbeni gyorsulás hogyan függ a releváns paraméterektől!

Az eddigi legnagyobb IYPT verseny Magyarországon

2024. július 10-17. között került megrendezésre 37. alkalommal az Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenye. A megmérettetés 38 ország részvételével zajlott, mely az eddigi legnagyobb IYPT verseny. A magyar csapat csodás versenyzéssel a 10. helyen végzett, mellyel bronzérmet érdemelt ki.

A felkészülési időszak során a hallgatók kutatásaik folytatása mellett a verseny körülményeit szimulálva próbálták el előadásait. A megmérettetésen a saját kutatási eredmények prezentálása mellett a többi ország eredményeinek opponálása és értékelése (review) is a verseny része. Az ELTE TTK IYPT laborja az év folyamán megtelt a kísérletekhez és mérésekhez szükséges eszközökkel. Ezen komplex alkotói munka során a diákok a fizikáról sokat tanulva megismerték a valódi kutatómunka örömeit és nehézségeit is. A felkészülés fontos pillanata az edzőtábor, ahol a kutatói munkát és előadások gyakorlását közösségi programok és játékok váltották egy idilli balatoni környezetben.

A 2024-es IYPT verseny szervezése az Eötvös Loránd Tudományegyetem és a Budapesti Műszaki Egyetem együttműködése során jött létre. A szervezést számos ipari partner is segítette. A nagy meleg nagyon megnehezítette a hétköznapiakat, de így is sikerült megmutatni Budapestet, és a csapatok részt vettek a visegrádi várjátékokon. A döntő a Bosch innovációs kampuszán került megrendezésre, és az egész hetes programot egy nagy buli zárta a Dürer-kertben. További információkért látogasd meg és kövesd Facebook oldalunkat: www.facebook.com/hypt.elte.hu, ahol a csapat részletes élménybeszámolóját, képeit és eseményeit találod, amik többet mondanak minden szónál!

A magyar csapat tagjai voltak:

Farkas László (Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium, 11. évf.)

Sade Dániel (Lauder Javne Zsidó Közösségi Iskola, 12. évf.)

Sinóros-Szabó Zsombor (Piarista Gimnázium, 11. évf.)

Szederkényi Kincső (Budapesti Német Iskola, 11. évf.);

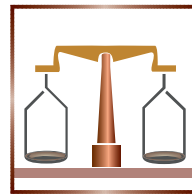
Sztrányai Milán (Budapest XVII. kerületi Balassi Bálint Nyolcévfolyamos Gimnázium, 11. évf.)

A versenyzők felkészítése az ELTE Anyagfizikai Tanszékén folyt egyetemi hallgatók, oktatók és középiskolai tanárok vezetésével. Egyetemi és középiskolai oktatók: *Hörmöstre Mihály* (Budapesti Német Iskola, ELTE), *Ispánovity Péter* (ELTE), *Jenei Péter* (ELTE), *Széchenyi Gábor* (ELTE), *Vincze Miklós* (ELTE-MTA), *Jéhn Zoltán* (TU Wien), *Tóth Kristóf* (Czuczor Gergely Bencés Gimnázium, ELTE). Hallgatók és doktoranduszok: *Kadlecsik Ádám* (ELTE), *Penc Patrik* (BME), *Simon Tamás* (ETH Zürich), *Pesthy Sándor Gergely* (ELTE Radnóti Miklós Gimnázium), *Kosztó Péter* (Semilab), *Varga Szabolcs* (Leővey Klára Gimnázium).

A sok nevetéssel és kemény munkával töltött év után most indul a felkészülés a 2025-ös megmérettetésre, mely Lundban kerül megrendezésre.

az HYPT szervezői csapata

Mérési feladatok megoldása



M. 430. Egy hurkapálca egyik végét fogjuk be vízszintesen, a másik végét pedig kezdjük el terhelni. Végezzük el a mérést különböző hosszúságú pálcákkal. Hogyan függ a pálca végének lehajlása a terhelés tömegétől és a pálca szabad részének hosszától? Határozzuk meg a hurkapálca anyagának Young-modulusát!

(6 pont)

Közli: Széchenyi Gábor, Budapest

Megoldás. Mérésünk során egy hurkapálca Young-modulusát igyekeztünk meghatározni a pálcára akasztott súlyok segítségével.

1. Mérési elrendezés, a mérés menete, mérési eredmények

A hurkapálca végétől nagyjából 1 cm-re kis bevágást készítettünk (bicskával), amelyre kötélből formált hurkot rögzítettünk. A hurok másik végére akasztottuk a súlyokat, ehhez kampóval ellátott iskolai mérőszúlyokat használtunk. A pálcán mérőszalag segítségével a bevágástól 2,5 cm-enként jelzéseket helyeztünk el. Ezután vízszintes asztalra helyeztük a pálcát, úgy, hogy a szélénél legyen épp a használni kívánt jelzés. Ezt követően egyikünk rátenyerelt a pálca asztalon található részére, oly módon, hogy a pálca minden részét az asztalra nyomja. Ez azért volt szükséges, mert ha csak egy ponton nyomtuk volna le a pálcát, akkor az asztal fölötti része meggörbül. Eközben másikunk ráakasztotta a kötéltre a súlyt, és megmérte a pálca végének lehajlását. A lehajlást úgy mértük, hogy az asztalon közvetlenül az előző pálca mellett elhelyeztünk egy terhelés nélküli hurkapálcát is. Ezután mérőszalag segítségével könnyedén meg tudjuk mérni, hogy a terhelt hurkapálca mennyit hajolt le a vízszinteshez képest. Az 1. ábra képein a mérés folyamata látható.



1. ábra

A mérés során egy adott súllyal megmértünk minden lehetséges távolságot, tehát, amíg a pálca el nem törött, vagy maradandó elváltozást nem szenvedett. Ezután ugyanabból a csomagból választottunk egy másik pálcát, és azzal elvégeztük

a mérést a következő tömeget használva. A mérőszívek tényleges tömegét mindig ellenőriztük mérleg segítségével. A mérési eredményeket az 1. táblázat tartalmazza.

<i>m</i> (g)	<i>ℓ</i> (cm)										
	7,5	10	12,5	15	17,5	20	22,5	25	27,5	30	32,5
50	0,3	0,4	0,7	1,2	1,9	2,9	3,6	4,5	6,1	7,5	9,8
100	0,5	0,9	1,9	3,5	4,7	6,4	8,6	10,8			
150	0,7	1,4	2,6	4,5	6,8	9,5					
200	0,9	1,9	3,8	6,7							
250	1,0	2,3	4,5	7,8							

1. táblázat. Mért lehajlások cm-ben

2. Elméleti háttér

A mérés elméletének alapjául Radnai Gyula KöMaL cikkét vettük¹. Az itt található levezetés alkalmazható a mérésre, ugyanis a hurkapálca tömege elhanyagolható a súlyok tömegéhez képest, illetve főként kis lehajlásokkal dolgoztunk, amikor még alkalmazható a görbületre az alábbi közelítés:

$$g = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Ez alapján az *ℓ* hosszúságú hurkapálca végének lehajlása:

$$(1) \qquad \Delta y = \frac{F}{EI} \frac{\ell^3}{3},$$

ahol *F* a terhelőerő, *I* a hurkapálca másodrendű (felületi) nyomatéka, *E* pedig a keresett Young-modulus. Természetesen a levezetés során azt is feltettük, hogy a hurkapálca anyageloszlása homogén, így mindenhol jó közelítéssel ugyanakkora a Young-modulus. Levezethető, de interneten is megtalálható, hogy egy henger másodrendű nyomatéka:

$$I = \frac{\pi r^4}{4},$$

ahol *r* a henger keresztmetszetének sugara. Ez a hurkapálcák esetén 1,5 mm-nek adódott. Ezt behelyettesítve (1)-be, és azt átrendezve:

$$(2) \qquad E = \frac{4F\ell^3}{3\pi\Delta y r^4}.$$

3. Számolt értékek, következtetések, diszkusszió

Mivel feltesszük, hogy az összes hurkapálca esetén minden hossz – tömeg párosnál azonos a Young-modulus, így a (2)-es képletbe a mért értékeket behelyettesítve kapjuk a 2. táblázatot, amelyben az 1. táblázat egy-egy cellájához tartozó Young-modulusok láthatók.

