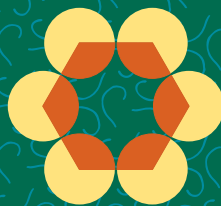


Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok

Informatika rovattal



Kép a P. 5598-as fizika feladathoz



Kép a *Rejtvények, ördöglakatok* cikkhez



Az IMO második három feladatának megoldása |
A nyári KöMaL fizikatáborról | A 63. Rátz László
Vándorgyűlésről | Rejtvények, ördöglakatok |
Fizikai problémák megoldása numerikus módszerrel

KöMaL

74. évfolyam
8. szám
2024.
november

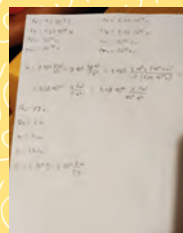


KöMaL Nyári Tábor 2024., Dombóvár-Gunaras



Sportolási lehetőségek

Matekosok



Számítási feladat



Kiránduláson

A krumpliágyú



KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: ARANY DÁNIEL 1894-ben

74. évfolyam 8. szám

Budapest, 2024. november

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta. ÁRA: 1450 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A 65. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldása, II.....	466
A 2024-es nyári dombóvár-gunarasi tábor.....	471
Vígh Viktor: Rejtvények, ördöglakatok	473
63. Rátz László Vándorgyűlés	474
Jócsik Csilla: Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire	480
Németh László: Megoldásvázlatok a 2024./7. szám matematika gyakorló feladatsorához...	483
Matematika C gyakorlatok megoldása (1803.) .	492
A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok (829–833.)	493
A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (832–833., 1828.–1832.)	494
A B pontversenyben kitűzött feladatok (5414–5421.)	495
Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (890–892.)	497
Informatikából kitűzött feladatok (639–642.) ..	498
Csóka Péter, Seprődi Barnabás: Fizika problémák megoldása numerikus módszerrel	505
Mérési feladatok megoldása (432.)	511
Fizika gyakorlatok megoldása (853.)	513
Fizika feladatok megoldása (5549., 5556., 5557)	515
Fizikából kitűzött feladatok (435., 865–868., 5598–5606.)	519
Felhívás a Fagypont Fizikátáborra.....	524
Problems in Mathematics	525
Problems in Physics	527

Főszerkesztő: KORÁNDI JÓZSEF
Fizikus szerkesztő: VANKÓ PÉTER
Műszaki szerkesztő: FRIED KATALIN
Borító: BURGHARDT ZSUZSA
Kiadja: MATFUND ALAPÍTVÁNY
Alapítványi képviselő: KÓS RITA
Felelős kiadó: KATONA GYULA
Nyomda: OOK-PRESS Kft.
Felelős vezető: SZATHMÁRY ATTILA
INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A matematika bizottság vezetője:
HERMANN PÉTER
Tagjai: BÁN-SZABÓ ÁRON, BÍRÓ BÁLINT, GYENES ZOLTÁN, HUJTER BÁLINT, IMOLAY ANDRÁS, KISS GÉZA, KÓS GÉZA, KOZMA KATALIN ABIGÉL, LOVAS MÁRTON, ÖKÖRDI PÉTERNÉ, PACH PÉTER PÁL, PAULOVIK ZOLTÁN, RATKÓ ÉVA, SZTRANYÁK ATTILA, VÍGH VIKTOR

A fizika bizottság tiszteletbeli elnöke:
HOLICS LÁSZLÓ

Vezetője:
SZÉCHENYI GÁBOR
Tagjai: BARANYAI KLÁRA, GNÄDIG PÉTER, HÖNYEK GYULA, OLOSZ BALÁZS, SZÁSZ KRISZTIÁN, VÍGH MÁTÉ, VLADÁR KÁROLY, WOYNAROVICH FERENC

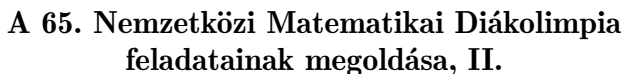
Az informatika bizottság vezetője:
SCHMIEDER LÁSZLÓ
Tagjai: LÓCZI LAJOS, SIEGLER GÁBOR, TÓTH TAMÁS

Fordítók: GYENES ZOLTÁN, TASNÁDI ANIKÓ

Nyelvi korrektor: ANDICS ÁGNES

Szerkesztőségi titkár: ONDINÉ SZABÓ SÁRA

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
Telefon: +36 20 320-1143
A lap megrendelhető a
<https://komalujsag.myshoprenter.hu>
oldalon keresztül.
Előfizetési díj egy évre: 12 000 Ft
Kéziratokat nem örzünk meg és nem küldünk vissza.
Minden jog a KöMaL tulajdonosaié.
E-mail: szerek@komal.hu
Internet: <http://www.komal.hu>
This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 20 320-1143
or on the Internet:
<https://komalujsag.myshoprenter.hu>.
A Lapban megjelenő hirdetések tartalmáért felelősséget nem vállalunk.



A szerkesztőség

Bizonyítsuk be, hogy $KIL\triangleleft + YPX\triangleleft = 180^\circ$.

Tekintsük az I -re való tükrözést; ez nyilván E -t E' -be, F -t F' -be, ω -t önmagába viszi, így az E -ben és F -ben ω -hoz húzott érintők metszéspontját az E' -ben és F' -ben húzott érintők metszéspontjába viszi. Az előbbi A , az utóbbi pedig legyen $A' = e \cap f$, ekkor tehát A és A' tükörképek I -re, A' rajta van AI -n.

Most tekintsük az A -ból való kétszeres nagyítást: a fentiek alapján ez I -t A' -be, K -t C -be, L -t B -be viszi; mivel a nagyítás szögtartó, ezért $KIL \triangleleft = CA'B \triangleleft$.

Mivel e párhuzamos az AC egyenessel, $BXE' \triangleleft = BCA \triangleleft = BPA \triangleleft = BPA' \triangleleft$, ami miatt $BPA'X$ húrnégyszög. Hasonlóan láthatjuk, hogy $PCYA'$ is húrnégyszög. Innen következik, hogy $YPA' \triangleleft = YCA' \triangleleft = BCA' \triangleleft$ és $A'PX \triangleleft = A'BX \triangleleft = A'BC \triangleleft$, tehát az $A'CB$ háromszög szögeiből

$$KIL \triangleleft + YPX \triangleleft = KIL \triangleleft + YPA' \triangleleft + A'PX \triangleleft = CA'B \triangleleft + BCA' \triangleleft + A'BC \triangleleft = 180^\circ,$$

amit igazolni akartunk.

Megjegyzés. A beírt kör e , BC , f érintőinek sorrendjéből látható, hogy az $A' = e \cap f$ pont a BC egyenesnek az A -val ellentétes oldalán van, valamint az X és Y pontok az AB szögfelezőnek a B -vel, illetve C -vel azonos oldalára esnek.

Az $AB < AC < BC$ feltétel azt is biztosítja, hogy az A' pont a CBP háromszög belsejében legyen, ehhez elég ellenőrizni, hogy $AA' < AP$. Ismeretes, hogy $IP = BP = CP$, és mivel a feltétel miatt $BAC \triangleleft$ a háromszög legnagyobb szöge, $BAC \triangleleft > 60^\circ$. Ha a körülírt kör sugara r , akkor

$$IP = BP = 2r \sin \frac{BAC \triangleleft}{2} > 2r \sin 30^\circ = r \geq \frac{1}{2}AP,$$

$$AP = AI + IP > \frac{1}{2}AA' + \frac{1}{2}AP,$$

vagyis valóban $AA' < AP$.

5. feladat *Turbó, a csiga a következő játékot játssza egy 2024 sorból és 2023 oszlopból álló táblán, melynek 2022 mezőjén egy-egy szörny rejtőzik. Kezdetben Turbó nem ismeri a szörnyek helyét, de tudja, hogy az első és utolsó sort leszámítva minden sorban pontosan egy, valamint minden oszlopban legfeljebb egy szörny található.*

Turbó kísérleteket tesz arra, hogy eljusson az első sorból az utolsóba. Minden kísérlete során kiválasztja, hogy az első sor melyik mezőjéből indul, majd minden lépésében egy oldalszomszédos mezőre lép. (Visszatérhet olyan mezőre, melyen már járt.) Ha olyan mezőre lép, ahol szörny rejtőzik, akkor véget ér a kísérlete, visszakérül az első sorba, és új kísérletet kezd. A szörnyek nem változtatják a helyüket, és Turbó emlékszik, hogy az általa meglátogatott mezők közül melyeken volt szörny. Ha az utolsó sor bármelyik mezőjét eléri, akkor befejeződik a kísérlet, és a játék véget ér.

Határozzuk meg azt a minimális n értéket, melyre Turbónak létezik olyan stratégiája, amellyel a szörnyek elhelyezkedésétől függetlenül biztosan eléri az utolsó sort legfeljebb n kísérlettel.

Megoldás (Szakács Ábel). Megmutatjuk, hogy $n = 3$.

A tábla mezőit jelöljük számpárokkal; az (x, y) pár az x -edik sor y -adik mezőjét fogja jelölni.

Először belátjuk, hogy Turbó 2 kísérletből nem tud biztosan eljutni az utolsó sorba. Legyen $(2, i)$ az a mező a második sorban, ahova Turbó először lép az első kísérletben. Ezen a mezőn legyen egy szörny, ebben az esetben Turbónak vissza kell mennie az első sorba. Most legyen $(3, j)$ az a mező a harmadik sorban, ahova Turbó először lép a második kísérletben. Turbó a $(2, j)$ mezőről lépett ide, így $i \neq j$. Ekkor a $(3, j)$ mezőn lehet, hogy van szörny, tehát Turbó tényleg nem tudja garantálni, hogy 2 kísérletből eljut az utolsó sorba.

Most pedig mutatunk egy stratégiát $n = 3$ -ra. Turbó először próbáljon végigmenni a második soron:

$$(1, 1) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (2, 2) \rightarrow \dots \rightarrow (2, 2023).$$

Ekkor Turbó megtalálja a szörnyet a második sorban, és az első kísérlet befejeződik.

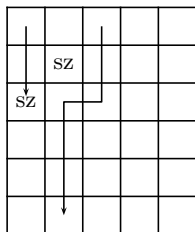
1. eset. A második sorban lévő szörny nem a táblázat szélén van.

Legyen a szörny a $(2, i)$ mezőn. Ekkor az i -edik oszlopban nincsen több szörny, továbbá a $(3, i - 1)$ és $(3, i + 1)$ mezők valamelyikén sincs szörny, így az alábbi két út valamelyikén végig tud menni Turbó:

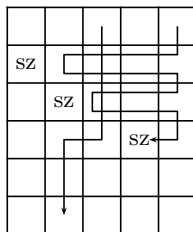
$$(1, i - 1) \rightarrow (2, i - 1) \rightarrow (3, i - 1) \rightarrow (3, i) \rightarrow (4, i) \rightarrow \dots \rightarrow (2024, i);$$

$$(1, i + 1) \rightarrow (2, i + 1) \rightarrow (3, i + 1) \rightarrow (3, i) \rightarrow (4, i) \rightarrow \dots \rightarrow (2024, i).$$

Ha a második és harmadik kísérletben ezeken az utakon próbál végigmenni Turbó, akkor három kísérletből biztosan eljut az utolsó sorba.



1. eset



2. eset

2. eset. A második sorban lévő szörny a táblázat szélén van; feltehetjük, hogy a $(2, 1)$ mezőn.

Ekkor Turbó próbáljon végigmenni az alábbi úton:

$$\begin{aligned} &(1, 2023) \rightarrow (2, 2023) \rightarrow (2, 2022) \rightarrow \dots \rightarrow (2, 3) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (2, 3) \rightarrow \dots \rightarrow (2, 2023) \\ &\rightarrow (3, 2023) \rightarrow (3, 2022) \rightarrow \dots \rightarrow (3, 4) \rightarrow (3, 3) \rightarrow (3, 4) \rightarrow \dots \rightarrow (3, 2023) \\ &\rightarrow \dots \\ &\rightarrow (2022, 2023) \rightarrow (2022, 2022) \rightarrow (2022, 2023) \\ &\rightarrow (2023, 2023) \\ &\rightarrow (2024, 2023). \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy ha az i -edik sorban találkozunk egy szörnnyel, akkor a $(2, 1)$, $(3, 2)$, $\dots$, $(i - 1, i - 2)$ mezőkben vannak szörnyek, de az $(i, i - 1)$ mezőben nincs, így a harmadik kísérletben Turbó végigmehet a következő úton, amellyel biztosan eléri az utolsó sort:

$$(1, i - 1) \rightarrow (2, i - 1) \rightarrow \dots \rightarrow (i, i - 1) \rightarrow (i, i - 2) \rightarrow (i + 1, i - 2) \rightarrow \dots \rightarrow (2024, i - 2).$$

6. feladat. Jelölje $\mathbb{Q}$ a racionális számok halmazát. Egy $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ függvényt pimasznak nevezünk, ha rendelkezik a következő tulajdonsággal: minden $x, y \in \mathbb{Q}$ esetén fennáll, hogy

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \quad \text{vagy} \quad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Mutassuk meg, hogy létezik c egész szám úgy, hogy minden f pimasz függvényre legfeljebb c különböző racionális szám áll elő $f(r) + f(-r)$ alakban, ahol r racionális szám; valamint határozzuk meg c legkisebb lehetséges értékét.

Megoldás (Czanik Pál). Azt állítjuk, hogy c legkisebb lehetséges értéke a 2.

Először megmutatjuk, hogy az $f(x) = \lfloor x \rfloor - \{x\}$ függvény eleget tesz a feltételnek, tehát $c = 2$ valóban lehetséges.

Az $f(r) + f(-r)$ függvény értéke $r = 0$ -ra $f(0) + f(-0) = 0$, $r = 0,5$ esetén pedig $f(0,5) + f(-0,5) = -0,5 + (-1,5) = -2$, tehát f valóban felvesz két különböző racionális értéket. Továbbá f teljesíti a feladat kritériumát: Legyen x és y tetszőleges; feltehetjük, hogy $\{x\} \geq \{y\}$. Ekkor $x + f(y) = (\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor) + (\{x\} - \{y\})$, míg $f(x) + y = (\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor) - (\{x\} - \{y\})$, és mivel $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ egész, továbbá a feltevésünk szerint $\{x\} - \{y\} \in [0, 1)$, így

$$f(x + f(y)) = (\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor) - (\{x\} - \{y\}) = f(x) + y,$$

ahogy kívántuk.

Másodszor belátjuk, hogy bármely, a feltételeket teljesítő f függvényre az $(f(r) + f(-r))$ -nek legfeljebb kétféle racionális értéke lehet. Sőt, ennél erősebb állítást bizonyítunk: $(f(r) + f(-r))$ -nek legfeljebb egyféle nemnulla értéke lehet.

A feladat feltételét jelöljük $P(x, y)$ -nal.

1. állítás. f injektív.

Bizonyítás. Először vegyük észre, hogy $P(x, x)$ alapján $x + f(x)$ fixpontja f -nek: $f(x + f(x)) = x + f(x)$. Most tegyük fel, hogy $f(x) = f(y)$. Ekkor $P(x, y)$ alapján vagy $f(x + f(y)) = y + f(x)$, vagy $f(y + f(x)) = x + f(y)$, feltehetjük mondjuk, hogy $f(x + f(y)) = y + f(x)$. Viszont feltevésünk szerint ez $f(x + f(y)) = f(x + f(x)) = x + f(x)$, vagyis $x = y$.

2. állítás. $f(0) = 0$.

Bizonyítás. Ha vizsgáljuk $P(0, 0)$ -t, azt kapjuk, hogy $f(f(0)) = f(0)$, amiből az f injektivitása alapján $f(0) = 0$.

3. állítás. $-f(-f(x)) = x$.

Bizonyítás. $P(x, -f(x))$ alapján azt kapjuk, hogy $f(x + f(-f(x))) = 0$ vagy $f(0) = x + f(-f(x))$. Az előbbi esetben az injektivitás miatt, az utóbbi esetben $f(0) = 0$ miatt kapjuk, hogy $x + f(-f(x)) = 0$.

4. állítás. Bármely x, y -ra $f(x - y) = f(x) - f(y)$ vagy $f(y - x) = f(y) - f(x)$. Ezt az állítást jelöljük $Q(x, y)$ -nal.