A 2. táblázat adatait átlagolva, és azok szórását figyelembe véve:

$$E_1 = (10,3 \pm 2,3) \text{ GPa.}$$

¹Radnai Gyula: A hajlításról

m (g)	ℓ (cm)										
	7,5	10	12,5	15	17,5	20	22,5	25	27,5	30	32,5
50	5,8	10,3	11,5	11,6	11,6	11,3	13,0	14,3	14,0	14,8	14,4
100	8,7	9,1	8,5	7,9	9,4	10,3	10,9	11,9			
150	7,4	8,8	9,3	9,3	9,7	10,4					
200	7,7	8,7	8,5	8,3							
250	8,7	8,9	8,9	8,9							

2. táblázat. Számolt Young-modulusok GPa-ban

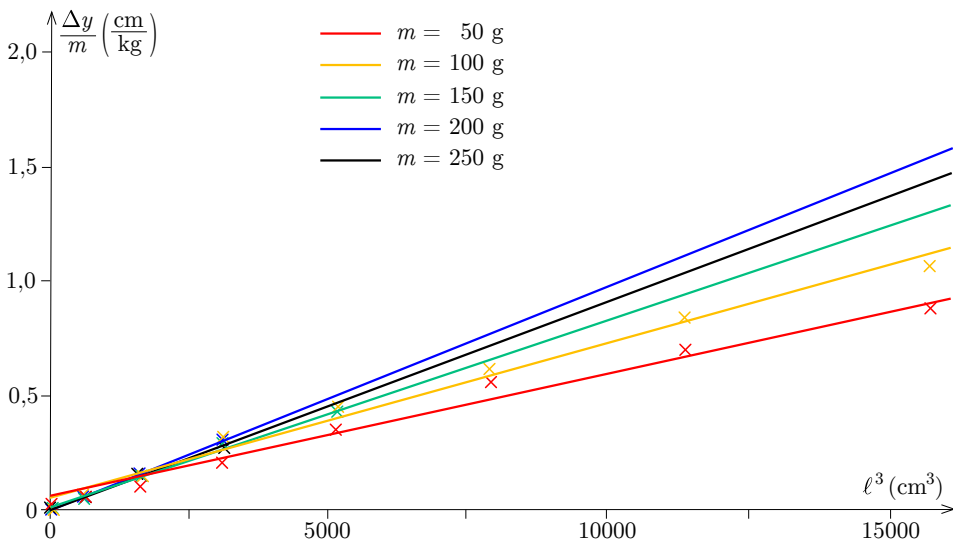
Látható, hogy sajnos a mért Young-modulusokban jelentős eltérések adódtak. Az is észrevehető, hogy az 50 g tömeggel terhelt pálca eredményei „lógnak ki” a legjobban. Azt gyanítjuk, hogy ezen mérések során valamilyen rendszeres hibával dolgoztunk, emiatt kaptunk konzisztensen nagyobb értékeket. Ezeket az eredményeket figyelmen kívül hagyva, is még 22 adatpontunk marad, amelyből kellően pontos következtetéseket vonhatunk le. Az ezekből számolt Young-modulus:

$$E_2 = (9,1 \pm 1,0) \text{ GPa.}$$

Eredményeinket grafikusan is feltüntettük. Minden tömeg és hossz esetén a pálca-hossz köbének függvényében ábrázoltuk a lehajlás és a terhelőtömeg hányadosát. Ekkor (1) alapján az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\frac{\Delta y}{m} = \frac{g}{3EI} \ell^3.$$

Ebből kiindulva egyeneseket illesztettünk az azonos tömegű terheléshez tartozó adatpontokra (2. ábra).



2. ábra

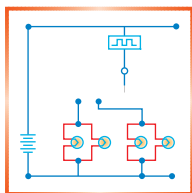
A fenti képlet alapján minden egyenes meredekségét ugyanakkorára várjuk, így ez is jól mutatja, hogy mekkora a mérésünk bizonytalansága. Természetesen

a meredekségek átlagából is kiszámolhatnánk a Young-modulus értékét, azonban ez nem hordozna többletinformációt a fent kiszámított eredményekhez képest.

Könnyen meghatározható a lehajlások méréséből eredő hiba, ez $\pm 0,5$ mm. Ezenkívül viszont szerintünk sok hiba származhatott az anyagi eltérésekből. Miután egy pálcát terhelünk, akár kis súllyal is, valószínűleg megváltozik az anyagi összetétele, és már nem fog akkora Young-modulussal rendelkezni. Emellett természetesen az is csak közelítés, hogy minden pálcának ugyanolyan, és tökéletesen homogén a belső szerkezete, ezek is mind-mind növelik a mérés pontatlanságát.

Az Ébredő Erő csapat: Csóka Péter, Schäffer Donát
(Pécsi Janus Pannonius Gimn., 12. évf.)

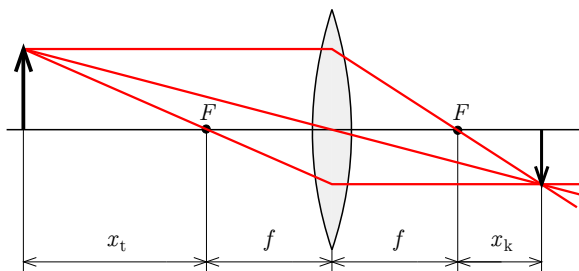
10 dolgozat érkezett. Helyes 4 megoldás. Kicsit hiányos (4–5 pont) 5, hiányos (2 pont) 1 dolgozat.



Fizika gyakorlatok megoldása

G. 855. Newton nem a szokásos alakjában $\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}\right)$ írta fel a leképezési törvényt. Ő a tárgyardali fókuszponttól mérte az x_t fókuszontúli tárgytávolságot, illetve a képoldali fókuszponttól mérte az x_k fókuszontúli képtávolságot, ahogy ez az ábrán látható.

a) Adjuk meg a legegyszerűbb alakban a leképezési törvényt ezekkel a paraméterekkel!



b) Hogyan alkalmazható ez a képlet szórólencsékre?
(4 pont)

Megoldás. a) A feladat ábrájából leolvasható a következő két összefüggés:

$$\begin{aligned} t &= x_t + f, \\ k &= x_k + f. \end{aligned}$$

Ezeket behelyettesítve a leképezési törvény szokásos alakjába, majd rendezve megkapjuk a Newton-féle alakot:

$$\begin{aligned}\frac{1}{t} + \frac{1}{k} &= \frac{1}{f}, \\ \frac{1}{x_t + f} + \frac{1}{x_k + f} &= \frac{1}{f}, \\ \frac{x_k + f + x_t + f}{(x_t + f)(x_k + f)} &= \frac{1}{f}, \\ x_k + x_t + 2f &= \frac{x_t x_k + x_t f + x_k f + f^2}{f}, \\ x_k + x_t + 2f &= \frac{x_t x_k}{f} + x_t + x_k + f, \\ f &= \frac{x_t x_k}{f}, \\ x_t x_k &= f^2.\end{aligned}$$

b) Szórólencse esetén a fókusz távolság negatív, ilyen esetben az x_t és x_k az ábrán látható módon, a túldoldali fókuszponttól mérve definiálható.

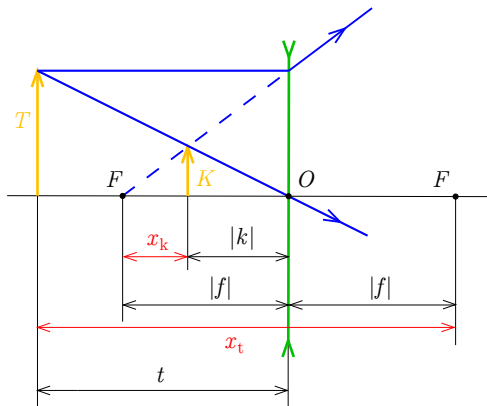
Az ábráról leolvashatók a következő összefüggések:

$$\begin{aligned}t &= x_t - |f|, \\ t &= x_t + f,\end{aligned}$$

valamint

$$\begin{aligned}|k| &= |f| - x_k, \\ -k &= -f - x_k, \\ k &= x_k + f.\end{aligned}$$

(Itt felhasználtuk, hogy mivel $f < 0$, $|f| = -f$, valamint hogy virtuális kép esetén $k < 0$ miatt $|k| = -k$.) Látható, hogy t és k kifejezései megegyeznek az a) részben szereplő kifejezésekkel, és így a Newton-féle leképezési törvény változatlanul érvényes (hiszen f^2 előjele mindig pozitív). Az ábráról az is leolvasható, hogy x_t és x_k minden esetben pozitív.



Fülöp Magdaléna (Pécsi Leőwey Klára Gimn., 9. évf.)

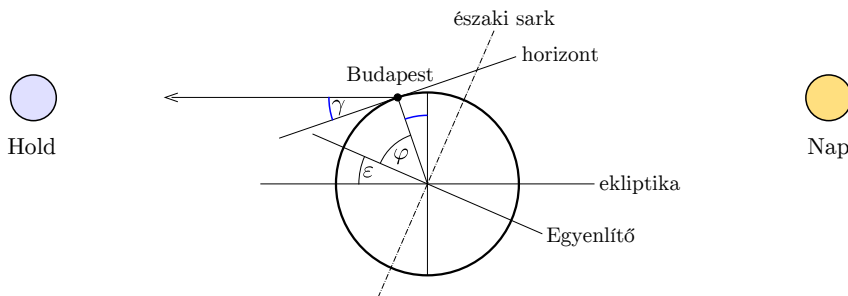
28 dolgozat érkezett. Helyes 3 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 8, hiányos (1–2 pont) 16, hibás 1 dolgozat.