Bizonyítás. A $P(x, -f(y))$ szerint $f(x + f(-f(y))) = f(x) - f(y)$ vagy $f(f(x) - f(y)) = x + f(-f(y))$. Az első esetben $f(x - y) = f(x + f(-f(y))) = f(x) - f(y)$. A második esetben

$$\begin{aligned} -f(f(x) - f(y)) &= y - x \\ f(-f(f(x) - f(y))) &= f(y - x) \\ f(y) - f(x) &= f(y - x). \end{aligned}$$

5. állítás. Ha $f(a) + f(-a) \neq 0$ és $f(b) + f(-b) \neq 0$, akkor $f(a) + f(-a) = f(b) + f(-b)$.

Bizonyítás. Indirekten tegyük fel, hogy $f(a) + f(-a) \neq f(b) + f(-b)$, egyik sem 0, és jussunk ellentmondásra.

$$Q(a + b, a) \text{ szerint } f(b) = f(a + b) - f(a) \text{ vagy } f(-b) = f(a) - f(a + b),$$

átrendezve

$$f(a + b) = f(a) + f(b) \text{ vagy } f(a + b) = f(a) - f(-b);$$

továbbá

$$Q(a + b, b) \text{ szerint } f(a) = f(a + b) - f(b) \text{ vagy } f(-a) = f(b) - f(a + b),$$

átrendezve

$$f(a + b) = f(a) + f(b) \text{ vagy } f(a + b) = f(b) - f(-a).$$

De a feltevéseink szerint $f(a) + f(b)$, $f(a) - f(-b)$ és $f(b) - f(-a)$ mind különböző, ami csak úgy lehet, ha $f(a + b) = f(a) + f(b)$. Hasonlóan, a b helyére $(-b)$ -t írva kaphatjuk, hogy $f(a - b) = f(a) + f(-b)$ és $f(-a + b) = f(-a) + f(b)$.

Viszont $Q(a, b)$ alapján vagy $f(a - b) = f(a) - f(b)$, vagy $f(b - a) = f(b) - f(a)$. Ha az első teljesül, akkor $f(a) + f(-b) = f(a - b) = f(a) - f(b)$, ami ellentmond annak, hogy $f(b) + f(-b) \neq 0$, ha pedig a második, akkor $f(-a) + f(b) = f(-a + b) = f(b) - f(a)$, ami szintén ellentmondás.

Az 5. állítás szerint $f(r) + f(-r)$ legfeljebb egyetlen nullától különböző értéket vehet fel. Ezzel készen vagyunk.

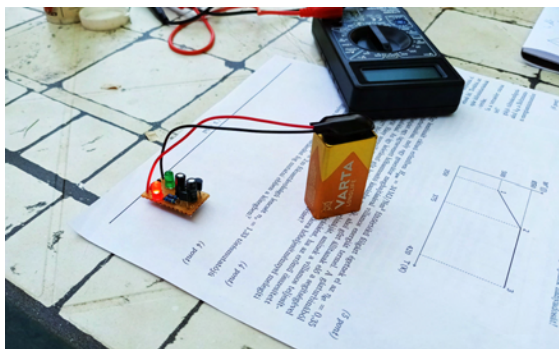
A 2024-es nyári dombóvár-gunarasi tábor



A táborban a KöMaL fizika versenyein legjobb eredményt elért diákok és az IMO-ra készülő „matematikus csapat” tagjai vettek részt, de nem kizárólag. Voltak olyanok is, akik a KöMaL májusi számában megjelent felhívásra jelentkeztek, és így jutottak el Dombóvár-Gunarasi üdülőfaluba, ahol a tábor volt.

A hétnapos tábor fő célja a fizika különböző területeivel való ismerkedés, azokban elmélyülés volt, a matekosok számára pedig elsősorban a nemzetközi diákolimpiára való felkészülés, de ezek mellett azért szórakozásra, pihenésre is jutott idő.

A napok svédasztalos reggelivel indultak, hogy mindenkinek elég energiája legyen az utána következő foglalkozásokra. A fizikások háromfős csoportokba rendeződtek, mindegyikben egy OKTV-döntőssel és egy kilencedikkel is, így nemcsak a táboroztatóktól, hanem a csapattársaktól is rengeteget tudtak tanulni, a tapasztaltabbak mindig szívesen segítettek a többieknek. A csapatok minden nap a KöMaL pontversenyeihez hasonló feladatokat kaptak, hat számítási, egy mérési, egy numerikus és egy „képzetes” feladatot. Ezeken aztán reggelitől este hatig dolgoztak, közben egy bőséges ebéddel. A számítási feladatok színesek voltak, átfogták a fizika különböző területeit. A mérési feladatok is izgalmasak voltak, különösen a katapult építése és az áramkör forrasztása aratott sikert. Mindenkinél akadt kedvére való feladat, de olyan is, ami közös munkát igényelt, így mindenki hozzájárult a csoportja eredményéhez. A csapatok között egészséges mértékű versengés alakult ki, de a fő célja azért mindenkinek az volt, hogy minél több új dolgot tapasztaljon és tanuljon meg a héten. A szervezők rendkívül segítőkészek voltak, mindig lehetett hozzájuk fordulni tanácsokért, segítségért.



Áramkör forrasztási feladat

A matekosok délelőtt általában két csoportra oszlottak, egy haladóbbra amelyben az idei olimpiai válogatóverseny döntősei voltak, illetve egy kevésbé haladóra, ahová főként a fiatalabbak kerültek. A két csoportot felváltva tanította Dobos Sándor, illetve Kiss Géza tanár úr, ők érdekes és tanulságos válogatást hoztak korábbi évek diákolimpiai feladataiból. A délutáni feladatmegoldást minden nap Kovács Benedek koordinálta. A kapott feladatsorokon egy ideig egyénileg gondolkoztak a diákok, majd közösen megbeszélték a legérdekesebbnek tűnő példákat.

A matekosok délelőtt általában két csoportra oszlottak, egy haladóbbra amelyben az idei olimpiai válogatóverseny döntősei voltak, illetve egy kevésbé haladóra, ahová főként a fiatalabbak kerültek. A két csoportot felváltva tanította Dobos Sándor, illetve Kiss Géza tanár úr, ők érdekes és tanulságos válogatást hoztak korábbi évek diákolimpiai feladataiból. A délutáni feladatmegoldást minden nap Kovács Benedek koordinálta. A kapott feladatsorokon egy ideig egyénileg gondolkoztak a diákok, majd közösen megbeszélték a legérdekesebbnek tűnő példákat.

Esténként az ízletes vacsora után került sor a feladatok közös megbeszélésére, illetve az azokhoz kapcsolódó előadásokra. Kedden például Széchenyi Gábor adott

elő optikából, a Fermat-elvről és annak következményeiről. Akik különösképpen érezték magukban az erőt, azok akár éjfélig együtt maradhattak elmélyedni többek közt a mátrixokba, differenciálegyenletekbe, vagy a Taylor-sorba fejtés módszereibe.



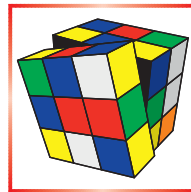
Széchenyi Gábor előadása

De nem csak a tanulásról szólt a tábor! Némi szabadidő mellett voltak lazább programok is. Lehetett lőni krumplicéval a pusztába, volt látogatás és megmerítés a közeli fürdőben (csúszdázással és labdázással), és volt séta a Kapos folyóhoz. A számos sportolási lehetőséget – lehetett például focizni, pingpongozni, biliárdozni – a nagy meleg miatt inkább késő délután használták ki a táborozók, olyankor társasozni is lehetett. Az utolsó este a közös tábortűz mellett beszélgetéssel, gitár és furulyaszó kísérette énekléssel zárult a tábor.



(Az összefoglaló Bui Nikolett, Csupor Albert Dezső, Gerendás Roland, Kis Boglárka és Sütő Áron élménybeszámolója alapján készült.)

Rejtvények, ördöglakatok



Ebben a hónapban két nagyon különböző természetű rejtvényt ajánlunk az olvasóknak.

Elsőként a fotón látható zsinóros ördöglakat megoldására biztatunk mindenkit. A cél a sötét színű karika levétele. Fontos, hogy a zsinór végén található golyó nem fér át a karikán, mint ahogy sem a golyó, sem a karika nem férnek át a függőleges pálcát körülölelő gyűrűn. A zsinór hossza nem nagyon lényeges, de ha túl rövid, megoldhatatlanná válhat a játék, ezért érdemes jó hosszúra hagyni. Egyszerű szerkezete miatt drótból és egy zsinórból is könnyen készíthető játszható változat, illetve némi fantáziával minden bizonnyal építőjátékból is összerakható.



A második feladványhoz tulajdonképpen semmilyen eszköz nem kell feltétlenül, de azért igazán úgy jó gondolkodni rajta, ha valamilyen módon elkészítjük. A feladat, hogy helyezzünk el öt világos és három sötét vezért egy 5×5 sakktáblán úgy, hogy az ellenkező színű vezérek ne álljanak ütésben. (Azaz különböző színű királynők nem állhatnak sem egy sorban, sem egy oszlopban, sem egy átlón.) A feladatnak nincs sok megoldása, így nagy eredmény – és sikerélmény – jó felállást találni!

A vezér lépése miatt az alábbi elhelyezések tiltottak.



A borítón látható elrendezésben például az üres sarokba egy negyedik sötét vezért még lehetnének, de az ötödik világos királynőnek már nincs hely.

Jó játékot kívánunk!



63. Rátz László Vándorgyűlés Békéscsaba, 2024. július 9–12.

Az idei, a 63. Rátz László Vándorgyűlést Békéscsabán rendezte meg a Bolyai János Matematikai Társulat. A pedagógus-továbbképzésként akkreditált rendezvénynek a Gál Ferenc Egyetem Gazdasági Kara adott otthont.

A megnyitón hagyományosan átadták a Beke Manó-emlékdíjakat és a Reményi-díjakat is.

A 2024. évi Beke Manó Emlékdíjasok

Csete Lajos, Hegedűsné Garda Éva, Héjja Norbert, Kruchió Mária, Lingl Zoltán, Székely Péter, Tóth István.

A 2024. évi Reményi-díjasok

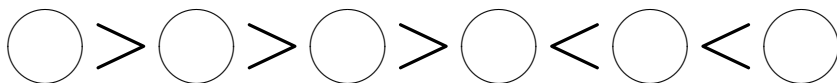
Cseh Judit, Dombi Anna, Juhász Péter, Kámán Ildikó, Khín Istvánné, Kilinné Vörös Bernadett, Kovács Veronika, Meiszterics Zoltánné, Minda Mihály, Molnár Gabriella, Molnár-Sáska Ildikó, Orosz Gyula, Rézbányai Gábor László, Romhányi Katalin, Ruffné Szakály Zsuzsanna, Schultz János, Szente Kármén Anett, Szilágyi-né Manasses Melinda, Tamás Balázs-né Kollár Magdolna, Tóthné Berzsán Gabriella

Ezúton is gratulálunk nekik!

Tanárverseny – 2024 középiskolában tanító tanároknak

A verseny időtartama **90 perc**. A feladatok pontozása: minden helyes válasz 5 pontot ér; helytelen válaszra 0 pont jár; válasz nélkül hagyott kérdésekre 1-1 pontot adunk. A versenyen íróeszközön, papíron, körzön és vonalzón kívül semmilyen más segédeszköz nem használható, azaz **számológép sem**. A verseny befejeztével **csak a kódlapot kell beadni**. Kérjük, hogy a versenyen csak olyan tanárok induljanak, akik középiskolában tanítanak!

1. A 63. Rátz László Vándorgyűlés 2024. 7. hó 9-e és 12-e között Békéscsabán 3. alkalommal kerül megrendezésre. Hányféleképpen írhatjuk be a 63, 2024, 7, 9, 12, 3 számokat az ábra szerinti körökbe úgy, hogy a szomszédos számok között a relációk minden esetben teljesüljenek?



(A) 10

(B) 20

(C) 48

(D) 60

(E) 120

2. A $*$ műveletet definiáljuk a következőképpen: $x * y = |x - y|$. Mennyi az alábbi műveletsor eredménye?

$$1 * (2 * 3) - (1 * 2) * 3$$

- (A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 2

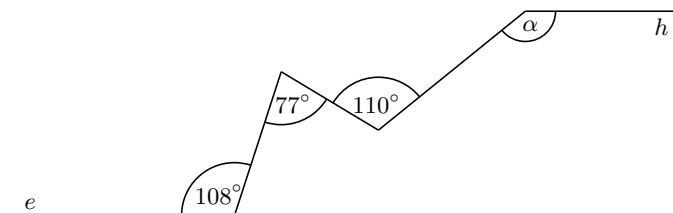
3. Az egymástól páronként különböző $4, 7, 10, 11, n$ számok átlaga és mediánja azonos. Mennyi az n lehetséges értékeinek összege?

- (A) 18 (B) 21 (C) 26 (D) 29 (E) 32

4. A $2^x + 2^{89} = 512^{10}$ egyenlet x megoldásában mennyi a számjegyek összege?

- (A) 11 (B) 13 (C) 15 (D) 17 (E) 19

5. Mekkora az ábrán látható α szög, ha a h és e egyenesek párhuzamosak?



- (A) 112° (B) 120° (C) 141° (D) 145° (E) 150°

6. Az egymástól és 0-tól különböző x, y valós számokra teljesül, hogy $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{y - x}$. Melyik állítás teljesül biztosan az alábbiak közül?

- (A) $xy < 0$ (B) $xy \in \mathbb{Q}$ (C) $xy \in \mathbb{Q}^*$ (D) $\frac{x}{y} > 0$ (E) $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$

7. Jelölje $P(n)$ és $S(n)$ rendre az n pozitív egész szám jegyeinek szorzatát, illetve összegét. Mennyi a $P(n) + S(n) = n$ egyenlet kétjegyű megoldásában az n utolsó számjegye?

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 8 (E) 9

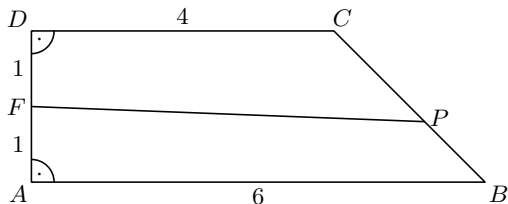
8. A felsorolt intervallumok közül melyik az $f(x) = \cos^2 x - \cos x + 5$ ($x \in \mathbb{R}$) függvény értékkészlete?

- (A) $[5; 7]$ (B) $\left[5; \frac{19}{4}\right]$ (C) $\left[\frac{19}{4}; 7\right]$ (D) $[-5; 5]$ (E) egyik sem

9. Legyen A és B az $f(x) = \log_2 x$ ($x \in \mathbb{R}^+$) függvény grafikonjának két pontja. Az AB szakaszt felezi az $F(6;2)$ pont. Mennyi az A és B pontok első koordinátáinak pozitív különbsége?

- (A) $2\sqrt{11}$ (B) $4\sqrt{3}$ (C) 8 (D) $4\sqrt{5}$ (E) 9

10. Az ábrán látható $ABCD$ derékszögű trapéz az FP szakasz két egyenlő területű részre osztja fel. Mekkora a $\frac{PC}{PB}$ arány?



- (A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) 2 (D) $\frac{7}{3}$ (E) $\frac{5}{2}$

11. Egy téglatest élei hosszának összege 13 cm, lapjainak területösszege $\frac{11}{2}$ cm², térfogata $\frac{1}{2}$ cm³. Hány cm a testátló hossza?

- (A) $\frac{3}{8}$ (B) $\frac{9}{8}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) 2 (E) $\frac{9}{4}$

12. Véletlenszerűen kiválasztunk az első 100 pozitív egész szám közül egyet, majd ezen szám osztói közül szintén véletlenszerűen kijelölünk egyet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kapott osztó a 11 többszöröse?

- (A) $\frac{4}{100}$ (B) $\frac{9}{200}$ (C) $\frac{1}{20}$ (D) $\frac{11}{200}$ (E) $\frac{3}{50}$

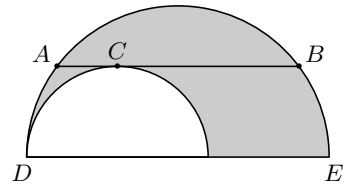
13. A balatoni nádasban él egy csapat színváltó béka. Ha közülük egy az árnyékban tartózkodik, akkor ő zöld színű, viszont ha kiugrál a napra, akkor sárga színűvé válik. Kezdetben a zöld és a sárga békák aránya 3 : 1. Később 3 zöld béka kimegy a napra, és 5 sárga béka átköltözik az árnyékos részre. Ekkor az előbbi arány 4 : 1-re változik. Mennyi ekkor a zöld és a sárga békák számának különbsége?