G. 856. *Budapesten mikor delel magasabban a Hold, egy decemberi vagy egy júniusi holdtölte idején?*

(4 pont)

Megoldás. Teliholdkor a Nap – Föld – Hold (körülbelül) egy vonalban helyezkedik el. Nyáron (az északi féltekén) a Föld tengelye az 1. ábrán látható módon a Nap felé billen, $\varepsilon \approx 23,5^\circ$ szöggel. Budapest az északi szélesség $\varphi = 47,5^\circ$ -nál helyezkedik el. Az ábra alapján meghatározhatjuk a nyári budapesti telihold horizont feletti γ delelési magasságát (amikor körülbelül éjjélkor a legmagasabban jár). A kék ívvel jelölt szögek egyenlők, mert merőleges szárú szögek. Így a Hold delelési magassága nyáron:

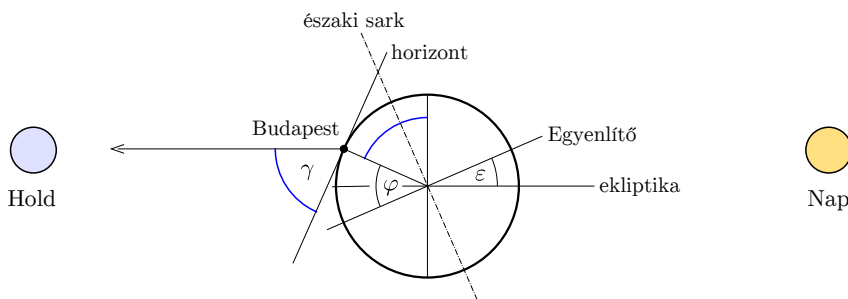
$$\gamma_{\min} = 90^\circ - \varepsilon - \varphi \approx 19^\circ.$$



1. ábra

A 2. ábra a téli helyzetet mutatja. Ekkor (az északi féltekén) a Föld tengelye a Naptól elfelé billen. Eszerint a Hold delelési magassága télen:

$$\gamma_{\min} = 90^\circ + \varepsilon - \varphi \approx 66^\circ.$$



2. ábra

Tehát télen magasabban delel Budapesten a telihold, mint nyáron.

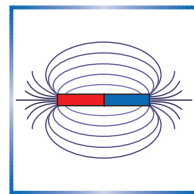
Barth Albert Krisztián (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 9. évf.)

Megjegyzések. 1. A Hold pályája $\delta \approx 5^\circ$ szöget zár be az ekliptikával, ezért teliholdkor általában nincs pontosan a Nappal ellentétes irányban. (Emiatt nincs minden hónapban holdfogyatkozás.) A delelési magasság így $\pm 5^\circ$ -kal változhat a megoldásban kiszámított-hoz képest, ez azonban nem változtat a végkövetkeztetés helyességén.

2. A déli féltekén – ugyanilyen megfontolások alapján – akkor delel magasabban a telihold, amikor ott tél van, tehát júniusban.

31 dolgozat érkezett. Helyes 15 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 6, hiányos (1–2 pont) 8, hibás 2 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása



P. 5547. Egy kicsi fagolyót 30 cm hosszú fonálra kötünk, és a fonál szabad végét egy vödör fenekén, a középponttól 20 cm távolságban rögzítjük. A vödörbe vizet töltünk, és a szimmetriatengelye körül forgatni kezdjük. (A víz mindvégig ellepi a golyót.) Mekkora szögsebességgel kell a vödröt forgatnunk, hogy hosszú idő után a fonál a függőlegessel 30° -os szöget zárjon be?

(5 pont)

Quantum Magazine nyomán

Megoldás. Vizsgáljuk a golyót a vödörrel együtt forgó koordináta-rendszerben. A V térfogatú golyóra függőleges irányban hat az F_f felhajtóerő és az mg nehézségi erő, ezekkel tart egyensúlyt a K kötelerő függőleges komponense:

$$K \cos \alpha = F_f - mg = (\rho_{\text{víz}} - \rho_{\text{fa}}) V g.$$

Ahogy függőlegesen lefelé a nehézségi erő hat, úgy sugárirányban kifelé – mind a folyadékra, mind a testre – a centrifugális erő hat a forgó rendszerben. Így egy vízszintes irányú „felhajtóerő” is ébred, amely a folyadékra ható centrifugális erővel ellentétes irányú, tehát sugárirányban befelé mutat. Ennek az erőnek a nagysága Arkhimédész törvényének „általánosításával”:

$$F'_f = \rho_{\text{víz}} V \omega^2 r,$$

ahol az ábráról leolvashatóan

$$r = d - \ell \sin \alpha = 0,05 \text{ m}.$$

Ezzel és a golyóra ható centrifugális erővel tart egyensúlyt a kötelerő vízszintes komponense:

$$K \sin \alpha = F'_f - m \omega^2 r = (\rho_{\text{víz}} - \rho_{\text{fa}}) V \omega^2 r.$$

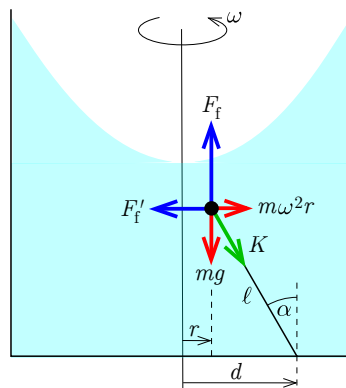
A két egyenletet egymással elosztva:

$$\frac{K \sin \alpha}{K \cos \alpha} = \frac{(\rho_{\text{víz}} - \rho_{\text{fa}}) V \omega^2 r}{(\rho_{\text{víz}} - \rho_{\text{fa}}) V g},$$

amiből

$$\omega = \sqrt{\frac{g \tan \alpha}{r}} = 10,6 \frac{1}{\text{s}}.$$

Tóth Hanga Katalin (Kecskeméti Bányai Júlia Gimn., 10. évf.)



Megjegyzés. A feladat megoldható *inerciarendszerben* is. Ekkor a mozgásegyenletet az alapján írhatjuk fel, hogy a fagolyót a nehézségi erő, a víz által kifejtett erő és a kötélrő eredője tartja körpályán. Vektoriális alakban:

$$-m\omega^2 \mathbf{r} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{\text{víz}} + \mathbf{K}.$$

A forgó víz által a golyóra ható erő meghatározásához érdemes végiggondolni, mi történik a nyugvó folyadékban. Ha a golyó helyén is folyadék lenne, akkor a körülötte lévő folyadék által kifejtett nyomóerők eredőjének a test helyén lévő folyadék súlyát kellene megtartania. Ezért a folyadékba helyezett testre is ugyanez az erő hat, ebből kapjuk meg, hogy a felhajtóerő nagysága a kiszorított folyadék súlyával egyenlő, és ellentétes irányú.

A forgó folyadékban a folyadék minden kis darabja gyorsul a forgástengely felé, tehát ebben az esetben a körülötte lévő folyadéknak nem csak a folyadék súlyát kell megtartania, hanem a forgástengely felé mutató vízszintes erőt is ki kell fejtenie, amellyel azt a forgástengely felé gyorsítja. Ha a golyót ennek a kis folyadékdarabnak a helyére rakjuk, akkor arra is ugyanezzel az erővel hat a folyadék:

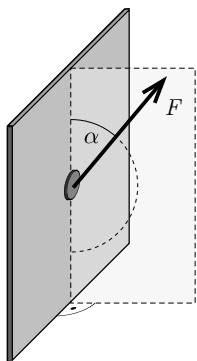
$$\mathbf{F}_{\text{víz}} = -\rho_{\text{víz}} V(\mathbf{g} + \omega^2 \mathbf{r}).$$

Ezt behelyettesítve a mozgásegyenletbe és rendezve:

$$\mathbf{K} = (\rho_{\text{víz}} - \rho_{\text{fa}}) V(\mathbf{g} + \omega^2 \mathbf{r}).$$

Látható, hogy a $\mathbf{g} + \omega^2 \mathbf{r}$ vektor párhuzamos a fonállal, amelyből adódik az eredmény.

45 dolgozat érkezett. Helyes 9 megoldás. Kicsit hiányos (3–4 pont) 7, hiányos (1–2 pont) 20, hibás 9 dolgozat.



P. 5548. Egy kicsiny, lapos hűtőmágnes súlya G . A mágnes a hűtőszekrény függőleges oldalára helyezzük, majd a fémlapra merőleges, függőleges síkban valamilyen irányba húzni kezdjük. A legkisebb erő, amivel meg tudjuk mozdtatni a mágnes függőlegesen felfelé, F_1 , lefelé pedig F_2 .

a) Mekkora a mágnes és a hűtőszekrény oldala közötti tapadási súrlódási együttható?

b) Mekkora húzóerővel hat a fémlemez a mágnesre, amikor azt nem húzzuk semerre?

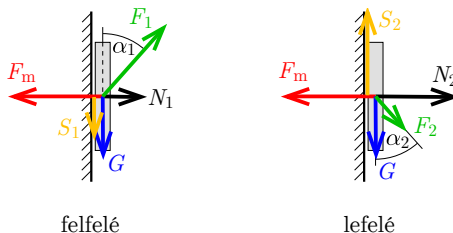
Adatok: $G = 0,10 \text{ N}$, $F_1 = 0,20 \text{ N}$ és $F_2 = 0,05 \text{ N}$.

(Lásd még a **G. 702.** számú gyakorlatot a KöMaL 2020. évi 3. számában.)

(5 pont)

Közli: Gnädig Péter, Vácduka

Megoldás.



a) Vizsgáljuk a határeseteket, amikor a mágnes épp megmozdul. Felfelé húzásnál

$$\begin{aligned} N_1 &= F_m - F_1 \sin \alpha_1, \\ F_1 \cos \alpha_1 &= G + \mu N_1, \\ (1) \quad F_1(\cos \alpha_1 + \mu \sin \alpha_1) &= G + \mu F_m, \end{aligned}$$

míg lefelé húzásnál

$$\begin{aligned} N_2 &= F_m - F_2 \sin \alpha_2, \\ F_2 \cos \alpha_2 + G &= \mu N_2, \\ (2) \quad F_2(\cos \alpha_2 + \mu \sin \alpha_2) &= -G + \mu F_m. \end{aligned}$$

Esetünkben F_1 és F_2 minimálisak, ehhez $(\cos \alpha_1 + \mu \sin \alpha_1)$ és $(\cos \alpha_2 + \mu \sin \alpha_2)$ értékeknek maximálisnak kell lennie. Ebből következik, hogy $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. A kifejezés maximuma deriválás segítségével meghatározva:

$$\frac{d}{d\alpha}(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) = -\sin \alpha + \mu \cos \alpha = 0 \quad \rightarrow \quad \mu = \operatorname{tg} \alpha.$$

Az (1) és (2) egyenletek különbségéből:

$$(F_1 - F_2) \left(\cos \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \right) = 2G \quad \rightarrow \quad \cos \alpha = \frac{F_1 - F_2}{2G} \quad \rightarrow \quad \alpha \approx 41,4^\circ,$$

amiből a tapadási súrlódási együttható keresett értéke:

$$\mu = \operatorname{tg} \alpha \approx 0,9.$$

b) Az (1) egyenlet alapján:

$$F_m = \frac{F_1(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) - G}{\mu} \approx 0,2 \text{ N}.$$

Seprődi Barnabás Bendegúz (Óbudai Árpád Gimn., 12. évf.)