- (A) 12 (B) 16 (C) 20 (D) 22 (E) 24

14. A $P(x) = (x-1)^1(x-2)^2(x-3)^3 \dots (x-10)^{10}$ polinom gyökeit töröljük a számegyenesről, így 11 diszjunkt nyílt intervallumot kapunk. Ezek között hány olyan van, amelyen $P(x)$ pozitív értéket vesz fel?

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

15. Az ábra szerinti két félkör átmérője egy egyenesre esnek. A nagyobb félkör AB húrja a C pontban érinti a kisebb félkört, és párhuzamos helyzetű a nagyobb félkör DE átmérőjével. Ha az AB szakasz 16 cm hosszú, akkor hány cm^2 a besatírozott terület?



- (A) 8π (B) 16π (C) 32π (D) 48π (E) 64π

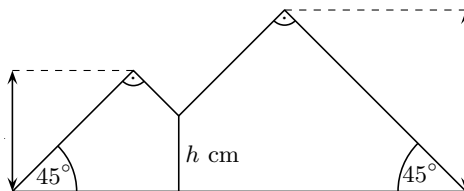
16. Az egymástól páronként különböző a , b , c valós számokra teljesül a $(b-a)^2 - 4(b-c)(c-a) = 0$ egyenlőség. Mennyi ekkor a $\frac{b-c}{c-a}$ kifejezés értéke?

- (A) -1 (B) 1 (C) 2 (D) -4 (E) 4

17. Egy asztalitenisz versenyen minden résztvevő pontosan egyszer játszott a többi játékos mindegyikével. Bár a jobbkezesek kétszer annyian voltak, mint a balkezesek, ennek ellenére a balkezesek által megnyert mérkőzések száma 40%-kal több volt a jobbkezesek győzelmeinek számánál. (Az asztaliteniszben nincsen döntetlen, és a játékosok között nem volt kétkezes.) Mennyi lehetett a lejátszott mérkőzések száma?

- (A) 15 (B) 36 (C) 45 (D) 48 (E) 66

18. Dia két hegyről az alábbi ólomüveg-metszetet készítette:



A teljes metszet területe 183 cm^2 . Hány cm távolságra van a hegyfalak találkozási pontja a talaj egyenesétől, azaz mekkora h ?

- (A) 4 (B) 5 (C) $4\sqrt{2}$ (D) 6 (E) $5\sqrt{2}$

19. Egy körvonalat 6 ponttal egyenlő hosszúságú ívekre osztunk fel. Ezután a pontokhoz véletlenszerűen hozzárendeljük az A , B , C , D , E , F betűjelzéseket. Mennyi a valószínűsége, hogy az ABC és DEF háromszögeknek nincs közös pontja?

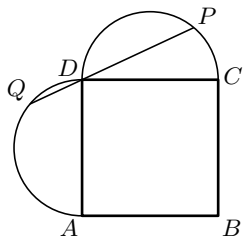
- (A) $\frac{3}{10}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{5}$ (E) $\frac{7}{10}$

20. Legyenek a , b , c , d , e a megadott sorrend szerint egymást követő pozitív egész számok, amelyek közül a legnagyobb e . Ha $b+c+d$ négyzetszám, $a+b+c+d+e$ köbszám, akkor e lehetséges legkisebb értéke esetén mennyi e első számjegye?

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

21. Ha $\frac{a}{2b} = \frac{2b}{3c} = \frac{3c}{8a}$ ($a, b, c \neq 0$), akkor mennyi az $\frac{ac+bc}{bc-ab}$ kifejezés értéke?

- (A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12



22. Az ábra szerint az $ABCD$ négyzet CD és DA oldalára kifelé egy-egy félkört rajzolunk. Ezután a négyzet D csúcsán keresztül olyan egyenest húzunk, amely a CD átmérőjű kört a P , a DA átmérőjű kört a Q pontban metszi. Ha $QD = 14$, $PD = 46$ egység hosszúságú, akkor hány egység távolságra van a négyzet középpontja a D csúctól?

- (A) 24 (B) 28 (C) 30
(D) 34 (E) 36

23. Az alábbi táblázat minden sora és oszlopa egy-egy végtelen számtani sorozat tagjait tartalmazza. Hányszor fordul elő a táblázatban a 2025?

- (A) 16 (B) 18 (C) 20
(D) 24 (E) 36

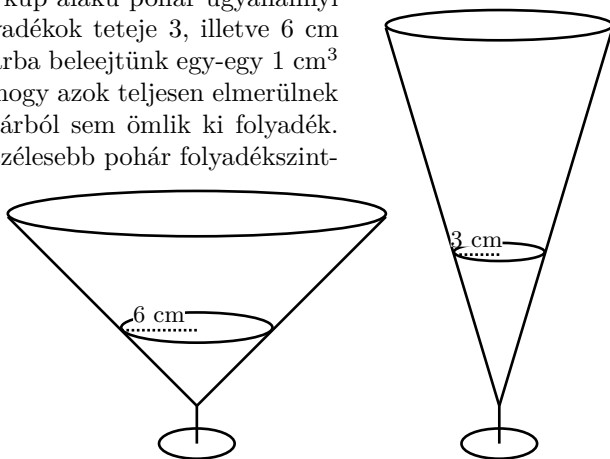
1	3	5	7	9	...
3	6	9	12	15	...
5	9	13	17	21	...
7	12	17	22	27	...
9	15	21	27	33	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

24. Egy légitársaság járataira egy személy csak egy megadott felső határt meg nem haladó tömegű csomagot vihet magával ingyenesen, ezen felül kilogrammonként valamekkora pótdíjat kell fizetnie. Egy házaspár két bőröndöt vitt magával, melyek együttes tömege 77 kg volt. Ezekért 14, illetve 20 dollár pótdíjat fizettek. Ha ugyanezeket egy személy vitte volna magával, akkor neki 94 dollár pótdíjat kellett volna fizetnie. Hány kg a pótdíjmentes csomag maximális tömege?

- (A) 20 (B) 24 (C) 30 (D) 32 (E) 36

25. Az ábrán látható két kúp alakú pohár ugyanannyi folyadékot tartalmaz. A folyadékok teteje 3, illetve 6 cm sugarú körlap. Mindkét pohárba beleejtünk egy-egy 1 cm^3 térfogatú tömör golyót úgy, hogy azok teljesen elmerülnek a folyadékban, és egyik pohárból sem ömlik ki folyadék. Mekkora a keskenyebb és a szélesebb pohár folyadékszint-emelkedésének aránya?

- (A) 1 (B) $\frac{47}{13}$
(C) 2 (D) $\frac{40}{13}$
(E) 4



26. Mennyi az alábbi összeg értéke?

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{29}\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \dots + \frac{2}{29}\right) + \dots + \left(\frac{27}{28} + \frac{27}{29}\right) + \frac{28}{29}$$

- (A) $\frac{203}{2}$ (B) 189 (C) 203 (D) 406 (E) 812

27. Hány különböző megoldása van az $[x]^2 - 3x + 2 = 0$ egyenletnek, ahol $[x]$ az a legnagyobb egész szám, amely nem nagyobb x -nél?

- (A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) végtelen sok

28. Ha x, y valós számok és $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$, akkor mennyi az $(x+5)^2 + (y+5)^2$ kifejezés minimális értéke?

- (A) $225 - 100\sqrt{2}$ (B) $100\sqrt{2}$ (C) 225
(D) $225\sqrt{2}$ (E) $225 + 100\sqrt{2}$

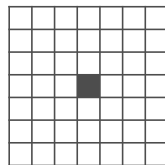
29. Mennyi az alábbi egyenlet gyökeinek összege?

$$\frac{1}{x^2 + 5x + 6} + \frac{1}{x^2 + 7x + 12} + \frac{1}{x^2 + 9x + 20} = \frac{1}{270}$$

- (A) -10 (B) -7 (C) 7 (D) 10 (E) 2024

30. Hány olyan téglalap jelölhető ki az alábbi 7×7 -es négyzet-rácson, amelynek minden oldala rácsegyenes, tartalmazza a sötét négyzetet és páros számú egységnégyzetből áll?

- (A) 64 (B) 128 (C) 160
(D) 192 (E) 256



A középiskolai tanárok versenyének eredménye

- 1. helyezett** Fridrik Richárd (Szeged, magántanár)
- 2. helyezett** Molnár István (Békéscsaba, Gál Ferenc Egyetem Gazdasági Kar, Andrássy Gyula Gimnázium és Kollégium)
- 3. helyezett** Koncz Levente (Budapest, Óbudai Árpád Gimnázium)
- 4. helyezett** Ujházy Márton (Budapest, ELTE Trefort Ágoston Gyakorló Gimnázium)
- 5. helyezett** Cseh Judit (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium)

6. helyezett Tamásné Kollár Magdolna (Pannonhalmi Bencés Gimnázium)

7. helyezett Jeneiné Bicsák Krisztina (Budapest, Szent István Gimnázium)

8–9. helyezett Óó Zsuzsanna (Keszthelyi Vajda János Gimnázium) és Tompa Júlia (ELTE egyetemi hallgató)

10. helyezett Kocsis Szilveszter (Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium)



Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. András és Balázs 8–8 millió forintot szeretne gyűjteni saját autók vásárlására. Ehhez minden hónap elején azonos összeget tesznek félre a megtakarítási számlájukon. A bank a számlákon elhelyezett összegre éves 9%-os kamatos kamatot ad havi tőkésítés mellett.

a) Hány forintot kell Andrásnak havonta a számlájára félretenni, hogy a 3. év végére elérje a tervezett megtakarítást? (A választ ezer forintra kerekítve adjuk meg.) (4 pont)

b) Balázs havonta 120 000 forintot tud erre a célra félretenni. Hány év múlva gyűlik neki össze a tervezett összeg? (4 pont)

c) A fiúk négy témakörben összesen 50 kvíz kérdést állítottak össze. Az élővilág témakörből 8-at, a sport témakörből 15-öt, a tudomány témakörből 22-t és 5 bulvár kérdést. Ezekből állítottak össze Cilinek, Dorkának és Evelinnek egy-egy 6 kérdésből álló feladatsort. Cili olyan kérdéssort kért, amelyben szerepel az élővilág. Dorka szeretné, ha az ő kérdései közül pontosan 3 a tudomány témakörből lenne. Evelin azt kéri, hogy az első két kérdése legyen a sporthoz kapcsolódó, de a többi ne.

A kérdések sorrendjét is figyelembe véve kinek tudnak a fiúk a legtöbbféleképpen kérdéssort összeállítani, ha teljesítik a lányok kéréseit? (4 pont)

2. A Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben megjelöltük az $A(-2;2)$, $B(1;11)$, $C(5;3)$ és $K(1;6)$ pontokat.

a) Igazoljuk, hogy a K pont rajta van a BC szakasz felezőmerőlegesén. (3 pont)

b) Határozzuk meg az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok skaláris szorzatának értékét. (3 pont)

c) Számítsuk ki az ABC háromszög B csúcsából induló magasságának pontos hosszát. (3 pont)

d) Igaz-e, hogy a BC átmérőjű kör egyenlete $x^2 + y^2 - 6x - 14y + 37 = 0$? Indokoljuk a választ. (3 pont)

3. a) Tekintsük az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ egyjegyű, valamint a $\overline{ba}$ kétjegyű számot. Ezek mind-egyikéhez ugyanazt a pozitív valós számot adva ebben a sorrendben egy $q = 9$ hányadosú mértani sorozat egymást követő három tagját kapjuk. Számítsuk ki a már megnövelt számok 3-as alapú logaritmusainak összegét. (8 pont)

b) A $\bar{c}$ ($c \in \{0; 1; \dots; 9\}$) és $\bar{d}$ ($d \in \{1; 2; \dots; 9\}$) nem feltétlenül különböző egyjegyű, valamint a $\overline{dc}$ kétjegyű számok esetén tekintsük az alábbi A , illetve B állítást:

$$A: \bar{c} \mid \overline{dc} \quad \text{és} \quad B: \bar{d} \mid \overline{dc}.$$

Ha c és d értékét véletlenszerűen választjuk a megadott halmazokból, mekkora valószínűséggel igaz az $A \wedge B$ állítás? (5 pont)

4. a) A hatos számrendszerbeli legnagyobb pozitív kétjegyű számhoz hármat hozzáadtunk, majd elosztottuk a hatos számrendszerbeli legkisebb pozitív kétjegyű számmal ötten kisebb számmal. Hány számjegyű az eredmény hatos számrendszerbeli alakja? (4 pont)

b) Igazoljuk, hogy a $\sqrt{\frac{x+3}{x-5}} - 3$ kifejezés értelmezési tartományában a legkisebb egész szám a 6. (4 pont)

c) Oldjuk meg a valós számok halmazán a $\sqrt{\frac{x+3}{x-5}} - 3 = \sqrt{x-5}$ egyenletet. (5 pont)

II. rész

5. a) A kis méretű Bim-Bam cukor doboza 10 mm széles, 32 mm hosszú és 55 mm magas. A nagy méretű Bim-Bam doboz matematikai értelemben hasonló a kicsihez, de háromszor akkora térfogatú. Mekkora a nagyobb doboz méretei egész mm-re kerekítve? (4 pont)

b) A kicsi dobozba 37 cukorkát töltöttek. Ezek alakja egy egyenes körhenger, amelynek két végét egy-egy 7 mm átmérőjű félgömb zárja le. Mutassuk meg, hogy a doboz térfogatának több mint 70%-át töltik ki a 11 mm hosszú cukorkák. (6 pont)

c) A nagyobb méretű *color mix* fantázianévre keresztelt dobozban 110 darab cukorka volt, 4-féle színben. A rózsaszínű és zöld cukorkák azonos számban voltak, ami a barnák számának kétszeresénél 7-tel több, de a sárgák számának kétszeresénél 5-tel kevesebb. Hány darab sárga cukorka volt a dobozban? (6 pont)

6. a) Egy $PQRS$ négyszögben a PQ oldal 5, a QR oldal 7, az RS oldal 10 egység hosszú. A Q csúcsnál lévő belső szög 115° , ezzel szemben pedig 50° -os szög található. Számítsuk ki a négyszög SP oldalának hosszát. (4 pont)

b) Egy $ABCD$ húrnégyszög A csúcánál lévő α szögére teljesül, hogy

$$2\sin^2\alpha + 2\cos\alpha - 1 = 0.$$

Határozzuk meg a húrnégyszög C csúcánál lévő szögének szinuszát. (6 pont)

c) Legyen β és δ az $ABCD$ húrnégyszög két szemközti szöge. Milyen β és δ esetén veszi fel a

$$\sin(\beta - 60^\circ) - \cos(\delta + 150^\circ)$$

kifejezés a maximumát, és mekkora ez a maximum? (6 pont)

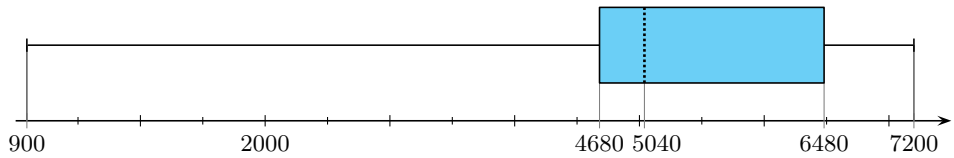
7. a) Egy hegyi kabinos felvonó 9.00 órától kezdődően negyed óránként mindig pontosan indul. A kabinba egyszerre 20 fő tud beszállni. A felvonó pénztára 8.30-kor nyit, és minden nap 001-től kezdődően folyamatosan sorszámozott jegyeket adnak ki minden egyes utas részére. A következő táblázat az első két órában, az adott időintervallumban eladott jegyek darabszámát mutatja:

Időintervallum	Eladott jegyek darabszáma
8.30 – 8.59	27
9.00 – 9.14	19
9.15 – 9.29	5
9.30 – 9.44	32
9.45 – 9.59	15
10.00 – 10.14	16
10.15 – 10.29	10

Zsófi a 113-as sorszámú jegyet kapta. Hány órakor induló kabinba tud Zsófi beszállni, ha a beszállás a jegyek sorszáma alapján folyamatosan történik? (2 pont)

b) Tekintsük azoknak a kirándulóknak a számát 9.00 és 10.29 között, akik helyhiány miatt nem fértek be a felvonó kabinba, és a következőre kellett várniuk. Adjuk meg ezeknek az értékeknek az átlagát, mediánját és szórását. (4 pont)

c) A nyári 91 napos főszezonban a pénztár napi bevételeit vizsgálták euróban. Az adatok alapján sodrófadiagramot készítettek.