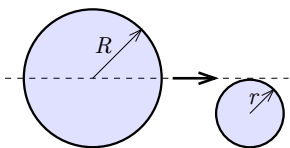
Megjegyzések. 1. A mágnes húzóerő hiányában nem csúszik le, azaz $\mu F_m \geq G$. Így a (2) egyenlet jobb oldalán álló kifejezés biztosan nemnegatív.

2. A $\cos \alpha + \mu \sin \alpha$ kifejezés maximuma deriválás nélkül is megkapható. Vezessük be a $\mu = \operatorname{tg} \varepsilon$ jelölést. Ezzel a kifejezés új alakja:

$$\cos \alpha + \frac{\sin \varepsilon \sin \alpha}{\cos \varepsilon} = \frac{\cos(\alpha - \varepsilon)}{\cos \varepsilon}.$$

A kifejezés (adott ε esetén) akkor maximális, ha $\alpha = \varepsilon = \operatorname{arctg} \mu$.

35 dolgozat érkezett. Helyes 18 megoldás. Kicsit hiányos (3–4 pont) 6, hiányos (1–2 pont) 5, hibás 6 dolgozat.

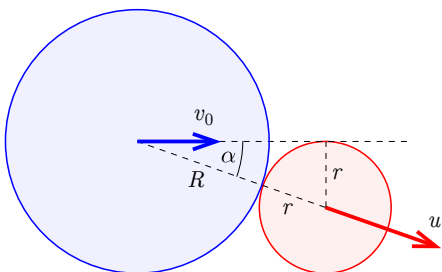


P. 5555. Vízszintes, nem teljesen síma asztallapon nyugszik egy r sugarú korong. A síkon egy nagyobb, $R = 2r$ sugarú korong forgásmentesen csúszik úgy, hogy a középpontja a kis korong érintője mentén mozog. Mindkét korong ugyanabból az anyagból készült és a magasságuk is ugyanakkora.

A rugalmasnak tekinthető ütközés után a nagy korong a súrlódás miatt lelassul és $d = 5 \text{ cm}$ út megtétele után megáll. Milyen irányban és milyen messzire jut el a kis korong az asztalon? A korongok közötti súrlódás elhanyagolható.

(4 pont)

Közli: Holics László, Budapest



1. ábra

Megoldás. Legyen a nagyobb korong sebessége az ütközés pillanatában v_0 , legyen a nagy korong tömege M , a kisebbé pedig m . Mivel a nagyobbik korong területe a kisebb területének négyszerese ($R = 2r$), a magasságuk és a sűrűségük pedig megegyezik, a tömege a kisebbének négyszerese: $M = 4m$. Mivel a korongok közötti súrlódás elhanyagolható, ezért az ütközés után sem fognak forogni.

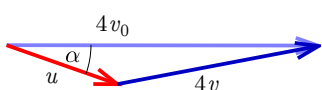
Legyen a nagyobbik korong ütközés utáni sebessége v , a kisebbnek pedig u . Mivel az ütközés tökéletesen rugalmas, és az ütközés nagyon rövid ideje alatt a testek kölcsönhatása a felülettel elhanyagolható, felírhatunk egyenleteket az energia- és a lendületmegmaradásra:

$$(1) \quad \frac{1}{2} M v_0^2 = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} m u^2 \quad \rightarrow \quad 4v_0^2 = 4v^2 + u^2,$$

$$(2) \quad M v_0 = M v + m u \quad \rightarrow \quad 4v_0 = 4v + u.$$

A kisebb korong az ütközésből csak a tömegközéppontokat összekötő egyenes mentén kaphat sebességet, ezért az u és v_0 vektorok által bezárt szöget ismerjük (lásd az 1. ábrát):

$$\sin \alpha = \frac{r}{R+r} = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad \alpha \approx 19,5^\circ.$$



2. ábra

A (2) egyenlet alapján megrajzolhatjuk a 2. ábrán látható vektorháromszöget. A koszinusztételt felírva:

$$(3) \quad (4v)^2 = u^2 + (4v_0)^2 - 8uv_0 \cos \alpha.$$

Mivel α hegyesszög,

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

amit behelyettesítve (3)-ba

$$(4) \quad 16v^2 = u^2 + 16v_0^2 - \frac{16\sqrt{2}}{3} uv_0.$$

Az (1) és (4) egyenletek u -ra és v -re kétismeretlenes egyenletrendszert adnak. Mindkét egyenletet elosztva u^2 -tel ($u \neq 0$), és bevezetve az

$$x = \frac{v_0}{u} \quad \text{és} \quad k = \frac{v}{u}$$

változókat, az alábbi egyenleteket kapjuk:

$$(5) \quad 4x^2 = 4k^2 + 1 \quad \rightarrow \quad 16k^2 = 16x^2 - 4,$$

$$(6) \quad 16k^2 = 1 + 16x^2 - \frac{16\sqrt{2}}{3}x.$$

(5)-öt (6)-ba behelyettesítve lineáris egyenletet kapunk (a négyzetes tag kiesik), amiből

$$x = \frac{v_0}{u} = \frac{15}{16\sqrt{2}},$$

majd ezt (5)-be behelyettesítve

$$k^2 = \frac{v^2}{u^2} = x^2 - \frac{1}{4} = \frac{97}{512}.$$

Legyen a korongok és a felület között a csúszási súrlódási együttható μ . A nagy korong a feladat szövege szerint $d = 5$ cm úton áll meg, a kis korong által a megállásig megtett utat jelöljük ℓ -lel. A munkatétel alapján

$$\frac{1}{2}Mv^2 = Mgm\mu d,$$

$$\frac{1}{2}mu^2 = mg\mu\ell.$$

A két egyenletet elosztva egymással

$$\frac{u^2}{v^2} = \frac{\ell}{d},$$

amiből

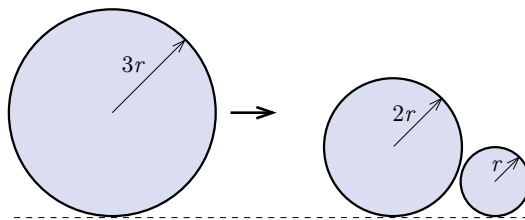
$$\ell = \frac{u^2}{v^2}d = \frac{d}{k^2} = \frac{512}{97}d \approx 26,4 \text{ cm}.$$

A kisebbik korong tehát az ütközés után 26,4 cm-t tesz meg a nagy korong kezdeti sebességvektorához képest $19,5^\circ$ -os szöget bezáró irányba (attól jobbra eltérülve).

Czírják Márton Pál (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

30 dolgozat érkezett. Helyes 12 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 6, hiányos (1–2 pont) 9, hibás 3 dolgozat.

P. 5566. *Vízszintes, nem teljesen sima asztallapon egymást majdnem érintve nyugszik egy $2r$ és egy r sugarú korong. A síkon egy harmadik, $3r$ sugarú korong forgásmentesen csúszik úgy, hogy a sebességvektora a három korong közös érintőjével párhuzamos (lásd a felülnézeti ábrát). Mindhárom korong ugyanabból az anyagból készült és a magasságuk is ugyanakkora.*



A rugalmasnak tekinthető ütközés után a $3r$ sugarú korong a súrlódás miatt lelassul és $d = 5$ cm út megtétele után megáll. Milyen irányban és milyen messzire jutnak el a kisebb korongok az asztalon? A korongok közötti súrlódás elhanyagolható.

Útmutatás: Lásd a **P. 5555.** feladatot lapunk 2024. márciusi számában és a *Komplex számok a fizikában I. cikket* a jelen számban.

(5 pont)

Közli: Holics László, Budapest

Megoldás. Mivel a korongok magassága és anyaga is azonos, ezért a tömegeik aránya sugaraik négyzetével arányos, tömegük rendre $9m$, $4m$ és m . A legnagyobb korong sebessége az első ütközés előtt legyen v_0 . A feladat megoldásához A *Komplex számok a fizikában I. cikkben*² bemutatott módszert fogjuk használni mindkét ütközés leírásához. A valós tengely legyen a v_0 vektorral párhuzamos.