A diagram alapján számítsuk ki, hogy mekkora lehet a nyári főszezonra számított összbevétel minimális, illetve maximális értéke? (4 pont)

d) A felvonóra várakozók ajándéktárgyak közül válogathatnak a pénztár melletti trafikban. Az eladó leltárt készített az ajándéktárgyakról:

Ajándéktárgy	Eladott termékek száma	Készlet darabszáma
Bakancsos kulcstartó	400	18
Hűtőmágnes	225	10
Plüss mormota	1625	8
Bögre	250	5

Az eladás alapján számított relatív gyakoriságokat figyelembe véve mekkora a valószínűsége, hogy a leltár elkészítése utáni tizedik vásárló már csak

háromféle ajándéktárgy közül választhat, ha mindenki pontosan egy ajándékot vásárol? (6 pont)

8. a) Adjuk meg annak az eltolásnak a vektorát, amely az $f(x) = x^2$ függvény grafikonját a $g(x) = x^2 - 10x + 21$ függvény grafikonjába viszi át, ha $D_f = D_g = \mathbb{R}$. (3 pont)

b) Ábrázoljuk a $g: [5; \infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 10x + 21$ függvényt. (2 pont)

c) Igazoljuk, hogy a

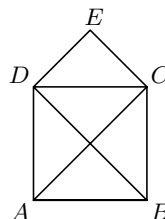
$$g: [5; \infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 10x + 21 \quad \text{és a} \quad h: [-4; \infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x+4} + 5$$

függvények esetén $g(h(x)) = h(g(x)) = x$. (5 pont)

d) Határozzuk meg az $[5; 8]$ intervallumon a $g(x)$ függvény grafikonja és az x -tengely, valamint az $x = 5$ és az $x = 8$ egyenletű egyenesek által határolt zárt síkidom területének pontos értékét. (6 pont)

9. a) Igazoljuk, hogy bármely pozitív egész n érték esetén az $5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ kifejezés utolsó három számjegyéből alkotott szám osztható 8-cal. (6 pont)

b) Megrajzoltuk az A, B, C, D, E csúcsokból álló egyszerű G gráfot.



Egészítsük ki az alábbi mondatokat, úgy, hogy azok igazak legyenek.

A fagráf olyan összefüggő egyszerű gráf, amelyben nincs

A G gráf egy Euler-vonala rendre $a(z)$ csúcsokon halad át.

Egy gráfban Hamilton-körnek nevezünk egy kört, ha a gráf minden pontosan egyszer tartalmazza.

A G gráf egy Hamilton-köre rendre $a(z)$ csúcsokon halad át.

(4 pont)

c) Adott az $a_n = \binom{2n+1}{3}$ és a $b_n = \binom{n}{3}$ sorozat, ahol $n > 2$ egész szám. Határozzuk meg az $\frac{a_n}{b_n}$ sorozat határértékét. (6 pont)

Jócsik Csilla

Győr

Megoldásvázlatok a 2024./7. szám matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán

a) a $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1} = \sqrt{x-4}$ egyenletet,

b) a $4^x - 16 \leq 6 \cdot 2^x$ egyenlőtlenséget.

(12 pont)

Megoldás. a) A négyzetgyök definíciója miatt $x \geq 4$. Rendezzük az egyenletet: $\sqrt{x+4} = \sqrt{x-4} + \sqrt{x-1}$, majd négyzetre emeljük mindkét oldalt: $x+4 = x-4 + 2\sqrt{(x-4)(x-1)} + x-1$. Ismét rendezzük:

$$-x+9 = 2\sqrt{x^2-5x+4},$$

és négyzetre emelünk: $x^2-18x+81 = 4x^2-20x+16$, amiből $3x^2-2x-65 = 0$,

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4 \cdot 3 \cdot (-65)}}{6} = \frac{2 \pm 28}{6}. \text{ Ekkor}$$

$$x_1 = 5, \quad x_2 = -\frac{13}{3},$$

ez utóbbi nem felel meg a kikötésnek, tehát nem megoldás.

Az $x_1 = 5$ -öt ellenőrizzuk: $\sqrt{5+4} - \sqrt{5-1} = \sqrt{5-4}$; $3-2=1$. Ez megoldása az egyenletnek.

b) Vezessük be az $y = 2^x$ ismeretlent, ekkor $y^2 - 6y - 16 \leq 0$, $y_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36+64}}{2}$; $y_1 = 8$; $y_2 = -2$.

Az egyenlőtlenség megoldása: $-2 \leq y \leq 8$, azaz $-2 \leq 2^x \leq 8$. Az első egyenlőtlenség mindig fennáll, mert $2^x > 0$, a második pedig: $2^x \leq 2^3$, ahonnan $x \leq 3$, mivel a 2^x függvény szigorúan monoton növekvő. A megoldás: $x \leq 3$.

2. A H halmaz elemei azok a kétjegyű pozitív egész számok, amelyekben az első számjegy négyzetéből kivonva a második számjegy négyzetét a két szám összegét vagy különbségét kapjuk.

a) Elemeinek felsorolásával adjuk meg a H -t.

b) Számítsuk ki a H elemeinek átlagát, szórását, mediánját, alsó és felső kvartilist. (12 pont)

Megoldás. Legyen az első számjegy x , a második y . Ha a négyzetek különbsége a számjegyek összegével egyenlő, akkor $x^2 - y^2 = x + y$, $(x-y)(x+y) = x + y$, $(x-y)(x+y) - (x+y) = 0$, $(x+y)(x-y-1) = 0$. Mivel $x+y > 0$, így $x-y-1 = 0$, azaz $x-y = 1$.

A feltételnek megfelelő számok tehát a 10, 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98. Ha a négyzetek különbsége a számjegyek különbségével egyenlő, akkor

$$x^2 - y^2 = x - y, \quad (x-y)(x+y) - (x-y) = 0, \quad (x-y)(x+y-1) = 0,$$

amiből $x-y = 0$ vagy $x+y-1 = 0$, azaz $x = y$ vagy $x+y = 1$.

Az első lehetőségből a 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99 számok adódnak, a másodikból pedig a 10.

A H halmaz elemei növekvő sorrendben:

$$H = \{10; 11; 21; 22; 32; 33; 43; 44; 54; 55; 65; 66; 76; 77; 87; 88; 98; 99\}.$$

A számok átlaga: 54,5; szórása: 28,41, a medián: 54,5; az alsó kvartilis: 32; a felső kvartilis: 77.

3. a) Mutassuk meg, hogy ha n páratlan természetes szám, akkor $n^3 + 11n$ osztható 12-vel.

b) Igazoljuk, hogy az ABC háromszög derékszögű, ha a csúcsainak koordinátái a derékszögű koordináta-rendszerben $A(8;2)$, $B(5;7)$ és $C(-2;-4)$. (13 pont)

Megoldás. a) Teljes indukcióval bizonyítunk. Az állítás $n = 1$ -re igaz, hiszen $1^3 + 11 \cdot 1 = 12$. Tegyük fel, hogy $n^3 + 11n$ osztható 12-vel, ha n páratlan természetes szám. Megmutatjuk, hogy $n + 2$ -re is igaz az állítás, hiszen $n + 2$ az n utáni páratlan természetes szám.

$$(n+2)^3 + 11(n+2) = n^3 + 6n^2 + 12n + 8 + 11n + 22 = (n^3 + 11n) + 6(n^2 + 2n + 5).$$

Ez utóbbiban az első zárójeles kifejezés az indukciós feltétel miatt osztható 12-vel, a második tag zárójelben levő részéről kell belátnunk, hogy páros. Mivel n páratlan, így a négyzete is az, ehhez 5-öt adva páros számot kapunk, amelyhez $2n$ -et adva ismét páros szám adódik. Ezzel az állítást beláttuk.

b) Képezzük az $\overrightarrow{AB} = (-3;5)$, $\overrightarrow{AC} = (-10;-6)$ vektorokat. Két vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha a skaláris szorzatuk 0.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-3)(-10) + 5(-6) = 30 - 30 = 0,$$

tehát a háromszög $A(8;2)$ csúcsánál derékszög van. *Megjegyzés:* Pitagorasz tételével, illetve 90° -os forgatással is bizonyítható az állítás, továbbá az oldalak egyenesének meredekségével és sok más egyéb módon is.

4. a) Egy számtani sorozat első öt tagjának összege 40, az első és ötödik tag szorzata 48. Számítsuk ki a sorozat első 10 tagjának összegét.

b) Egy számtani sorozat négy egymás utáni tagjához rendre 4-et, 3-at, 6-ot és 17-et adva egy mértani sorozat egymást követő tagjait kapjuk.

Határozzuk meg a számtani sorozat így kapott négy tagját. (14 pont)

Megoldás. a) A harmadik tagot jelölje x , a differenciát d , ekkor

$$(x - 2d) + (x - d) + x + (x + d) + (x + 2d) = 40, \quad 5x = 40, \quad x = 8.$$

$(8 - 2d)(8 + 2d) = 48$, $64 - 4d^2 = 48$, $4d^2 = 16$, $d^2 = 4$, ahonnan $d_1 = 2$, $d_2 = -2$. Ha $d = 2$, akkor $a_1 = 8 - 2 \cdot 2 = 4$, így $S_{10} = \frac{(8 + 9 \cdot 2) \cdot 10}{2} = 130$. Ha pedig $d = -2$, akkor

$a_1 = 8 - 2 \cdot (-2) = 12$, így $S_{10} = \frac{(24 - 18) \cdot 10}{2} = 30$. A feladatnak két megoldása van: a 130 és a 30.

b) Induljunk ki a mértani sorozat négy szomszédos tagjából: a ; aq ; aq^2 ; aq^3 , ezekből rendre levonva a megadott számokat: $a - 4$; $aq - 3$; $aq^2 - 6$; $aq^3 - 17$ egy számtani sorozat négy szomszédos tagját kapjuk. Köztük az alábbi összefüggések érvényesek:

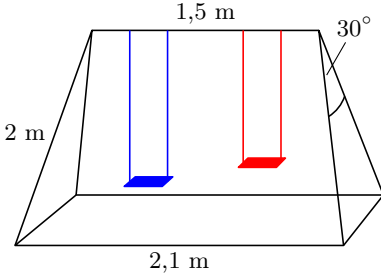
$$2(aq - 3) = (a - 4) + (aq^2 - 6), \quad 2(aq^2 - 6) = (aq - 3) + (aq^3 - 17).$$

Rendezve: $a(q - 1)^2 = 4$, $aq(q - 1)^2 = 8$, ahol a szorzatok egyik tényezője sem nulla, azaz $a \neq 0$, $q \neq 1$. Ekkor eloszthatjuk a másodikat az elsővel, így $q = 2$, ezt felhasználva $a = 4$ adódik. A mértani sorozat egymást követő tagjai: 4; 8; 16; 32, így a számtani sorozat négy tagja: 0; 5; 10; 15.

II. rész

5. Az ábrán egy kétüléses gyermekhinta vázlatos rajza látható.

A 2 méteres ferde rudak a vízszintes talajjal ugyanakkora szöget zárnak be. Két ilyen rúd egymással bezárt szöge pedig 30° -os. A hintákat tartó vízszintes 1,5 m-es rúd talajra eső merőleges vetülete a téglalap 2,1 m-es oldalával párhuzamos középvonalán van, és szimmetrikus a téglalap középpontjára.



a) Mekkora szöget zárnak be a vízszintes talajjal a 2 m-es rudak?

b) Az egyik hinta lengésideje 2,4, a másiké 2,2 másodperc, mozgásuk csillapítatlan, periodikus mozgásnak tekinthető. Egyszerre elindítjuk a hintákat.

Hány másodperc múlva lesz először mindkét hinta egyszerre ugyanabban a helyzetben, mint induláskor?

c) Anna, Béla, Cili, Dani és Emi együtt játszanak. Kitalálták, hogy párosával fognak hintázní úgy, hogy mindenki mindegyik társával hintázik egyszer, két percet. Minden hintázás után mindenkinek le kell szállni, és átadni a hintát két olyan hintázónak, akik még nem hintáztak együtt.

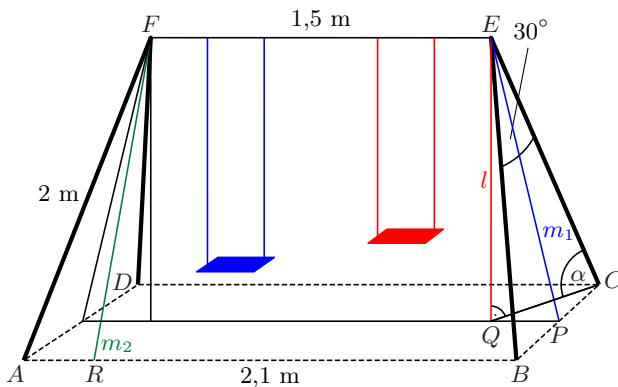
Végrehajtható-e ez a terv? Ha igen, a gyerekek nevének kezdőbetűivel adjunk meg egy lehetséges sorrendet, ha nem, indokoljuk válaszukat.

d) A gyerekek vászonnal borított zárható sátrat szeretnék készíteni úgy, hogy a hinta rúdjaik használják a sátor tartóiként.

Legalább hány négyzetméter anyagra van szükségük a sátor elkészítéséhez?

(16 pont)

Megoldás. a) Használjuk az ábra jelöléseit! Az α szög nagyságát keressük.



$$PQ = \frac{2,1 - 1,5}{2} = 0,3 \text{ m}, \quad \sin 15^\circ = \frac{BP}{2} \Rightarrow PC \approx 0,52 \text{ m}.$$

Mivel a CPQ háromszög derékszögű, ezért alkalmazható a Pitagorasz-tétel: $QC^2 = 0,3^2 + 0,52^2 \Rightarrow QC \approx 0,6$ m. Ekkor $\cos \alpha = \frac{0,6}{2}$, innen $\alpha \approx 72,5^\circ$ (mivel α a háromszög egy szöge). A rudak a vízszintessel körülbelül $72,5^\circ$ -os szöget zárnak be.

b) A két hinta tizedmásodpercekben mért lengésidejének legkisebb közös többszörösét kell meghatározni. Mivel $22 = 2 \cdot 11$, $24 = 2^3 \cdot 3$, ezek legkisebb közös többszöröse $2^3 \cdot 3 \cdot 11 = 264$. A hinták 26,4 másodperc múlva lesznek először a kiindulási helyzetben.

c) Igen, pl.: AB, CE, AD, BC, DE, AC, BD, AE, CD, BE, vagy egy másik sorrend: BC, AE, BD, AC, DE, AB, CD, BE, AD, CE.

Összesen $\binom{5}{2} = 10$ párt lehet képezni. A fenti esetekben mindegyik pontosan egyszer szerepel, és nincs egymás után közvetlenül kétszer hintázó gyermek. További megoldások is vannak.

d) A sátor elkészítéséhez két háromszög és két trapéz területét kell meghatározni. A BCE háromszög területe: $t_1 = \frac{EB \cdot EC \cdot \sin 30^\circ}{2} = 1,00$ m². Az $ABEF$ szimmetrikus trapézban $AR = PQ$, $0,3^2 + m_2^2 = 2^2$, innen $m_2 \approx 1,98$ m, tehát a trapéz területe: $t_2 \approx \frac{(2,1 + 1,5) \cdot 1,98}{2} \approx 3,56$ m².

A sátorhoz legalább $2 \cdot (1,00 + 3,56) = 9,12$ m² vászonra van szükség.

6. Egy tájékozási sportegyesület 100 sportolója három sportágban indul az idei versenyeken. Ebben az évben 85-en tájfutó, 40-en tájbringa és 18-an sítájfutó számokban versenyeznek. Mindenki indul legalább egy sportágban, pontosan két számban 29-en neveznek.

a) *Hányan vesznek részt mindhárom versenyszámban?*

b) *A klub tagjai életkoruk alapján három csoportot alkotnak: junior, felnőtt és szenior. A tagság 25%-a szenior, ezen belül másfélszer annyi férfi van, mint nő. A felnőttek között kétszer annyi a férfi, mint a női versenyző, a junioroknál pedig 3-mal kevesebb lány van, mint fiú. A klubtagság 60%-a férfi.*

Korosztályonként hány női és hány férfi versenyzője van a szakosztálynak?

c) *Az egyik versenyző annyira sikeres, hogy amennyiben elindul egy versenyen, akkor 70%-os valószínűséggel dobogón végez. Az idei szezonban 10 versenyen indul majd. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább négyszer dobogós helyezést ér el?*

d) *A szezonnyitó összejövetelen a legfiatalabb versenyzők között vásárlási utalványokat sorsolnak ki. A sorsoláson 6 fiú és 4 lány nevét egy urnába helyezik, majd visszatevés nélkül kihúznak három cédulát.*

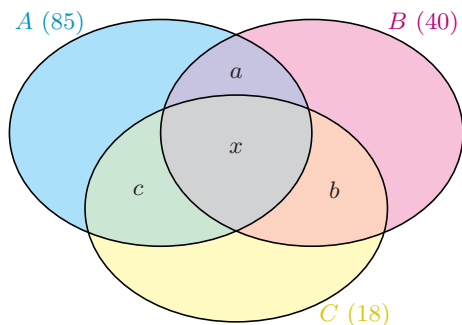
Mennyi a valószínűsége annak, hogy két lány és egy fiú nyer utalványt?