Határozzuk meg az első ütközéskor a tömegközéppont w sebességét:

$$w = \frac{9mv_0}{13m} = \frac{9}{13}v_0.$$

Ez alapján az első test ütközés előtti sebessége a tömegközépponthez viszonyítva:

$$v_1 = v_0 - w = v_0 - \frac{9}{13}v_0 = \frac{4}{13}v_0,$$

a második testé pedig:

$$u_1 = -w = -\frac{9}{13}v_0.$$

A két test ütközés utáni *komplex* sebessége a tömegközépponthez viszonyítva:

$$v_2 = \overline{v_1}e^{2i\alpha},$$

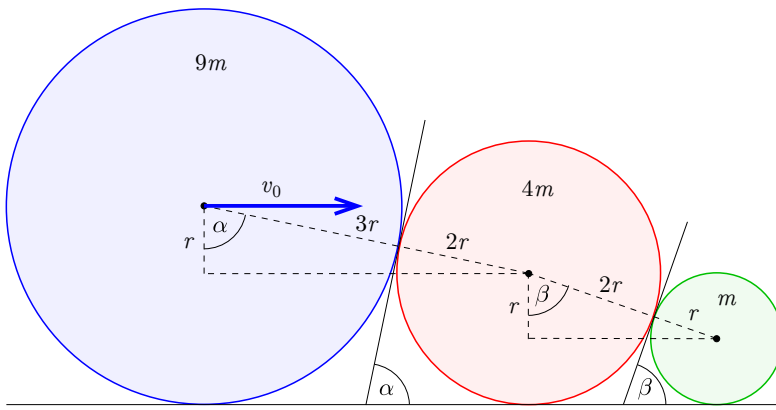
$$u_2 = \overline{u_1}e^{2i\alpha},$$

ahol a felülvonás a komplex konjugálást jelenti, α pedig a két kör közös belső érintőjének az x tengellyel bezárt szöge. Ebből a testek ütközés utáni komplex sebességei a nyugvó koordináta-rendszerben:

$$V = w + v_2 = \frac{9}{13}v_0 + \frac{4}{13}e^{2i\alpha}v_0,$$

$$U = w + u_2 = \frac{9}{13}v_0 - \frac{9}{13}e^{2i\alpha}v_0 = \frac{9}{13}(1 - e^{2i\alpha})v_0.$$

²Megjelent lapunk 2024. évi áprilisi számában



1. ábra

Mivel a két kör közös külső érintője a valós tengely, a két kör középpontjának távolsága $3r + 2r = 5r$, valamint a kisebbik kör középpontja r -rel van közelebb a közös érintőhöz (1. ábra), ezért

$$\cos \alpha = \frac{r}{5r} = \frac{1}{5} \rightarrow \alpha = \arccos \frac{1}{5} = 78,5^\circ,$$

$$\cos 2\alpha = -0,920 \quad \text{és} \quad \sin 2\alpha = 0,392.$$

Ezt felhasználva az ütközés utáni (valós) sebességkomponensek értékei:

$$V_x = \frac{9}{13}v_0 + \frac{4}{13}\cos 2\alpha v_0 = 0,409v_0,$$

$$V_y = \frac{4}{13}\sin 2\alpha v_0 = 0,121v_0,$$

$$U_x = \frac{9}{13}(1 - \cos 2\alpha)v_0 = 1,329v_0,$$

$$U_y = -\frac{9}{13}\sin 2\alpha v_0 = -0,271v_0.$$

Vizsgáljuk a második ütközést! A 2. és a 3. test közös tömegközéppontjának komplex sebessége:

$$w_2 = \frac{4mU}{5m} = \frac{4}{5}U.$$

A $4m$ tömegű test sebessége a tömegközépponthoz képest:

$$u_3 = U - w_2 = \frac{1}{5}U = \frac{9}{65}(1 - e^{2i\alpha})v_0,$$

a legkisebb test sebessége pedig:

$$t_3 = -w_2 = -\frac{4}{5}U = -\frac{36}{65}(1 - e^{2i\alpha})v_0.$$

A testek komplex sebessége az ütközés után a tömegközépponti rendszerben:

$$u_4 = \overline{u_3}e^{2i\beta} = \frac{9}{65}\overline{(1 - e^{2i\alpha})}v_0e^{2i\beta} = \frac{9}{65}\left(e^{2i\beta} - e^{2i(\beta-\alpha)}\right)v_0,$$

$$t_4 = \overline{t_3}e^{2i\beta} = -\frac{36}{65}\overline{(1 - e^{2i\alpha})}v_0e^{2i\beta} = \frac{36}{65}\left(e^{2i(\beta-\alpha)} - e^{2i\beta}\right)v_0,$$

ahol β a középső és a kis test belső közös érintőjének az x tengellyel bezárt szöge. Az előző esethez hasonlóan a két kör középpontjának távolsága $2r + r = 3r$, valamint a kisebbik kör középpontja r -el van közelebb a közös érintőhöz (1. ábra), ezért

$$\begin{aligned}\cos \beta &= \frac{r}{3r} = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad \beta = \arccos \frac{1}{3} = 70,5^\circ, \\ \cos 2\beta &= -0,778 \quad \text{és} \quad \sin 2\beta = 0,629, \\ \text{valamint} \quad \cos(2\beta - 2\alpha) &= 0,962 \quad \text{és} \quad \sin(2\beta - 2\alpha) = -0,273.\end{aligned}$$

A testek ütközés utáni komplex sebességei az inerciarendszerben:

$$\begin{aligned}U' &= w_2 + u_4, \\ T &= w_2 + t_4,\end{aligned}$$

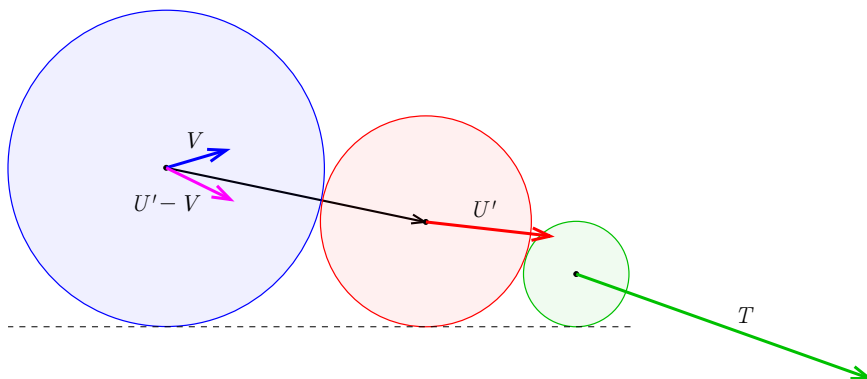
majd ebből a testek (valós) sebességkomponensei a nyugvó koordináta-rendszerben:

$$\begin{aligned}U'_x &= \frac{4}{5}U_x + \frac{9}{65}(\cos 2\beta - \cos(2\beta - 2\alpha))v_0 = 0,823v_0, \\ U'_y &= \frac{4}{5}U_y + \frac{9}{65}(\sin 2\beta - \sin(2\beta - 2\alpha))v_0 = -0,092v_0, \\ T_x &= \frac{4}{5}U_x + \frac{36}{65}(\cos(2\beta - 2\alpha) - \cos 2\beta)v_0 = 2,027v_0, \\ T_y &= \frac{4}{5}U_y + \frac{36}{65}(\sin(2\beta - 2\alpha) - \sin 2\beta)v_0 = -0,717v_0.\end{aligned}$$

Vizsgáljuk meg, hogy bekövetkezik-e a nagy és a közepes test között egy 3. ütközés is! A két test relatív sebességének koordinátái (2. ábra):

$$(U'_x - V_x, U'_y - V_y) = (0,413v_0, -0,213v_0),$$

a nagy test középpontjából a közepes test középpontjába mutató vektoré pedig $(\sqrt{24}, -1)$. A két vektor skalárszorzata pozitív, eszerint a testek a 2. ütközés után távolodnak egymástól, 3. ütközés nem következik be.



2. ábra

A testek végső sebességének nagysága és a $\mathbf{v}_0$ vektorral bezárt (előjeles) szöge:

$$\begin{array}{llll} V_x = 0,409v_0, & V_y = 0,121v_0, & |V| = 0,427v_0, & \gamma_V = 16,4^\circ, \\ U'_x = 0,823v_0, & U'_y = -0,092v_0, & |U'| = 0,828v_0, & \gamma_{U'} = -6,4^\circ, \\ T_x = 2,027v_0, & T_y = -0,717v_0, & |T| = 2,150v_0, & \gamma_T = -19,5^\circ. \end{array}$$

A fékeződéskor a mozgási energiát a súrlódási munka emészti fel, így a megtett út arányos a sebességek négyzetével³. A feladat szerint a legnagyobb test $s_V = 5$ cm utat tesz meg, a középső és a legkisebb test által megtett utak így:

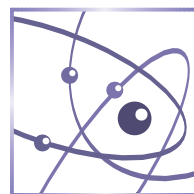
$$s_{U'} = \frac{|U'|^2}{|V|^2} s_V = 18,8 \text{ cm},$$

$$s_T = \frac{|T|^2}{|V|^2} s_V = 127 \text{ cm}.$$

Dobos Anita (Budapest, Szent István Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

19 dolgozat érkezett. Helyes 6 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 3, hiányos (1–3 pont) 9, hibás 1 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

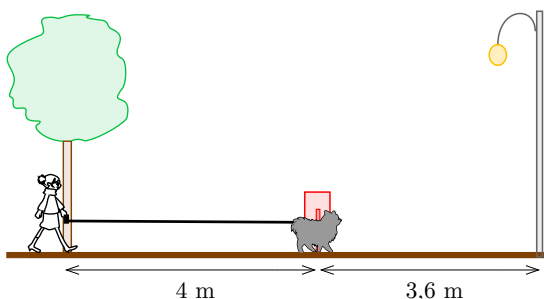


M. 434. A lejtőre helyezett másfél literes, vastag falú PET palack egy bizonyos hajlásszögnél feldől (ha kellően nagy a tapadás). Mérjük meg, hogyan függ ez a szög a flakonban lévő víz mennyiségétől!