(16 pont)

Megoldás. a) Készítsünk Venn-diagramot:

Alkalmazzuk a logikai szitát a három halmazra (tájfutás: A , tájbringa: B , sítájfutás: C)

$$100 = 85 + 40 + 18 - [(a + x) + (b + x) + (c + x)] + x;$$



$$100 = 143 - (a + b + c) - 2x;$$

$$a + b + c = 29;$$

$$2x = 143 - 29 - 100,$$

ahonnan $x = 7$.

Heten vettek részt mindhárom versenyszámban.

b) Érdemes táblázatba foglalni az információkat:

Korcsoport	Férfi	Nő	Összesen:
Junior	y	$y - 3$	
Felnőtt	$2x$	x	
Szenior	15	10	25
Összesen:	60	40	

A nyilvánvaló adatok kiszámítása után a következő egyenleteket írhatjuk fel:

$$y + 2x + 15 = 60, \quad y - 3 + x + 10 = 40,$$

az egyenletrendszer megoldása: $x = 12$; $y = 21$. Az eredményeket szintén táblázatban adjuk meg.

Korcsoport	Férfi	Nő	Összesen:
Junior	21	18	39
Felnőtt	24	12	36
Szenior	15	10	25
Összesen:	60	40	100

c) Egyszerűbb meghatározni a komplementer esemény valószínűségét, vagyis azt, hogy mennyi annak az esélye, hogy nem sikerül legalább négyszer dobogós helyezést elérnie a versenyzőnek. Alkalmazhatjuk a binomiális eloszlásra vonatkozó ismereteinket, ekkor $p_{\text{nem nyert}} = 0,3$ és $p_{\text{nyert}} = 0,7$.

$P(10\text{-ből legfeljebb háromszor nyert}) =$

$$= \binom{10}{0} \cdot 0,7^0 \cdot 0,3^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0,7^1 \cdot 0,3^9 + \binom{10}{2} \cdot 0,7^2 \cdot 0,3^8 + \binom{10}{3} \cdot 0,7^3 \cdot 0,3^7 \approx 0,0106.$$

A kért valószínűség tehát: $1 - 0,0106 = 0,9894$.

d) Az összes eset száma: $\binom{10}{3} = 120$, a kedvező eseteké: $\binom{4}{2} \cdot \binom{6}{1} = 36$, ezért a keresett valószínűség: $p = \frac{36}{120} = 0,3$.

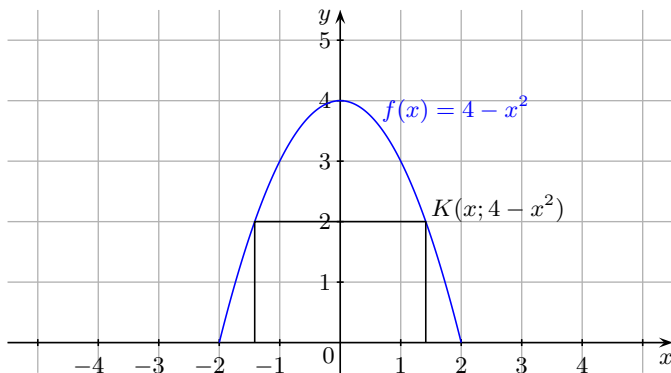
7. Az $f: [-2; 2] \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = 4 - x^2$ függvény grafikonja és az x tengely által bezárt korlátos tartományba berajzoltunk egy téglalapot, amelynek oldalai párhuzamosak a koordináta-rendszer tengelyeivel.

a) Mekkora az oldalai a legnagyobb területű ilyen téglalaprak?

b) Adott az $A(0; 4)$ és a $B(0; 8)$ pont. Az AB szakaszon véletlenszerűen felvett P pontból érintőket húzunk az $f(x)$ függvény grafikonjához, a két érintési pontot jelöljük E -vel és F -fel.

Mennyi a valószínűsége annak, hogy az EPF háromszög tompaszögű? (16 pont)

Megoldás. a) Nyilvánvaló, hogy a maximális területű téglalap két csúcsa a parabolán, a másik kettő az x tengelyen helyezkedik el, valamint az is, hogy a



téglalap egyik, parabolára illeszkedő pontja, $K(x; 4 - x^2)$ meghatározza a többi pont helyét. Az így kialakult téglalap vízszintes oldala $2x$, függőleges oldala $4 - x^2$ hosszú, a területe:

$$k(x) = 4x + 2(4 - x^2) = -2x^2 + 4x + 8; \quad x \in]0; 2[,$$

vagyis a $k(x) = -2x^2 + 4x + 8$ kifejezésnek keressük a maximumát. Ezt többféleképpen is megkaphatjuk. Egy lehetséges befejezés: $k'(x) = -4x + 4$; $0 = -4x + 4$; $x = 1$; $k''(x) = -4 < 0$, tehát itt maximumhely van, így a legnagyobb területű téglalap oldalai 2, illetve 3 egység.

Egy másik lehetséges befejezés: $k(x) = 10 - 2(x - 1)^2 \leq 10$; $k(x)$ akkor lesz a legnagyobb, ha az egyenlőség teljesül, ez pedig akkor áll fenn, ha $x - 1 = 0$, azaz $x = 1$; az előbbi eredményre jutottunk.

b) Az ábra szimmetriájából adódik, hogy a tompaszög az EPF háromszögben csak a P csúcsnál lehet. Ha P -t B -től A felé közelítjük az AB szakaszon, az $EPF <$ egyre nagyobb lesz. Tegyük fel, hogy létezik egy olyan $Q(0; q)$ pont, amelyre $EQF < = 90^\circ$, ekkor $\alpha = 45^\circ$. Kiszámítjuk, hogy ebben az esetben mekkora az AQ

távolság. Ha az érintő az x tengely pozitív részével 45° -os szöget zár be, akkor az érintő meredeksége $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, ami egyenlő az első derivált értékével az érintési pont abszcisszájában:

$$f'(x) = -2x, \quad -2x = 1, \quad x = -\frac{1}{2}.$$

Ekkor az ordináta: $f(-\frac{1}{2}) = 4 - (-\frac{1}{2})^2 = \frac{15}{4}$. Az E érintési pont koordinátái: $E(-\frac{1}{2}; \frac{15}{4})$, ezért az E -n átmenő (piros) érintő egyenlete: $y - \frac{15}{4} = 1 \cdot [x - (-\frac{1}{2})]$, amiből $y = x + \frac{17}{4}$. Ez az érintő az y tengelyt a $Q(0; \frac{17}{4})$ pontban metszi, ekkor $AQ = \frac{1}{4}$. Az AB szakaszon mozgó P pontból a görbéhez húzott érintőszakaszok abban az esetben zárnak be tompaszöget, ha $\alpha < 45^\circ$, azaz, ha P -nek az A -tól mért távolsága $\frac{1}{4}$ -nél kisebb.

Mivel az AB szakasz 4 egység hosszú, ezért az adott esemény valószínűsége: $\frac{\frac{1}{4}}{4} = \frac{1}{16} = 0,0625$.

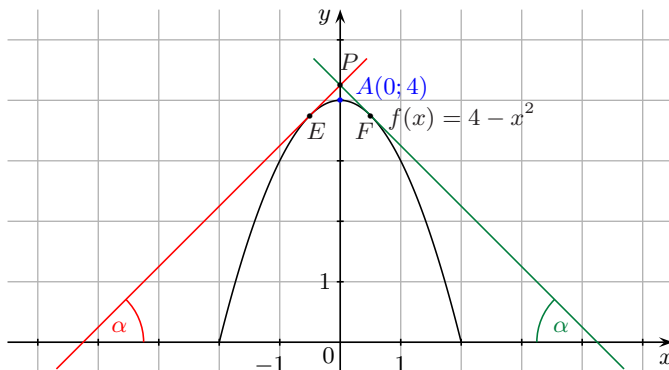
8. Egy foci VB döntőjébe jutott 48 csapat nevét négy kalapba helyezik, mind-egyikbe 12-t, majd ezekből egyet-egyet sorsolva alakítják ki a 4-4 csapatból álló 12 csoportot, amelyeket az $A, B, C, \dots, K, L$ betűkkel jelölnek meg. A sorsolást az A csoport résztvevőinek sorsolásával kezdik, majd az ábécé sorrendjében haladnak a K -ig.

a) Hányféleképpen alakulhat ki a 12 csoport? (Két sorsolás akkor különböző, ha van olyan csoport, ahova nem pontosan ugyanazok a csapatok kerültek. A különböző betűjelű csoportokat különbözőeknek tekintjük.)

A csoportmérkőzéseken minden csapat mindegyik csoporttársával játszik egy mérkőzést, amelyen a győztes 3, a vesztes 0, döntetlen esetén mindkét csapat 1-1 pontot kap. Az egyik csoportban, amelyben a Dzéta (ζ), az Éta (η), a Théta (ϑ) és az Ióta (ι) csapat volt, a csoportmérkőzések végén a ζ csapatnak 6, az η -nak 5 és a ϑ -nak 1 pontja lett.

b) Hány pontot szerzett az ι csapat?

A csoportmérkőzések befejezése után 32 csapat jut tovább az egyenes kieséses szakaszba, ahol a mérkőzéseken nincs már döntetlen, a győztes továbbjut a következő fordulóba, a vesztes kiesik. Az első fordulóban 16 mérkőzést játszanak, minden



továbbiban feleannyit, mint az előzőben. Az a csapat nyeri a VB-t, amelyik az utolsó mérkőzésen nyerni tud. A döntő előtt lejátsszanak még egy mérkőzést a harmadik helyért az utolsó előtti fordulóban vesztes csapatok. A VB után készített elemzésekből kiderült, hogy az összes mérkőzés 25%-a végződött döntetlennel.

c) Ha az összes csoportmérkőzés közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet, mennyi annak a valószínűsége, hogy döntetlennel végződött? (16 pont)

Megoldás. a) Az A csoport sorsolásakor mindegyik kalapból 12–12-féleképpen választhatnak, ez $12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 = 12^4$ lehetőség, a B csoport sorsolásánál $11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 = 11^4$, és így tovább, tehát az összes lehetőség: $12^4 \cdot 11^4 \cdot \dots \cdot 1^4 = (12!)^4 = 5,26 \cdot 10^{34}$.

b) A csoportmérközéseken egy csoporton belül $\binom{4}{2} = 6$ mérkőzés van, mindegyik csapat három mérkőzést játszik. A ζ csapat úgy szerezhette 6 pontot, hogy két mérkőzésen nyert, egyen kikapott, az η pedig egyszer nyert, kétszer döntetlent játszott, csak így lehetett 5 pontja. Mivel η nem kapott ki, ζ pedig nem játszott döntetlent, a két csapat egymás elleni mérkőzésén η nyert. ζ tehát kikapott η -tól, nyert ϑ és ι ellen, η pedig nyert ζ ellen, ϑ és ι csapatokkal pedig döntetlent ért el. Hiányzik még a hatodik csoportmérkőzés ϑ és ι között. Mivel ϑ -nek mindössze 1 pontja lett, és ez az η elleni mérkőzésen született, tehát ϑ kikapott ι -tól, így ι végül 4 pontot szerzett.

c) A csoportmérközéseken összesen $6 \cdot 12 = 72$ mérkőzés zajlott, a kieséses szakaszban minden meccsen egy csapat esett ki, végül a győztes maradt, így 31, és még egy meccs a harmadik helyért, így összesen 32 mérkőzést játszanak, vagyis egy ilyen torna összesen $72 + 32 = 104$ mérkőzésből áll. Ennek 25%-a lett döntetlen, ez 26 mérkőzés, ez a 26 döntetlen mindegyike a csoportmérközéseken született, ezért:

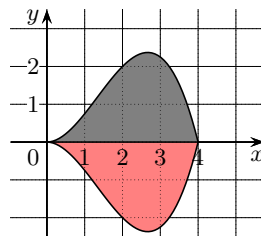
$$P(A) = \frac{26}{72} = \frac{13}{36} \approx 0,3611.$$

9. a) Határozzuk meg az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^2 - \frac{x^3}{4}$ függvény zérushelyeit.

b) Hol van helyi maximuma az $f(x)$ függvénynek?

c) Mekkora az ábrán látható színes alakzat területe?

A szürke részt a $g(x) = x^2 - \frac{x^3}{4}$, $x \in [0; 4]$ függvény grafikonja határolja, a pirosat pedig a $-g(x)$, $x \in [0; 4]$ függvényé. (16 pont)



Megoldás. a) $0 = x^2 \cdot (1 - \frac{x}{4})$ alapján $x^2 = 0$ vagy $1 - \frac{x}{4} = 0$; a zérushelyek: $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

b) $f'(x) = 2x - \frac{3}{4}x^2$; $0 = x(2 - \frac{3}{4}x)$, ahonnan $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{8}{3}$.

$$f''(x) = 2 - \frac{3}{2}x;$$

$f''(0) = 2 > 0$, ezek szerint a 0-nál lokális minimuma van a függvénynek;

$f''(\frac{8}{3}) = 2 - \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{3} = -2 < 0$, itt lokális maximuma van a függvénynek.

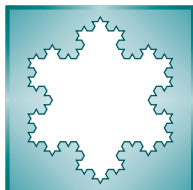
A függvénynek a $\frac{8}{3}$ -nál van lokális maximuma.

c) A szimmetria miatt a piros tartomány területe egyenlő a szürke területével, ezért:

$$T = 2 \int_0^4 \left(x^2 - \frac{x^3}{4} \right) dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} \right]_0^4 = \frac{32}{3}.$$

Németh László

Fonyód



Matematika C gyakorlatok megoldása

C. 1803. *Hány olyan pozitív egész számokból álló számhármast van, amelyben a három szám legnagyobb közös osztója 4, legkisebb közös többszöröse pedig 2024?*

Javasolta: Kozma Katalin Abigél (Győr)

Megoldás. A 2024 prímtényezőss felbontása $2^3 \cdot 11 \cdot 23$. A $4 = 2^2$ mind a három számnak osztója, úgyhogy egyszerűsíthetünk 2^2 -nel. Az egyszerűsítés után kapott három szám legnagyobb közös osztója 1, legkisebb közös többszöröse pedig $2 \cdot 11 \cdot 23$. Így egy 2-est, egy 11-est és egy 23-ast kell szétosztani a három szám között. Mindháromban nem szerepelhet ugyanaz a prímtényező, de mindegyiknek legalább az egyikben szerepelnie kell. Ennek megfelelően a kettést $3 + 3 = 6$ -féleképpen helyezhetjük el a három számban, a 11-est és a 23-ast is, mivel lehet egy vagy kettő belőlük.

Ez 6^3 esetet jelent, amelyek közül azokat az eseteket 6-szor számoltuk meg, amikor három különböző szám alkotja a létrejövő számhármast. Vannak azonban olyan számhármastok, amelyekben ugyanaz a szám kétszer szerepel, például $(1; 1; 506)$. Ezeket a számhármastokat csak 3-szor számoltuk meg, nem 6-szor. Ilyen ismétlődő szám lehet az

1; 2; 11; 23; 22; 46; 253 és az 506,

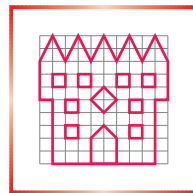
azaz 8 olyan eset van, amikor 3-szor számoltuk ugyanazokat a számhármastokat.

Összesen tehát $6^3 - 3 \cdot 8$ esetet számoltunk meg hatszor, tehát $\frac{6^3 - 24}{6} = 32$ olyan számhármast van, amelyben mindhárom szám különböző. A fentiek alapján 8 olyan számhármast van, amelyben két egyforma szám van, így összesen $32 + 8 = 40$ darab, a feladat feltételeinek megfelelő számhármast van.

Molnár-Sáska Tamás (Budapest, ELTE Radnóti M. Gyak. Ált. Isk. és
Gyak. Gimn., 6. o. t.)

Összesen 150 dolgozat érkezett. 5 pontos 38, 4 pontos 9, 3 pontos 11 dolgozat. 2 pontot 17, 1 pontot 48, 0 pontot 21 versenyző kapott. Nem versenyszerű 5, nem értékelhető 1 dolgozat.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok
ABACUS-szal közös pontverseny
9. osztályosoknak
(829–833.)



K. 829. Melyik az a két legkisebb szomszédos pozitív egész szám, amelyeknek a számjegyeit összeadva éppen 2024-et kapunk?

K. 830. Egyes úszóversenyeken rendeznek úgynevezett mix (vegyes összeállítású) 4×100 m vegyesváltó versenyt. Ez azt jelenti, hogy két férfi és két nő alkotja a csapatot, és minden úszásnemben 100 métert kell teljesíteni. Az szabadon választható, hogy melyik úszásnemben versenyeznek a csapat női és férfi tagjai.

A legjobb időt elért versenyzők 100 méteres részeredményeinek táblázata a következő:

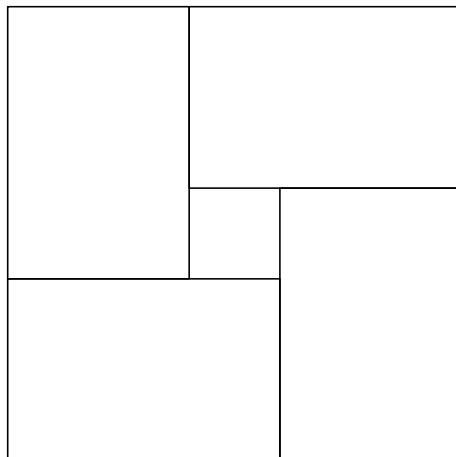
Hátúszás		Mellúszás		Pillangó		Gyorsúszás	
Botond	52,30	Ferenc	59,03	András	49,90	András	47,40
Csaba	52,52	Géza	59,11	Botond	49,99	Csaba	48,48
András	52,59	Hugó	59,30	Dénes	50,21	Elemér	48,50
Xénia	57,33	Sára	65,28	Yvette	55,58	Xénia	52,36
Zóra	57,72	Tímea	65,54	Ursula	55,63	Yvette	52,49
Vera	57,98	Róza	65,59	Vera	56,21	Piroska	52,73

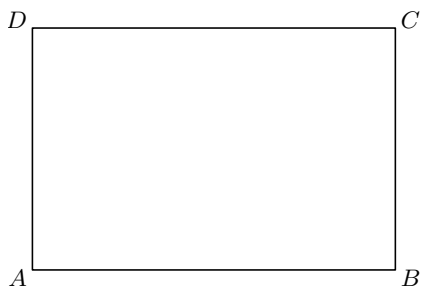
Feltételezve, hogy egy versenyen pontosan ugyanezt az eredmény tudják produkálni, milyen összeállítás legyen a csapat, hogy a legjobb időeredményt ériék el?

K. 831. Négy egybevágó téglalapot úgy helyeztünk el az ábrának megfelelően, hogy egy nagy külső négyzet és egy kis belső négyzet alakult ki.

A nagy négyzet és egy téglalap területének aránya $25 : 6$, továbbá a kis belső négyzet területe 144 cm^2 . Hány centiméter hosszúak a téglalapok oldalai?

K/C. 832. Kilenc angol lord klubok alapítását tervezi. Olyanokat, hogy minden klubban pontosan hárman legyenek közülük, de semelyik két klubnak ne legyen egyenél több közös tagja. Legfeljebb hány klubot alapíthatnak?



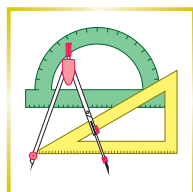


K/C. 833. Adott az *ábra* szerinti $20\text{ cm} \times 30\text{ cm}$ méretű, téglalap alakú papírlap. Az A és C csúcsát egymásra hajtva a hajtásegyenes a téglalap AB és CD oldalait a P és Q pontokban metszi. Mutassuk meg, hogy az $APCQ$ négyszög rombusz, és számoljuk ki a területét.



Beküldési határidő: 2024. december 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (832–833., 1828.–1832.)

Feladatok 10. évfolyamig

K/C. 832. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

K/C. 833. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

Feladatok mindenkinek

C. 1828. Anna össze akarta adni a pozitív egész számokat 1-től 500-ig, ám véletlenül kihagyott egy háromjegyű számot. Hány olyan szám van, amelyet kihagyhatott, ha eredményül egy 3-mal osztható, 3-ra végződő számot kapott?

Javasolta: *Kozma Katalin Abigél* (Győr)

C. 1829. Az egységnyi oldalú $ABCD$ négyzet AB oldalán úgy vettük fel az E , BC oldalán pedig az F pontot, hogy $\angle EDF = 45^\circ$. Határozzuk meg az EBF háromszög kerületének pontos értékét.

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

C. 1830. Az $A = \{x; y; z; u; v\}$ halmaz elemei olyan természetes számok, amelyekre $x + 2y = 3v$ és $z + u = 2v$. Bizonyítsuk be, hogy az A halmaz elemei nem lehetnek közvetlen egymás utáni természetes számok.

Matlap, Kolozsvár

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1831. Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a

$$(1) \quad 2x^3 - 3x^2y + 2xy^2 - y^3 + 1 = 0,$$

$$(2) \quad x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 + 3 = 0$$

egyenletrendszert.

JavaSolta: *Bíró Bálint* (Eger)

C. 1832. Legyen ABC olyan háromszög, amelynek területe $15\sqrt{7}$, továbbá minden oldalának hossza egész szám. Mekkoraák lehetnek az oldalak?

JavaSolta: *Szmerka Gergely* (Budapest)

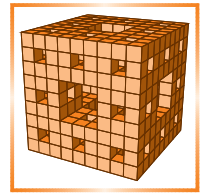


Beküldési határidő: 2024. december 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5414–5421.)



B. 5414. Adott az $ABCD$ téglalap és a P, Q pontok úgy, hogy ABP körülírt körének középpontja Q , míg BCQ körülírt körének középpontja P . Számítsuk ki a PDQ szöget.

(3 pont)

JavaSolta: *Hujter Bálint* (Budapest)

B. 5415. Beni, Lili és Domi egyszerre indulva 3-3 kört futnak az atlétikai pályán. A bírót sorban felírja azoknak a nevét, akik éppen befejeznek egy kört, és így végül egy kilenc névből álló listát kap. Hányféle lehet ez a lista, ha tudjuk, hogy egyszer sem fejezik be ketten a körüket egyszerre és mindhárman végig egyenletes sebességgel futnak?

(4 pont)

JavaSolta: *Pach Péter Pál* (Budapest)

B. 5416. Az x, y, z valós számokra $x + y + z = 8$ és $xy + yz + zx = 5$. Legfeljebb mekkora lehet z ?

(3 pont)

JavaSolta: *Sztranyák Attila* (Budapest)

B. 5417. Melyik szám a nagyobb, $(2^{1000})!$ vagy $2^{1000}!$

(4 pont)

JavaSolta: *Szalai Máté* (Szeged)

B. 5418. A hegyesszögű ABC háromszög oldalainak hossza a, b és c , körülírt körének sugara R . Mutassuk meg, hogy

$$\frac{1}{-a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{a^2 - b^2 + c^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \geq \frac{1}{R^2}.$$

Milyen ABC háromszögre teljesül egyenlőség?

(5 pont)

Javasolta: Kiss Géza (Csömör)

B. 5419. Adott n pozitív egészre jelölje $q(n)$ az n szám legnagyobb páratlan osztóját. Legyen $P(n) = q(1) + q(2) + \dots + q(n)$ és $S(n) = 1 + 2 + \dots + n$. Igazoljuk, hogy a $P(n)/S(n)$ arány végtelen sok n -re kisebb, mint $2/3$, és végtelen sok n -re nagyobb, mint $2/3$.

(5 pont)

Javasolta: Sztranyák Attila (Budapest)

B. 5420. Ádám, a hírhedt szélhámós, a következő módon működő szerencsejátékra nevezett be. Egy szabályos 13-szög alakú forgóasztal mindegyik csúcsában egy piros vagy egy fekete sapka van. (Az azonos színű sapkák egymástól megkülönböztethetetlenek.)

Az egyik sapka alatt 1000 dollárt rejtettek el, a többi alatt nincsen semmi. A játékvezető megpörgeti az asztalt a középpontja körül, majd Ádám felemelhet egyetlen sapkát, és amit alatta talál, azt hazaviheti. Ádám cinkostársa, Béla, a szerencsejátékot szervező cégnél dolgozik.

Miután a sapkákat a munkatársai tetszésük szerint elhelyezték az asztal csúcsaiban, Béla feladata betenni a pénzt valamelyik sapka alá. Miután betette a pénzt,

a) ki kell cserélnie a sapkát a másik színűre,

b) kicserélheti a sapkát a másik színűre

– de a többi sapkához nem nyúlhat.

Ki tud-e dolgozni Ádám és Béla egy olyan stratégiát az a), illetve a b) esetben, amellyel biztosan megnyerik a pénzt? (Miután Béla belépett a kaszinóba, már nem beszélhet Ádámmal, és az asztalt előkészítő munkatársait sem befolyásolhatja.)

(6 pont)

Javasolta: Damásdi Gábor (Budapest)

B. 5421. A hegyesszögű ABC háromszög beírt körének középpontja I , sugara r , a BC oldalhoz írt körének középpontja I_a , sugara r_a , továbbá a körülírt körének sugara R . Az II_a szakasz hossza $r_a + R - r$. Igazoljuk, hogy $BAC \leq 60^\circ$.

(6 pont)

Javasolta: Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 2024C.

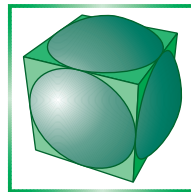


Beküldési határidő: 2024. december 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (890–892.)



A. 890. Bart, Lisa és Maggie a következő játékot játsszák: Bart véges sok pontot kiszínez egy körön kékre vagy pirosra olyan módon, hogy nem lehet találni a színezett pontok között négyet úgy, hogy a színük egymás után felváltva kék-piros-kék-piros (a kiválasztott pontoknak nem kell szomszédosnak lenniük), Lisa pedig kiválaszt néhány pontot a színezettek közül. Ezután Maggie megkapja a kört és a Lisa által kiválasztott pontokat Barttól (esetleg elforgatva), de szín nélkül. Végül Maggie a kör összes pontját kiszínezi kékre vagy pirosra. Lisa és Maggie megnyeri a játékot, ha Maggie eltalálja a Bart által eredetileg választott pontok színét. Egy Lisa és Maggie által megbeszélt stratégiát nyerő stratégiának nevezünk, ha Bart tetszőleges színezése esetén megnyeri a játékot.

Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan nyerő stratégiája Lisának és Maggienek, ahol Lisa minden esetben legfeljebb c darab pontot választ ki, és keressük meg c legkisebb lehetséges értékét.

javasolta: *Pálvölgyi Dömötör* (Budapest)

A. 891. Adott egy hegyesszögű ABC háromszög. A B' és C' pont rendre az AB és AC oldal belsejében helyezkedik el. Az ABC és $AB'C'$ háromszögek körülírt körei M -ben, az ABC' és $AB'C$ háromszögek körülírt körei pedig K -ban metszik egymást másodszor. Tükrözzük M -et az AB és AC egyenesre, a két tükröképen átmenő egyenest jelöljük l -lel.

a) Bizonyítsuk be, hogy az M -en átmenő, AM -re merőleges egyenes, az AK egyenes és l vagy egy ponton mennek át, vagy mind párhuzamosak.

b) Igazoljuk, hogy ha a három egyenes az S ponton megy át, akkor az SBC' és SCB' háromszögek területe egyenlő.

javasolta: *Bán-Szabó Áron* (Budapest)

A. 892. Adott két egész szám, k és d úgy, hogy d osztója a $k^3 - 2$ számnak. Mutassuk meg, hogy ekkor léteznek olyan a , b , c egész számok, amelyekre

$$d = a^3 + 2b^3 + 4c^3 - 6abc.$$

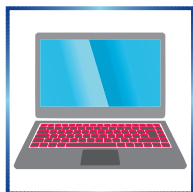
javasolta: *Beke Csongor és Simon László Bence* (Cambridge)



Beküldési határidő: 2024. december 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>





Informatikából kitűzött feladatok (639–642.)

I. 639. Ismerjük egy vállalkozás dolgozóinak életkorát egy adott sorrendben. Az életkoruk alapján csoportokat szeretnénk kialakítani. Egy csoportba tesszük azokat, akiknek életkora legfeljebb 1 évvel tér el valakitől a csoportban. Például, ha a cégnél dolgozik egy 34 éves, egy 35 éves és egy 36 éves ember, akkor ők egy csoportba tartoznak.

Készítsünk programot *i639* néven, amely N ($1 \leq N \leq 100$) dolgozó E_i ($20 \leq E_i \leq 90$) életkorának ismeretében meghatározza a csoportok számát, a legnagyobb csoport létszámát és azt, hogy ebből a csoportból hányadik az első és az utolsó dolgozó.

A program standard bemenetének első sorában a dolgozók N száma található. A következő sorban az N dolgozó életkora szerepel egy-egy szóközzel elválasztva.

A program a standard kimenetre írja ki soronként a csoportok számát, a legnépesebb csoport létszámát, a csoport első tagjának és utolsó tagjának sorszámát.

Példa:

Bemenet
14
32 27 31 29 28 52 28 53 62 27 44 33 31 59
Kimenet
6
5
2 10

Magyarázat: a bemenetben szereplő életkorok csoportokba sorolását a különböző színek jelzik. A zöld színű korcsoportban vannak a legtöbben.

Beküldendő egy tömörített *i639.zip* állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

(10 pont)

I. 640. A Normál utcában a házak mérete és a szomszédos kapuk távolsága egyenlő egymástól. Az utca egyik oldalán a páros, a másik oldalán a páratlan házszámok vannak 1-től 50-ig. Az utcában minden szabályosan ismétlődő, kivétel a közvilágítás, a telepített lámpák elhelyezése.

Néhány lámpaoszlopot már telepítettek a házak kapuja elé. Egy-egy lámpa az azonos utcaoldalon a saját, az előző és az utána következő, valamint az úttest túloldalán szemben lévő ház előtti járdát világítja meg. A házak elé legfeljebb egy lámpaoszlopot telepítettek, és az utca első vagy utolsó házai előtt nincs lámpaoszlop.

Készítsünk programot *i640* néven, amely a következő feladatokat megoldja, illetve a kérdésekre válaszol.

A program standard bemenetének első sorában a már az utcába telepített lámpaoszlopok száma N ($0 \leq N \leq 46$) van. A következő sorban N darab házszám van növekvő sorban, amely megadja, hogy hányas számú házak kapuja előtt áll lámpaoszlop.

A program standard kimenetére írjuk ki a feladatok megoldását a mintához hasonló formában.

1. Írjuk ki a Normál utca páratlan és a következő sorban a páros oldalának házszámait úgy, hogy a megvilágított járdájú házak házszáma elé a „.” karaktert, különben szóközt írjunk.
2. Határozzuk meg azokat a házszámokat, amelyek előtt már áll lámpaoszlop, de ha azok közül valamelyiket leszerelnénk, akkor a megvilágítás nem változna.
3. Soroljuk fel azoknak a háznak a házszámát, amelyek elé egy lámpát telepítve a megvilágított házak száma 4-gyel, 3-mal, 2-vel, 1-gyel növekedne, vagy nem növekedne. Vegyük figyelembe, hogy utcavégi ház elé nem lehet lámpaoszlopot telepíteni.
4. Világítsuk meg a teljes utcát a lehető legkevesebb új lámpaoszlop telepítésével. Adjuk meg a házszámokat egy ilyen telepítéshez növekvő sorrendben. Több lehetséges megoldás esetén elegendő egyet megadni.

Példa:

Bemenet
10 3 8 9 10 12 19 34 37 38 45
Kimenet
1. feladat .1.3.5.7.9.11 13 15.17.19.21 23 25 27 29 31.33.35.37.39 41.43.45.47 49 2.4.6.8.10.12.14 16 18.20 22 24 26 28 30.32.34.36.38.40 42 44.46 48 50
2. feladat Felesleges lámpaoszlopok: 9 10
3. feladat 4 változás: 24 25 26 27 28 29 3 változás: 15 16 23 30 42 2 változás: 13 14 17 18 20 21 22 31 32 41 43 44 47 48 1 változás: 4 11 33 39 40 0 változás: 5 6 7 35 36
4. feladat Szükséges új oszlopok száma: 4 15 18 24 27 32 42 47 48

Beküldendő egy tömörített *i640.zip* állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

(10 pont)

I. 641. A feladat a szeptemberi számban megjelent I. 633. feladat folytatása.

Most háromféle speciális prímet keresünk az első százezer prímszám között, ezek a *palindromprímek*, a *mírpszámok* és a *Bölcsföldi-Birkás prímek*. Nézzük is ezek definícióit:

Palindromprímnek nevezzük azt a p prímszámot, amelynek 10-es számrendszerbeli alakja palindrom, vagyis balról és jobbról olvasva ugyanaz a szám. Például: a 12421 ilyen prím.