(6 pont)

Közli: *Szabó Endre*, Révkomárom

G. 861. Panni sétálni vitte Fickó nevű kutyáját. A sugárúton Panni $0,8$ m/s



sebességgel haladt, amikor egy hársfa mellett elejtette a lakáskulcsát. Fickó ekkor a

³Lásd a **P. 5555** feladat megoldását.

hársfától 4 méterre lévő szemeteskukánál járt. Fickó sebessége $1,2 \text{ m/s}$ volt. Amikor Fickó a kukától $3,6$ méterre lévő lámpaoszlophoz ért, visszafordult, és a kuka és a lámpaoszlop között ide-oda szaladt $1,2 \text{ m/s}$ sebességgel. Amikor Panni a kukához ért, észrevette, hogy elejtette a kulcsot, ezért visszafordult érte. Ő végig $0,8 \text{ m/s}$ sebességgel mozgott.

Hogyan változott a végig feszes póráz hossza a kulcs elejtésétől annak kézhez vételéig? Készítsünk grafikont!

(4 pont)

Közli: Baranyai Klára, Veresegyház

G. 862. Egy csigasor n darab, a méretétől függetlenül G súlyú mozgócsigából áll, a kötélt ideálisnak tekinthető. Mekkora súlyt akasszunk a kötélt végére, hogy a rendszer egyensúlyban legyen, ha a csigasor

a) lineáris és terheletlen (a) ábra),

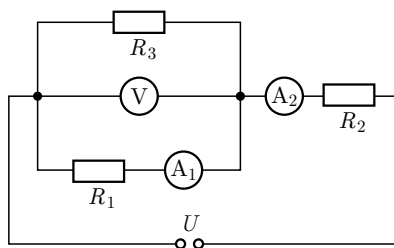
b) arkhimédészi, és egy G súlyú csigával terheljük (b) ábra)?

(4 pont)

G. 863. Egy tömör vasgolyó higanyban úszik. Térfogatának hány százaléka merül a higanyba? Hogyan módosul ez a százalékos arány, ha a higany tetejére annyi vizet rétegzünk, hogy bőven ellepje a vasgolyót?

(3 pont)

G. 864. Az ábrán látható kapcsolási rajz szerint összeállított, $U = 24 \text{ V}$ egyenfeszültséget szolgáltató feszültségforrásról táplált áramkörben a voltmérőről 10 V , az A_1 ampermérőről $0,2 \text{ A}$, az A_2 ampermérőről pedig $0,7 \text{ A}$ olvasható le.



(4 pont)

a) Határozzuk meg az egyes ellenállások értékét!

b) Mennyi hő fejlődik 2 perc alatt az áramkörben?

Mindhárom mérőműszer ideálisnak tekinthető. A feszültségforrás belső ellenállása és az összekötő vezetékek ellenállása elhanyagolható.

Tornyai Sándor Fizikaverseny, Hódmezővásárhely

P. 5589. Egyenes pályán állandó gyorsulással mozgó gépkocsi az $s_1 = 25 \text{ m}$ hosszúságú pályaszakaszt $t_1 = 2 \text{ s}$ idő alatt, az utána következő $s_2 = 15 \text{ m}$ hosszú pályaszakaszt $t_2 = 3 \text{ s}$ idő alatt teszi meg.

a) Mekkora a jármű gyorsulása?

b) Mekkora a jármű sebessége az első pályaszakasz elején és a második pályaszakasz végén?

(4 pont)

Közli: Holics László, Budapest

P. 5590. Egy pingponglabdát szeretnénk egy motorral egyenletes pattogásra bírni a következő módon: a dugattyút függőleges tengely mentén mozgatjuk 3 cm-es amplitúdóval, a labda pedig mindig az egyensúlyi helyzetben találja el a dugattyút periódusonként egyszer. Mekkora legyen a motor frekvenciája, hogy létrejöjjön a folyamat? Az ütközési szám $k = 0,8$.

(4 pont)

Közli: *Szentivánszki Soma*, Budapest

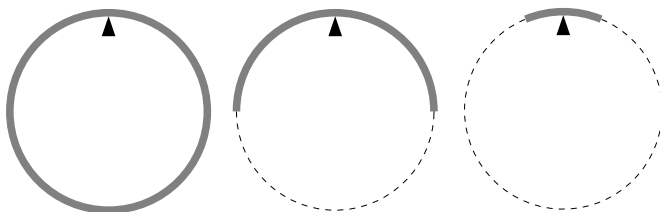
P. 5591. Három különböző fizikai ingát készítünk.

a) Egy R sugarú körre hajlított, homogén tömegeloszlású, vékony rudat az egyik pontjánál egy ékkel belülről alátámasztunk. A kör alakú rúd szabadon elfordulhat az ék körül a saját síkjában.

b) Egy ugyanilyen sugárban meghajlított rúdból félkört vágunk ki, és azt a hosszának felénél támasztjuk alá.

c) Az előző esethez hasonlóan járunk el, de csak egy viszonylag rövid, nyolcadkör alakú körívet helyezünk a közepénél az ékre.

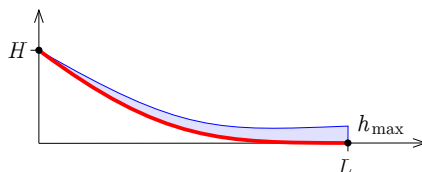
Mindhárom ingát kicsit kitérítjük, és megmérjük a lengéseik periódusidejét. Vajon melyik lengésidő lesz a leghosszabb, és melyik a legrövidebb?



(5 pont)

Közli: *Cserti József*, Budapest

P. 5592. Egy elhanyagolható tömegű, nyújthatatlan kötel felfüggesztési pontjai az ábrán látható módon egymástól L vízszintes és H függőleges távolságra helyezkednek el. Egy hideg téli napon a ρ sűrűségű hó d szélességben halmozódott fel a kötélen. A hóréteg magassága pedig zérus, illetve $h_{\max}$ értékek között lineárisan változik a vízszintes koordináta függvényében. A kialakult egyensúlyi helyzetben a kötel érintője jobb oldali végpontjánál éppen vízszintes. Határozzuk meg a kötelben ébredő legkisebb és legnagyobb húzóerőt!

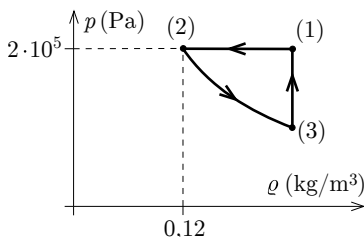


(5 pont)

Dürer Verseny feladata nyomán

P. 5593. Állandó mennyiségű héliumgázzal üzemelő hőerőgép körfolyamatának részleteit követhetjük nyomon a mellékelt nyomás-sűrűség diagramon. A gáz hőmérséklete a kiinduló, (1)-es állapotában 400 K, a (2)-es és a (3)-as állapotai között végbemenő folyamatban pedig nyomásának és sűrűségének szorzata állandó.

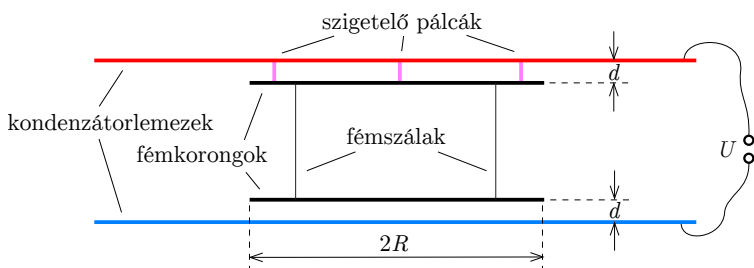
- a) Mekkora a gáz hőmérséklete a (2)-es és a (3)-as állapotban?
b) Mekkora ennek a hőerőgépnek a hatásfoka?



(5 pont)

Tornyai Sándor fizikaverseny, Hódmezővásárhely

P. 5594. Nagy területű síkkondenzátor lemezei között, azokkal párhuzamosan egy-egy kör alakú, R sugarú, töltetlen fémkorong található, melyeket több vékony, nyújtatlan fémszál köt össze. A felső korongot vékony szigetelő pálcák rögzített helyzetben tartják. Mindkét korong $d \ll R$ távolságban van a hozzá közelebbi lemeztől (lásd az ábrát).



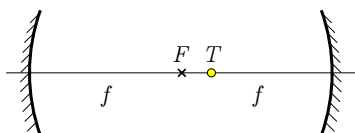
Mennyivel változik a fémszálak együttes húzóereje, ha a kondenzátorra U feszültséget kapcsolunk?

Adatok: $R = 10$ cm, $d = 0,5$ cm, $U = 5000$ V.

(5 pont)

Közli: Gnädig Péter, Vácduka

P. 5595. Két, kis nyílásszögű, f fókusz távolságú homorú tükröt tükröző felületeikkel szemben úgy helyezünk el, hogy optikai tengelyeik egybeessenek, és egymástól való távolságuk $2f$ legyen (lásd ábra).



A közös optikai tengelyre hová helyezzük a T , pontszerűnek tekinthető fényforrást, hogy a belőle induló fénysugarak a két tükrőről való visszaverődés után a T ponton menjenek át?