Mírpszámnak azt a prímet nevezzük, amelynek 10-es számrendszerbeli alakja visszafelé (jobbról balra) olvasva is prím, de a szám nem palindromprím. Például: az 1009 ilyen szám, hiszen nem palindrom, de a 9001 is prím.

Bölcsföldi-Birkás prímnek azt a prímet nevezzük, amelynél az egyes számjegyek, a számjegyek száma és azok összege is prím. Például: a 757 ilyen szám, hiszen számjegyei (5 és 7) prímek, a számjegyek száma (3) is prím és a számjegyek összege (19) is prím.

1. Egy üres táblázatkezelő munkafüzetben nevezzük át „**prím100000**”-re a munkalapot, a munkafüzetet mentsük **prim_2-resz** néven.
2. Illesszük be az **A3** cellától az első 100 000 prím listáját a **100000prim.txt** fájlból. Az első két sorba oszlopfeliratok kerülhetnek a számításokhoz.
3. Válogassuk ki a három prímcsoport első 100 000 prím közé eső tagjait. A számításokat ezen a munkalapon végezzük.
4. Hozzunk létre egy **spec** nevű munkalapot, amelynek **A**, **B** és **C** oszlopaiban szerepeljen az első sorban a prímcsoportok neve, majd alattuk növekvő sorrendben helykihagyás nélkül az adott csoportok prímszámai.
5. Ezek után végezzünk statisztikai vizsgálatokat, amelyekben a legfeljebb hatjegyű prímeket vizsgáljuk, mert nincs a listában az összes hétjegyű prímszám.
 - a) Határozzuk meg, hogy a pontosan egy-, kettő-, ..., hatjegyű természetes számok hány százaléka prím. Készüljön erről oszlopdiagram külön diagramlapra, amelynek neve legyen **százalék**.
 - b) Határozzuk meg, hogy a prímekben hányszor fordulnak elő az egyes számjegyek, például a 89393 számban van két hármas, egy nyolcas és két kilences számjegy. Készüljön erről oszlopdiagram külön diagramlapra a minta szerint, melynek neve legyen **számjegyek**.
 - c) Jelenítsük meg az **A100004**-es cellában az alábbi szöveget: „ $táv > 99$ ” és a **B100004**-es cellában adjuk meg, hogy hány esetben fordul elő, hogy két egymást követő prímszám különbsége legalább 100.
 - d) Jelenítsük meg az **A100005**-ös cellában az alábbi szöveget: „ $maxtáv$ ” és a **B100004** es cellában az első 100 000 prím esetén a szomszédos prímszámok maximális különbségének értékét, a **C100004** és **D10004** cellákban pedig a két szóban forgó prímszámot.

A 6., 7. és 8. pont módosításaival elérhető, hogy 5 MB alá kerüljön a fájlméret, és feltölthető legyen a megoldás.

6. A **prím100000** munkalapon cseréljük le oszloponként az első tizenhét sor utáni képleteket az értékükre. Hasonlóan járunk el a 100002 sor alatti adatokkal

és a két diagram adataival, továbbá a teljes **spec** munkalappal. Ezzel is csökkentjük a fájl méretét.

7. Töröljük a **prim100000** munkalap 20000:80000 sorának tartalmát.
8. Végül a munkafüzetet mentjük az eredeti nevén **xlsb** formátumban (bináris munkafüzetként).



Segédszámításokat a **prim100000** munkalapon a **B**, a **spec** munkalapon pedig a **D** oszloptól jobbra lehet végezni. A megoldásban saját függvény vagy makró nem használható.

Beküldendő az *ib41.zip* tömörtett állomány a munkafüzettel és egy rövid dokumentációval, amelyben szerepel a kiválogatások magyarázata, a táblázatkezelő neve, verziószáma.

Letölthető fájl: **100000prim.txt**

(10 pont)

I. 642. Néhány hazai meteorológiai állomás 1985 és 2019 között mért éves adatait vesszük górcső alá.

1. Nyissunk egy üres táblázatkezelő munkafüzetet. Töltsük be egy üres munkalapra az A1 cellától kezdve az UTF-8 kódolású, tabulátorokkal tagolt **met-adat.txt** fájl tartalmát. A munkalap kapja a **metadatok** nevet. Munkánkat mentjük **idojaras** néven a táblázatkezelő alapértelmezett formátumában.
2. Formázzuk meg az adatokat a minta és a leírás szerint.
 - a) Egyesítsük az **A1:AJ1**cellatartományt;
 - b) szegélyezzük a munkalap adatokat vagy képleteket tartalmazó celláit;
 - c) a munkalap betűtípusa legyen Arial, az alap betűméret 11 pont;
 - d) az első sor betűmérete legyen 16 pontos, a betűk félkövérek;
 - e) állítsunk be olyan oszlopszélességet, hogy minden adat látható legyen;
 - f) a második sor legyen kb. dupla magasságú, a betűstílus legyen félkövér, a cellák függőlegesen és vízszintesen középre igazítottak az **A2**-es cellát kivéve – lásd a mintát;
 - g) minden cella, amely képletet tartalmaz legyen sárga háttér- és zöld betűszínű;
 - h) a mintákon halványsárga tónusú cellák kapjanak a minták szerinti tónust és félkövér betűtípust.

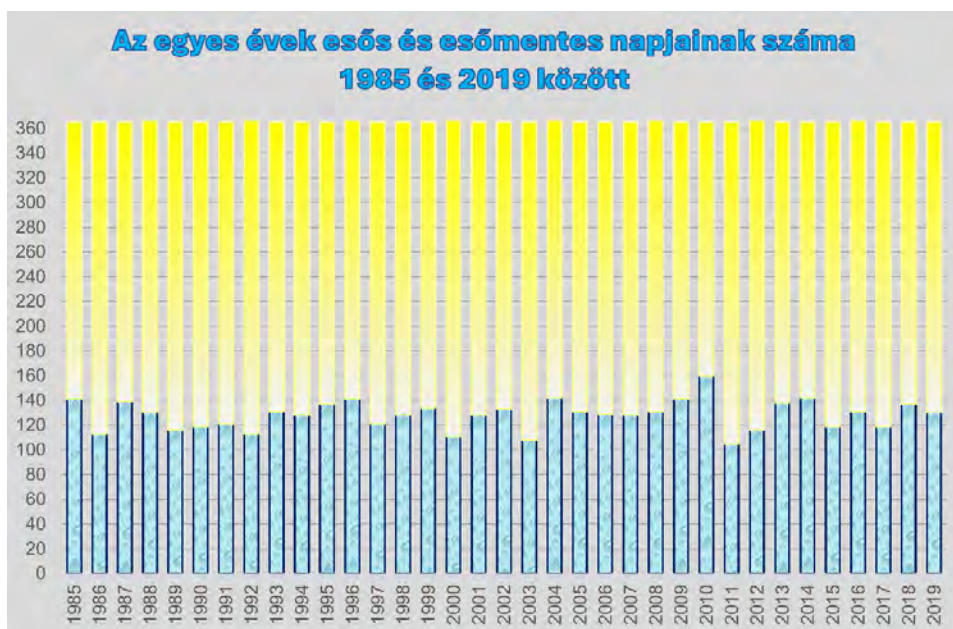
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	Néhány időjárás adat éves átlaga M														
2	Év	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
3	Megfigyelő állomás	Átlagos középhőmérséklet, °C													
4	Budapest	10,4	11,1	10,7	11,3	11,8	11,9	10,8	12,2	11,3	12,5	11,4	10,6	11,3	11,1
5	Debrecen	8,7	10,0	9,4	9,9	10,4	10,6	9,5	10,6	9,8	11,3	10,5	10,1	10,3	10,1
6	Győr	9,2	9,7	9,5	10,4	10,8	11,0	9,8	11,3	10,3	11,6	10,3	9,1	9,9	10,1
7	Kecskemét	9,4	10,2	9,8	10,3	10,8	11,0	9,6	11,2	10,2	11,6	10,5	9,4	9,9	10,1
8	Kékestető	4,7	5,7	5,0	5,3	6,2	6,3	4,9	6,3	5,7	6,8	5,5	4,7	5,3	5,5
9	Miskolc	8,1	9,1	8,7	9,2	9,6	10,0	9,0	10,1	9,6	10,8	9,7	8,8	9,3	9,9
10	Nyíregyháza	8,4	9,4	8,8	9,6	10,1	10,2	9,3	10,2	9,5	11,0	9,9	9,3	9,5	9,9
11	Pécs	9,7	10,3	10,0	10,7	11,2	11,5	10,2	11,8	10,5	12,0	10,7	9,6	10,4	10,1
12	Siófok	9,7	10,2	9,9	10,9	11,3	11,4	10,3	11,9	10,6	12,2	10,9	9,8	10,7	11,1
13	Szeged	9,5	10,4	10,2	10,7	11,3	11,2	9,7	11,4	10,3	11,7	10,7	9,8	10,1	10,1
14	Szombathely	8,7	9,1	9,0	9,8	10,2	10,2	9,0	10,6	9,7	11,0	9,7	8,6	9,5	10,1
15	Országos átlag	8,8	9,6	9,2	9,8	10,3	10,5	9,3	10,7	9,8	11,1	10,0	9,1	9,7	10,1
16	Minimum hőmérséklet, °C														
17	Budapest	-15,5	-11,8	-18,1	-8,4	-7,5	-9,7	-11,7	-9,6	-9,7	-7,2	-11,5	-11,3	-11,9	-10,1

	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK
1	esői alapján 1985–2019 között															
2	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	Legnagyobb érték
3	10,9	11,9	13,3	12,9	12,4	11,4	12,2	13,0	12,4	13,3	13,2	12,7	12,8	13,8	14,0	14,0
4	9,8	10,5	11,9	11,6	11,6	10,5	10,7	11,3	11,3	12,2	11,9	11,1	11,1	12,3	12,4	12,4
5	10,1	10,9	11,8	11,6	11,3	10,2	10,9	11,5	11,1	11,9	11,9	11,4	11,5	12,4	12,5	12,5
6	10,5	11,1	12,3	11,7	12,0	10,5	11,4	11,7	11,5	12,2	11,9	11,3	11,2	12,3	12,5	12,5
7	5,5	6,2	7,1	6,7	6,7	5,5	6,7	6,7	6,4	7,4	7,4	6,7	6,7	7,5	7,6	7,6
8	9,6	10,0	11,4	11,2	10,9	9,7	10,4	10,9	10,5	11,7	11,7	11,1	10,8	11,7	11,8	11,8
9	9,4	10,0	11,5	11,1	11,1	10,1	10,5	10,9	10,9	11,8	11,5	10,9	10,8	12,1	12,2	12,2
10	10,2	11,2	12,2	12,0	11,9	10,6	11,5	12,2	11,5	12,3	12,2	11,8	12,0	12,5	12,8	12,8
11	10,6	11,4	12,7	12,2	12,0	10,9	11,6	12,4	11,9	12,7	12,4	12,0	12,1	13,0	13,1	13,1
12	10,2	11,1	12,0	12,0	12,1	11,1	11,4	11,8	11,8	12,4	12,2	11,8	11,9	12,8	12,9	12,9
13	9,3	10,1	11,3	11,2	10,8	9,8	10,4	11,1	10,7	11,7	11,4	10,9	10,8	11,6	11,7	11,7
14	10,4	10,4	11,6	11,3	11,2	10,0	10,7	11,2	10,9	11,8	11,6	11,1	11,1	12,0	12,1	
15	-10,9	-12,0	-6,2	-8,6	-13,7	-10,5	-7,5	-13,1	-5,8	-11,1	-7,2	-9,0	-15,2	-9,8	-5,6	-5,6

57	Csapadékos napok száma																		1986
58	Budapest	134	110	131	125	89	111	114	110	128	113	129	118	104	109	135	104	1986	
59	Debrecen	156	113	125	136	119	112	110	120	131	134	129	134	114	131	132	120	1986	
60	Győr	140	113	144	121	106	110	111	116	143	150	137	139	119	124	129	121	1986	
61	Kecskemét	137	114	136	111	118	117	128	99	129	124	139	138	115	121	133	97	1986	
62	Kékestető	149	133	156	145	126	131	147	117	156	148	165	163	145	146	149	134	1986	
63	Miskolc	147	106	131	139	113	124	120	97	118	106	124	138	127	129	132	116	1986	
64	Nyíregyháza	146	107	141	143	114	121	126	114	127	114	112	138	121	127	138	116	1986	
65	Pécs	140	114	151	130	140	129	122	127	138	118	149	158	119	132	141	99	1986	
66	Siófok	136	106	137	114	125	121	105	113	124	129	146	146	114	131	127	103	1986	
67	Szeged	129	107	125	128	109	112	118	99	117	134	143	143	124	123	124	87	1986	
68	Szombathely	135	118	149	136	117	126	125	130	130	140	130	141	130	132	138	121	1986	
69	Országos átlag	141	113	139	130	116	119	121	113	131	128	137	141	121	128	134	111	1986	
70	Esőmentes nap	224	252	226	236	249	246	244	253	234	237	228	225	244	237	231	255	2	
71	Aszályos évek																	2000	
72	Évi csapadékátlag	585,1																	
73	Legtöbb csapadék																		
74	Kékestető																		
75	Leghidegebb hely	Éve																	
76	Szeged	1982																	

3. Számítsuk ki az *Országos átlagot* tartalmazó sorokba az adott meteorológiai jellemzők évenkénti átlagát az összes évre, és az **AK** oszlopba az évek során mért legnagyobb értékét.
4. Számítsuk ki a **70.** sorban az egyes évek esőmentes napjainak számát.
5. A **71.** sor adatcelláiba kerüljön az adott évszám, amennyiben a lehullott csapadékösszeg nem érte el a 450 mm-t, különben a cella maradjon üres. A **B72-es** cellába számítsuk ki a teljes 1985–2019-es időszak évi csapadékátlagát.

6. Az **A74**-es cellába kerüljön annak a mérőállomásnak a helye, ahol az évi legtöbb csapadékot mérték.
7. Az **A76**-os cellába kerüljön annak a mérőállomásnak a helységneve, ahol a leghidegebb hőmérsékletet mérték, a **B76**-os cellába pedig az évszám, amikor feljegyezték a mért értéket.
8. Készítsünk új diagramlapra halmozott oszlopdiagramot az évenkénti esős és esőmentes napok számáról a minta szerint. A diagramlap neve **Esős napok** legyen.
9. Készítsünk új diagramlapra grafikont *Budapest, Kecskemét és Kékestető* átlaghőmérsékletéről. Jelenítsük meg az egyes adatsorok lineáris trendjét is a minta szerint. A diagramlap neve **Átlaghőmérsékletek** legyen.
10. Készítsünk új diagramlapra grafikont a fagyos és hőségnapok alakulásáról. A fagyos napként való megjelölés feltétele, hogy a napi minimum-hőmérséklet $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, vagy az alatt legyen. Hőségnap alatt azokat a napokat értjük, amikor a napi maximum-hőmérséklet eléri vagy meghaladja a $30\text{ }^{\circ}\text{C}$ -ot. Jelenítsük meg az egyes adatsorok lineáris trendjét is a minta szerint. A diagramlap neve **Fagyos és hőségnapok** legyen.