(4 pont)

Közli: Zsigri Ferenc, Budapest

P. 5596. Ha egy egyenletes tömegsűrűségű, gömb alakú objektum sugara kisebb egy kritikus értéknél, akkor a felszínén olyan erős a gravitáció, hogy onnan még a fény sem tud eltávolodni, tehát egy fekete lyukként viselkedik. Becsüljük meg ezt a kritikus sugarat, ha tudjuk hogy értéke csak az objektum tömegétől, a Newton-féle gravitációs állandótól és a vákuumbeli fénysebességtől függ! Becsüljük meg mekkorára kellene összenyomni egy 7,25 kg tömegű bowling golyót, hogy az fekete lyukként viselkedjen!

(4 pont)

Közli: Széchenyi Gábor, Budapest

P. 5597. Három egyforma, m tömegű csillag minden pillanatban egy szabályos háromszöget alkot. Egy adott időpillanatban a háromszög oldalhossza L_0 , ekkor mindhárom csillag sebességének nagysága v_0 , a sebességvektorok iránya pedig érinti a háromszög köré írható kört. Határozzuk meg a pulzáló „hármascsillag” periódus-idejét!

(6 pont)

Közli: Vigh Máté, Biatorbágy

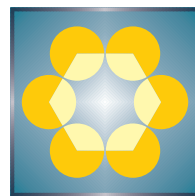


Beküldési határidő: 2024. november 15.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS (Volume 74. No. 7. October 2024)



Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 431): **K. 824.** Starting from the string of letters ABABABABABAB, in each step we can swap two adjacent letters. Find the minimum number of steps needed to obtain the string of letters AAAAAABBBBBB. **K. 825.** 4202 points are given in the plane. Is it always possible to find a circle such that it contains none of the given points, and it contains exactly 2024 of them in its interior? **K. 826.** Prove that if the product of 7 consecutive positive integers is divisible by 1000, then it's possible to choose 3 of them such that their product is also divisible by 1000. **K/C. 827.** Each angle of a hexagon is 120° . Prove that the sum of the lengths of any two adjacent sides equals the sum of the lengths of the two adjacent sides opposite them. **K/C. 828.** Is it possible to find two positive integers such that the sum of their squares equals their smallest common multiple?

New exercises for practice – competition C (see page 431): **Exercises up to grade 10:** **K/C. 827.** See the text at Exercises K. **K/C. 828.** See the text at Exercises K. **Exercises for everyone:** **C. 1823.** Smart Pali once went to the market to sell 30 apples. He planned to ask for one kreuzer for every three apples, i.e. he expected a total income of 10 kreuzers. At the market, he met another person who was also selling apples. The other seller also had 30 apples for sale, but he gave two apples for one kreuzer, so he was expecting a

total income of 15 kreuzers. Smart Pali got tired of the hustle and bustle of the market and handed over his 30 apples to the other person, instructing him to sell them so that five apples would cost two kreuzers. Pali said he would come back later for his share of the income. a) If this person sold all 60 apples following Pali's instructions and kept the income he originally expected, how many kreuzers were left for Smart Pali? b) For how many kreuzers should the 60 apples have been sold in order for both sellers to receive their originally planned income? (Based on a short story by Kálmán Mikszáth) **C. 1824.** Next year, Boglárka wants to read ten different books; the thicker the book, the longer she plans to spend on it. She has decided to dedicate 5, 10, 15, ..., 45, and 50 days to reading each of the books. The remaining period of time will be divided into three equal parts, which she will use for active rest. She can use these rest periods for sports at any time during the year (even several of them consecutively). If she has to read two books without inserting a rest period in between, she will always start with the thicker one. In how many different ways can Boglárka allocate the 365 days for reading the books? (Proposed by *Katalin Abigél Kozma*, Győr) **C. 1825.** Line e intersects circle k_1 in two distinct points A and B . Circle k_2 is tangent to circle k_1 at point C and to line e at point D . Line CD and circle k_1 intersect each other at point T for the second time. Prove that $AT = TB$. (Swiss Olympiad Problem) **Exercises upwards of grade 11: C. 1826.** Prove that if $0 < x \leq 1$, then $\sqrt{1-x} + \sqrt{4-x} < 1 + \sqrt{4-3x}$. (Proposed by *Mihály Hujter*, Budapest) **C. 1827.** Prove that if two right triangles both have a perimeter of 1 unit, then the difference between the lengths of their hypotenuses is at most $1.5 - \sqrt{2}$. (Proposed by *Norbert Csizmazia*, Pécs)

New exercises – competition B (see page 433): **B. 5406.** Prove that in any base- n number system, equality $\sqrt{\frac{123456787654321}{1234321}} = 10001$ holds, where $n \geq 9$. (3 points) (Proposed by *Mihály Hujter*, Budapest) **B. 5407.** Find positive integers a, b, c and d satisfying $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c}$ and $\frac{a+c}{2} = b+1$. (4 points) (Proposed by *Attila Sztranyák*, Budapest) **B. 5408.** In a triangle the length of one of the sides is the arithmetic mean of the lengths of the other two sides. Prove that the length of the angle bisector corresponding to the middle side is $\frac{\sqrt{3}}{2}$ times the geometric mean of the lengths of the other two sides. (4 points) (Proposed by *Mihály Hujter*, Budapest) **B. 5409.** Each card in a deck of german suited playing cards has a suit and a value. The suit can be Hearts, Bells, Leaves or Acorns, and the value can be VII, VIII, IX, X, Unter, Ober, King or Ace. The deck contains all possible combinations of the suits and the values. We arrange the 32 cards of a deck in 4 rows and 8 columns. Let A denote the random event that no column contains two cards with the same suit, and let B denote the random event that no row contains two cards with the same value. Which of the two events has the larger probability? (5 points) (Proposed by *Zoltán Bertalan*, Békéscsaba) **B. 5410.** We draw three circles centered at each of the three vertices of a right triangle such that each two of these circles are externally tangent to each other. Determine the center and the radius of the circle that is internally tangent to all three of these circles. (5 points) (Proposed by *László Németh*, Fonyód) **B. 5411.** Prove the following statement for every $n \geq 2$ positive integer: $\sum_{k=1}^{n^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor^2 = \frac{(n-1)n(3n^2-n-1)}{6}$. $\lfloor x \rfloor$ denotes the floor of the real number x . (4 points) (Proposed by *Mihály Bencze*, Brassó) **B. 5412.** A fugitive at a vertex of a finite connected graph is being chased by three policemen at three other vertices. First the fugitive makes a move along an edge, then each of the three policemen can also make a move along an edge. The game continues by alternating turns between the fugitive and the policemen. Can the policemen always catch the fugitive in a finite number of steps, i.e., can they always guarantee that one of them will be on the same vertex as the fugitive after a finite number of steps? (6 points) (Proposed by *Péter Pál Pach*, Budapest) **B. 5413.** Let M be the orthocenter, S be the centroid and I

be the incenter of the non-equilateral triangle ABC . Prove that $\angle MIS > 90^\circ$. (6 points)
(Proposed by *Viktor Vigh*, Sándorfalva)

New problems – competition A (see page 434): **A. 887.** A non self-intersecting polygon is given in a Cartesian coordinate system such that its perimeter contains no lattice points, and its vertices have no integer coordinates. A point is called *semi-integer* if exactly one of its coordinates is an integer. Let $P_1, P_2, \dots, P_k$ denote the semi-integer points on the perimeter of the polygon. Let n_i denote the floor of the non-integer coordinate of P_i . Prove that integers $n_1, n_2, \dots, n_k$ can be divided into two groups with the same sum. (Proposed by *Áron Bán-Szabó*, Budapest) **A. 888.** Let n be a given positive integer. Find the smallest positive integer k for which the following statement is true: for any given simple connected graph G and minimal cuts $V_1, V_2, \dots, V_n$, at most k vertices can be chosen with the property that picking any two of the chosen vertices there exists an integer $1 \leq i \leq n$ such that V_i separates the two vertices. *A partition of the vertices of G into two disjoint non-empty sets is called a minimal cut if the number of edges crossing the partition is minimal.* (Proposed by *András Imolay*, Budapest) **A. 889.** Let W, A, B be fixed real numbers with $W > 0$. Prove that the following statements are equivalent.
• For all $x, y, z \geq 0$ satisfying $x + y \leq z + W$, $x + z \leq y + W$, $y + z \leq x + W$ we have $Axyz + B \geq x^2 + y^2 + z^2$.
• $B \geq W^2$ and $AW^3 + B \geq 3W^2$. (Proposed by *Ákos Somogyi*, London)

Problems in Physics

(see page 457)

M. 434. A one-and-a-half litre thick-walled PET bottle is placed on a slope. At a certain angle of inclination (if friction is big enough) the bottle will topple over. Measure how this angle depends on the amount of water in the bottle.

G. 861. Anna took her dog Buddy for a walk. Anna was walking on the avenue at a speed of 0.8 m/s when she dropped her house key near a linden tree. At this instant Buddy was at the litter bin, 4 m away from the linden tree, and he was trotting at a speed of 1.2 m/s. When Buddy reached the lamppost, 3.6 m away from the litter bin, he turned back and began to trot back and forth between the litter bin and the lamppost at the same constant speed of 1.2 m/s. When Anna reached the litter bin, she noticed that she had dropped the key, so she turned back to get it. She was moving at 0.8 m/s the whole time. How did the length of the retractable leash, which was kept taut, change from the time she dropped the key to the time she picked it up? Plot a graph. **G. 862.** A pulley system consists of n pulleys. Regardless of their size each moving pulley has the same weight of G , and the rope can be considered ideal. How much weight should be hung on the end of the rope so that the system is in equilibrium if the pulley system *a)* is not loaded, and arranged as shown in *figure a)*; *b)* is loaded with a pulley of weight G and the pulleys are arranged as shown in *figure b)*? **G. 863.** A solid iron ball is floating in mercury. What percentage of its volume is submerged in the mercury? How does this percentage change if water is added on top of the mercury such that it completely covers the iron ball? **G. 864.** In the circuit shown in the schematic diagram, a power source supplies $U = 24$ V DC voltage, the voltmeter reads 10 V, ammeter A_1 reads 0.2 A, and ammeter A_2 reads 0.7 A. *a)* Determine the resistance of each resistor. *b)* How much heat is dissipated in the circuit during 2 minutes? All three meters can be considered ideal, and the resistance of the connecting wires and the internal resistance of the power source are negligible.

P. 5589. A car travelling on a straight track with constant acceleration covers the first part of the path, which has a length of $s_1 = 25$ m in $t_1 = 2$ s and then it covers the second, $s_2 = 15$ m long part of the path in $t_2 = 3$ s. *a)* What is the acceleration of the car? *b)* What

is the speed of the car at the beginning of the first part of the path and at the end of the second part of the path? **P. 5590.** We want to make a ping-pong ball bounce uniformly with the help of a motor in the following way: a piston is moved along a vertical axis with an amplitude of 3 cm, and the ball always hits the piston in the equilibrium position once in a period. What should the frequency of the motor be in order to achieve this process? The coefficient of restitution is $k = 0.8$. **P. 5591.** We make three different compound pendulums (physical pendulums). *a)* A thin rod with uniform mass distribution is bent into a circle of radius R , and is supported by a wedge at a point on the inner rim of the circle, see the *figure*. The circular rod is free to rotate about the wedge in its plane. *b)* A semicircle is cut from a similarly bent rod forming a circle of the same radius. This semicircular rod is supported at the midpoint of its circumference. *c)* The same procedure is followed as in the previous case, but only a relatively short arc, an octant of the circular arc is placed at its midpoint to the wedge. All three pendulums are slightly displaced and the periods of their swings are measured. Which of these periods will be the greatest and which will be the smallest? **P. 5592.** The suspension points of a weightless inextensible rope are located at a horizontal distance of L and a vertical distance of H from each other as shown in the *figure*. On a cold winter day, snow of density ρ accumulated on the rope in width of d . The height of the snow layer varies linearly as a function of the horizontal coordinate, between zero and $h_{\max}$. At the equilibrium position, the tangent of the rope at its right-hand end is exactly horizontal. Determine the minimum and maximum tension in the rope. **P. 5593.** A heat engine is operated with a sample of helium, which has a constant amount. The pressure-density graph of the different parts of the cyclical process is shown in the *figure*. The temperature of the gas in its initial state (1) is 400 K, and during the process between states (2) and (3) the product of the pressure and the density of the gas is constant. *a)* What is the temperature of the gas at state (2) and at state (3)? *b)* What is the efficiency of this heat engine? **P. 5594.** There are two neutral metal disks of radius R between the plates of a parallel plate capacitor having a large area. The disks are parallel to the plates of the capacitor, and they are connected with several thin, unstretched metal threads. The disk at the top is fixed to the top plate of the capacitor with thin insulating rods. Each disk is at a distance of $d \ll R$ from the capacitor plate which is closer to it. (See the *figure*.) How much does the total tension in the metal threads change when a voltage of U is applied to the capacitor? *Data:* $R = 10$ cm, $d = 0.5$ cm, $U = 5000$ V. **P. 5595.** Two concave mirrors with small aperture angles and with focal length of f are placed opposite to each other so that their principal axes coincide and their distance from each other is $2f$ (see *figure*). A point-like light source is placed at a point T on the principal axis. Where is the position of point T if the emitted light rays meet at point T after they are reflected from the two mirrors? **P. 5596.** If the radius of a spherical object, having uniform mass density, is less than a critical value, then gravity is so strong on its surface that even light cannot escape from it, so it behaves like a black hole. Let us estimate this critical radius, knowing that its value depends only on the mass of the object, the universal gravitational constant and the speed of light in vacuum. Estimate how much a bowling ball of mass 7.25 kg should be compressed, in order that it behaves like a black hole! **P. 5597.** Three alike stars of mass m form an equilateral triangle at any instant. At a given instant of time, the triangle has a side length L_0 , the speed of all three stars is v_0 , and the direction of each velocity vector is tangent to the circumscribed circle of the triangle formed by the stars. Determine the period of the pulsating “triple star” system.

Versenynaptár 2024–2025.

	VERSENYEK	Fordulók		
		Iskolai	Megyei/Fővárosi	Országos
MATEMATIKA	KöMaL	2024. szeptember–2025. május	–	–
	Kürschák József Matematikai Tanulóverseny	–	–	2024. október 18. 14:00
	Bolyai Csapatverseny, matematika 3–8. osztály / 9–12. osztály	–	2024. október 18. / 2025. január 14.	2024. nov. 15. (írásbeli) és 2024. nov. 30. (szóbeli) / 2025. március 08.
	Dürer Verseny, matematika 9–12. osztály / 5–8. osztály	online: 2024. okt. 21., iskolai: 2024. nov. 22./ 2024. nov. 29.	–	2025. február 7–9. / 2025. január 24–25.
	OKTV I. és II. kategória	2024. nov. 13.	2025. január 22.	2025. március 1.
	OKTV III. kategória	2024. december 3.	–	2025. március 6.
	Varga Tamás Országos Matematikaverseny 7–8. osztály	2024. november 26.	2025. január 21.	2025. március 4.
	Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny Kezdők és Haladók, I. és II. kategória	2024. november 14. 14:00–18:00	2025. január 16. 14:00–18:00	2025. április 3. 11:00–15:00
	Matematika Határok Nélkül	–	–	2025. március 19.
	Zrínyi Ilona Matematikaverseny 2–12. osztály	2024. november 25. 14:30	2025. február 21. 14:30	2025. április 17–19.
	Nemzetközi Kenguru Matematikaverseny 2–12. osztály	–	–	2025. március 20. 10:00
	TIT Kalmár László Matematikaverseny 3–8. osztály	–	2025. március 21. 16:00	2025. május 23–24.
INFORMATIKA	OKTV I. kategória (alkalmazási)	2024. november 20.	2025. január 25.	2025. március 22.
	OKTV II. kategória (programozási)	2024. november 12.	2025. január 11.	2025. február 22.
	Nemes Tihamér Nemzetközi Informatikai Tanulmányi Verseny Programozási kategória: 1. korcsoport / 2. korcsoport	2025. január 22. 14:00–16:00 / 14:00–17:00	–	2025. március 29. 10:00–14:00 / 10:00–15:00
	Mathiasz Informatika verseny 7–8. osztály	–	–	2024. október 18.
	Kovács Mihály Országos Grafikus Programozási Verseny	2025. február 19. 14:00–16:00	–	2025. április 12. 10:00–13:00
	Kozma László Országos Alkalmazói Verseny	2024. november 20.	2025. március 19.	2025. május 10.
FIZIKA	Eötvös Loránd Fizikaverseny	–	–	2024. október 11. 15:00–20:00
	OKTV	2024. november 7. 14:00	2025. január 30.	2025. április 5.
	Öveges József Kárpát-medencei Fizikaverseny 7–8. osztály	2025. február 4. 14:00–16:00	2025. március 25. 14:00–16:00	2025. május 23–25.
	Mikola Sándor Országos tehetséggutató Fizikaverseny 9–10. osztály	2025. február 11. 14:00–17:00	2025. március 11. 14:00–17:00	2025. május 4–6.
	Országos Szilárd Leó Fizikaverseny	2025. február 17.	–	2025. április 25–27.

A dátumok tájékoztató jellegűek és változhatnak is. Nevezés, illetve versenyzés előtt azokat minden esetben érdemes ellenőrizni a szervező honlapján.

Kedves Tanuló, Tisztelt Tanár Kolléga!

A Bolyai János Matematikai Társulat, az Eötvös Loránd Fizikai Társulat,
a MATFUND Alapítvány és
a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok szerkesztősége szeretettel
meghívja a

KöMaL Ifjúsági Ankétra,

amelynek tervezett időpontja:

2024. november 2–3.

Helyszín: ELTE TTK, Budapest, XI. Pázmány P. sétány 1/A. Fizika épület.
A szállással és étkezéssel kapcsolatos információk, a részletes program és a jelentkezéshez kitöltendő űrlap honlapunkon lesz elérhető: <http://www.komal.hu>.

Az Ankét támogatói:



Nemzeti
Tehetség Program

Morgan Stanley



hiflylabs



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKEZELŐ



Nemzeti Kulturális Alap

Az Ifjúsági Ankéton minden érdeklődőt szívesen látunk, az előadások nyilvánosak.
A pontversenyek **díjazottjai és a dicséretesek közül az első öt helyezett, valamint tanáraik térítésmentes étkezést** (két ebéd és állófogadás), a **nem budapestiek** ezenkívül **térítésmentes szállást** igényelhetnek az űrlapon keresztül.
Kérünk minden érdeklődőt, hogy részvételi szándékát, illetve szállás és/vagy étkezés igénylését mielőbb jelezze az űrlap kitöltésével!

Rövid előzetes program

Szombat – délelőtt 10 órától előadások, délután 3-tól díjkiosztó.

Vasárnap – előadások.

A programváltoztatás jogát fenntartjuk.



Nemzeti Kulturális Alap



ELTE
EÖTVÖS LORÁND
TUDOMÁNYEGYETEM