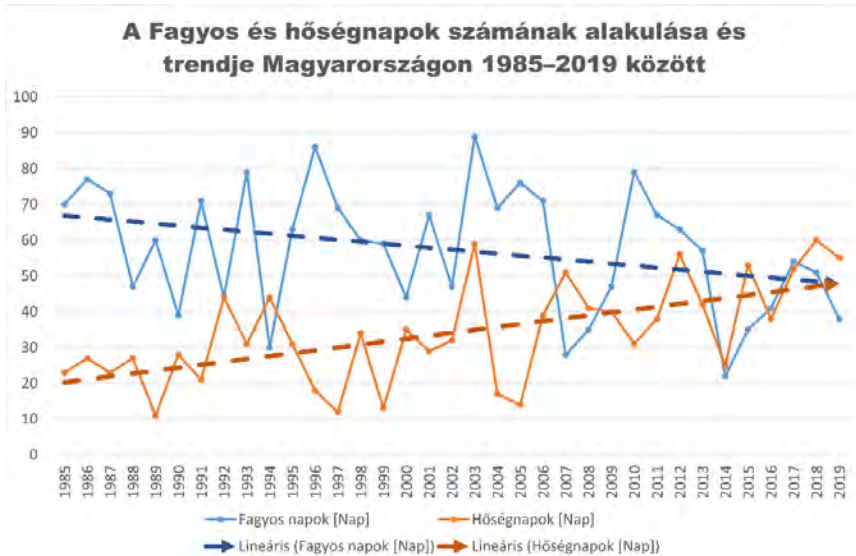
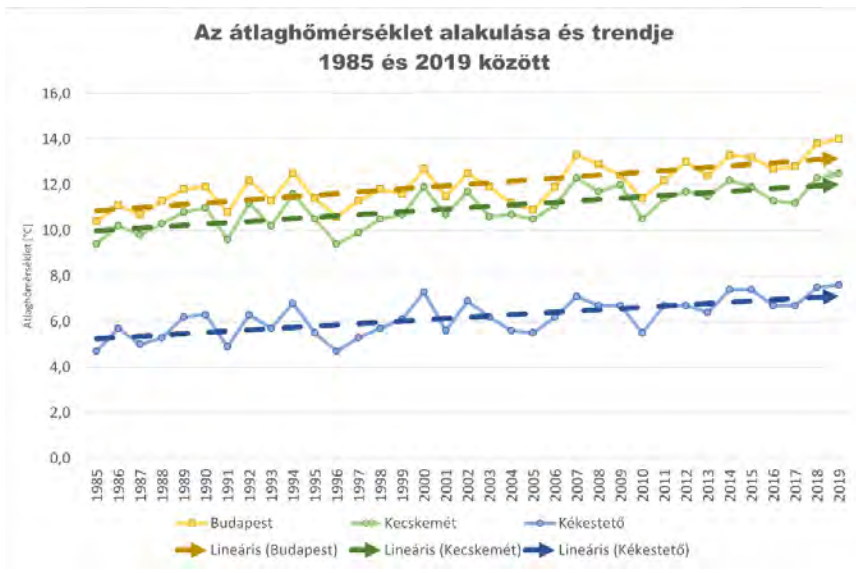


Segédszámításokat az **AL** oszloptól jobbra, illetve a **78.** sortól lefelé végezhetünk. A megoldásban saját függvény vagy makró nem használható.

Beküldendő egy tömörített *ib42.zip* állományban a táblázatkezelő munkafüzet, illetve egy rövid dokumentáció, amelyben szerepel a megoldáskor alkalmazott táblázatkezelő neve, verziószáma.

Az adatok forrásai:

https://www.ksh.hu/docs/hun/xstadat/xstadat_eves/i_met002ca.html



<https://www.ksh.hu/ffi/3-8.html>

Letölthető fájl: **metadatok.txt**

(10 pont)



Beküldési határidő: 2024. december 15.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>





Középiskolai tanulmányaink során többször találkozhatunk olyan problémákkal, amelyeket nem tudunk megoldani „papíron”, mivel a felírt egyenleteket túl nehéz megoldani, vagy nem is létezik megoldás zárt formában. Példa erre a matematikai inga mozgása, amelyet éppen ezért a középiskolában csak kis kitérések esetén tárgyalunk, ami jó közelítéssel harmonikus rezgőmozgásként írható le. Léteznek azonban olyan módszerek, amelyekkel számítógép segítségével kívánt pontossággal le tudjuk írni az ilyen rendszereket is. Két egyszerű példán keresztül fogjuk ebben a cikkben bemutatni ezeknek a numerikus módszereknek az alapjait, hogy segítsük a hasonló problémák megoldását¹.

1. probléma: Elejtett labda

Egy m tömegű, R sugarú gömböt *földi körülmények között* y_0 magasságból leejtünk. Mennyi idő alatt és mekkora sebességgel ér földet? *A légellenállást ne hanyagoljuk el!*

Fizikai háttér. A legtöbb középiskolai fizika feladatban figyelmen kívül hagyjuk a légellenállást, mert nehéz vele számolni. Nézzük meg, miért! Egy homogén közegben *nem túl kicsiny*² sebességgel haladó testre a test körül kialakuló örvényes áramlás miatt a relatív sebesség négyzetével arányos nagyságú, a relatív sebességgel ellentétes irányú fékezőerő hat:

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{2}cA\rho|\mathbf{v}_{\text{rel}}|\mathbf{v}_{\text{rel}},$$

ahol c a test alakjától függő állandó, A a test homlokfelülete, ρ a közeg sűrűsége, $\mathbf{v}_{\text{rel}}$ pedig a test közeghez viszonyított relatív sebessége. Ez a sebességtől (nem lineárisan) függő erő okozza a nehézségeket.

Esetünkben a gömb formatényezője $c = 0,47$, homlokfelülete $A = R^2\pi$, a levegő sűrűsége normál légköri nyomáson és 15°C -on $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$. A feladatbeli közeg nem mozog, így a relatív sebesség megegyezik a test sebességével. Ezeket felhasználva és bevezetve a $k = \frac{1}{2}cA\rho$ (a testre és a közegre jellemző) állandót a fenti kifejezés egyszerűbb alakba írható:

$$(1) \quad \mathbf{F} = -k|\mathbf{v}|\mathbf{v}.$$

A testre a közegellenállási erőn kívül csak a nehézségi erő hat. Mindkét erő függőleges, így a *skalár* mozgásegyenlet (a pozitív y irányt függőlegesen felfelé választva, és kihasználva, hogy esetünkben $v \leq 0$):

$$(2) \quad ma = -mg + kv^2.$$

¹A jövőben a pontversenyben is kitézésre kerülhetnek ilyen problémák, amelyek megoldásához szintén segítséget nyújthat a jelen cikk.

²Kis sebességeknél a sebességgel arányos viszkózus fékezés a meghatározó.

Felhasználva, hogy a gyorsulás a sebesség idő szerinti deriváltja, az egyenletet m -mel leosztva és bevezetve a $\kappa = \frac{k}{m}$ együtthatót, a következő *differenciálegyenletet* kapjuk:

$$\frac{dv}{dt} = -g + \kappa v^2.$$

Ezt – a kezdeti feltételeket figyelembe véve – megoldva megkapnánk a keresett $v(t)$ és $y(t)$ függvényeket, azonban ez nem része a középiskolás tananyagnak, így itt nem is tárgyaljuk.

Numerikus megoldás. A test kezdeti állapotát és a fizika törvényeit ismerve kell megjósolnunk a test állapotát egy tetszőleges későbbi t időpontban:

$$(y, v)_0 \xrightarrow{?} (y, v)_t.$$

Ezt a differenciálegyenlet megoldása nélkül nem tudjuk közvetlenül megválaszolni. Helyette próbáljuk megjósolni a test állapotát egy ismert állapot után *rövid idő elteltével*, azaz ha ismerjük a test $y(\tau)$ helyzetét és $v(\tau)$ sebességét valamely $t = \tau$ időpillanatban, akkor próbáljuk meghatározni a $t = \tau + \Delta t$ időpontban is:

$$(y, v)_\tau \xrightarrow{?} (y, v)_{\tau + \Delta t}.$$

Pontosan ezt se tudjuk megtenni, de jó közelítéssel igen: ha a Δt idő elegendően kicsiny, akkor (első rendben) tetszőleges mozgás egyenletes mozgással közelíthető:

$$\begin{aligned} y(\tau + \Delta t) - y(\tau) &\approx v(\tau)\Delta t, \\ v(\tau + \Delta t) - v(\tau) &\approx a(\tau)\Delta t. \end{aligned}$$

A (2)-es egyenlet alapján $a(\tau) = -g + \kappa(v(\tau))^2$, így rendezés után:

$$(3) \quad y(\tau + \Delta t) \approx y(\tau) + v(\tau)\Delta t,$$

$$(4) \quad v(\tau + \Delta t) \approx v(\tau) + \left(-g + \kappa(v(\tau))^2\right)\Delta t.$$

Mivel a kifejezések jobb oldalán mindent ismerünk, így meg tudjuk határozni a keresett $y(\tau + \Delta t)$ és $v(\tau + \Delta t)$ mennyiségeket. Ha az eredeti feladatot akarjuk megoldani, akkor a $t = 0$ kezdeti állapottól indulva addig ismételjük a fenti lépést, míg el nem jutunk a keresett állapothoz:

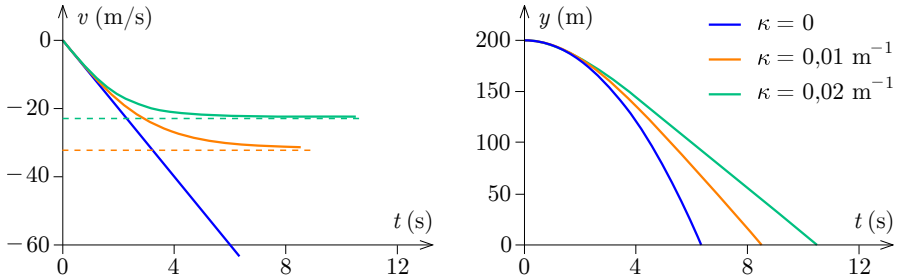
$$(y, v)_0 \rightarrow (y, v)_{\Delta t} \rightarrow (y, v)_{2\Delta t} \rightarrow \dots \rightarrow (y, v)_t.$$

A mellékelt *python* forráskódban³ látható, hogy a gyakorlatban hogyan valósítottuk ezt meg. Létrehoztunk változókat, amelyekben az aktuális időt, pozíciót és sebességet tároljuk. Ezt követően egy ciklusban Δt időközönként kiszámoljuk a test gyorsulását, majd ebből a (3) és (4) egyenletek alapján az új aktuális pozíciót és sebességet. A ciklust megszakítjuk, ha a test földet ért ($y = 0$), ekkor kiírjuk az aktuális időt és a sebességet a földet érés pillanatában.

Miután numerikusan leírtuk a folyamatot, szabadon választhatunk, hogy milyen összefüggéseket szeretnénk vizsgálni. Ebben az esetben érdemes például a $v(t)$ és az $y(t)$ függvényeket grafikonon ábrázolni, hogy jobban megértsük a folyamat

³https://www.komal.hu/cikkek/numerikus/vertical_drop.py

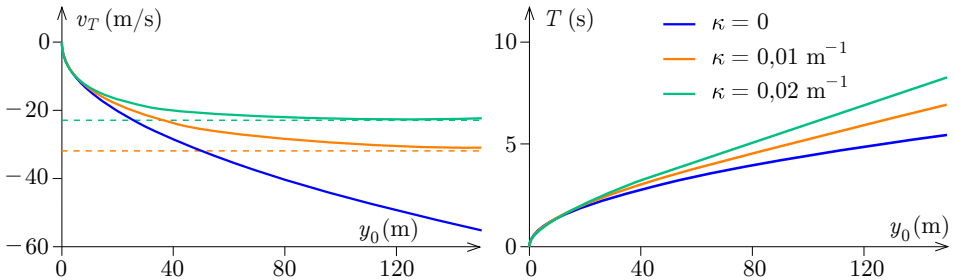
fizikai hátterét. Különböző programozási nyelvekben ezt különböző módon lehet megtenni, mi azért javasoljuk a pythont, mert ott a *matplotlib*⁴ csomaggal könnyedén tudunk adatsorokat ábrázolni. Ehhez annyit kell tenni, hogy a ciklus futása közben eltároljuk az ábrázolni kívánt adatokat listákba, és a szimuláció lefutása után ezekből elkészíthetjük a megfelelő grafikonokat. Az 1. ábrán $y_0 = 200$ m és több különböző κ érték esetében ábrázoltuk a függvényeket (beleértve a $\kappa = 0$ értéket is, amely hasznos viszonyítási alap).



1. ábra

A $v(t)$ grafikonon jól látható, hogy (a közegellenállás nélküli esetet kivéve) addig nő a test sebességének nagysága, amíg el nem ér (meg nem közelít) egy az ábrán szaggatott vonallal jelölt határsebességet. Ezen a sebességen ugyanis a légellenállás fékezőereje éppen kiegyenlíti a nehézségi erőt, és a test egyenletes sebességgel halad tovább. Ugyanezt a jelenséget figyelhetjük meg az $y(t)$ grafikonon is: egy bizonyos idő után a görbék meredeksége nem változik.

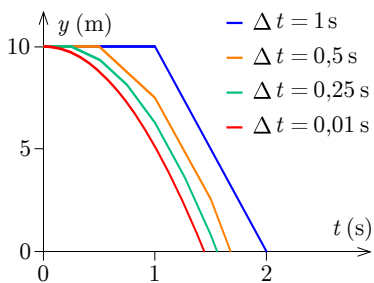
A feladatban feltett kérdés megválaszolásához érdemes a leérkezés idejét (T) és sebességét (v_T) ábrázolni az ejtési magasság (y_0) függvényében (2. ábra).



2. ábra

A szimuláció pontossága. Elsőrendű közelítést alkalmazunk, ennek pontossága függ Δt -től: annál pontosabb a közelítés, minél kisebb Δt -vel dolgozunk. Azonban minél kisebb ez az érték, annál több ideig fog futni a szimulációnk, hiszen egy adott t időt annál több egységre „darabolunk fel”. Minden hasonló probléma megoldásának fontos lépése tehát az optimális Δt megválasztása, amely elegendően pontos eredményt ad, de nem tart túl sokáig. A 3. ábrán bemutatjuk ugyanazon szimuláció eredményeit különböző Δt értékek mellett ($y_0 = 10$ m és $\kappa = 0,01$ m⁻¹).

⁴<https://www.geeksforgeeks.org/plot-mathematical-expressions-in-python-using-matplotlib>



3. ábra

Jól látható, hogy minél kisebb Δt -t választunk, annál simább lesz a görbe és annál pontosabb lesz a kiszámított T esési idő, hiszen annál jobban közelítjük az (ebben az esetben zárt alakban is meghatározható) elméleti megoldást. Viszont minél kisebb Δt , annál több iterációs lépést végez el a program (és így annál több ideig is fut, amelyet bonyolultabb problémák esetében már figyelembe kell venni), ahogy ezt a táblázat mutatja.

Δt (s)	T kiszámított értéke (s)	iterációk száma
1	2	2
0,5	1,7	4
0,25	1,57	7
0,125	1,51	13
0,01	1,456	146
0,001	1,452	1453
elmélet	1,452	—

2. probléma: Ferde hajítás közegben

Az előző feladatban tárgyalt testet most hajtsuk el v_0 kezdősebességgel, a vízszinteshez képest α szögben a talaj szintjéről. Hogyan függ a hajítás távolsága a v_0 , α és κ paraméterektől? Eredményünket ábrázoljuk grafikusán is! *A légellenállást ebben az esetben is vegyük figyelembe!*

Fizikai háttér. Az előző feladattal szemben itt két dimenzióban kell dolgoznunk. Ehhez vegyük fel az x és y tengelyeket a szokásos módon (x az eldobás helyétől mért vízszintes távolság, míg y a talaj feletti magasság). *Közegellenállás nélkül* a ferde hajítás egy vízszintes irányú egyenletes mozgás és egy függőleges irányú egyenletesen gyorsuló mozgás szuperpozíciójaként kezelhető. Ennek következtében külön-külön megoldhatók a mozgásegyenletek, nem befolyásolja az egyik komponens megváltozása a másik komponens megváltozását.

Ez azonban ebben a feladatban már nem lesz igaz! Ha figyelembe vesszük a közegellenállást is, akkor azt tapasztaljuk, hogy a közegellenállási erő mindkét komponense függ a sebesség mindkét komponensétől, vagyis az x és y irányú mozgásegyenletek nem függetlenek:

$$F_x = -|\mathbf{F}| \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}},$$

$$F_y = -|\mathbf{F}| \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}},$$

ahol felhasználtuk, hogy $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

Behelyettesítve (1)-ből $\mathbf{F}$ kifejezését és figyelembe véve a nehézségi gyorsulást felírhatjuk a két mozgásegyenletet az előző részben használt jelölésekkel:

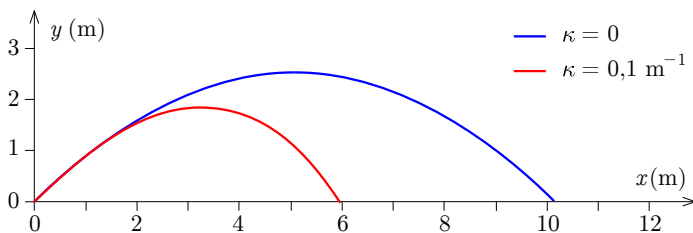
$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= -\kappa v_x \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \\ \frac{dv_y}{dt} &= -g - \kappa v_y \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.\end{aligned}$$

Ezt a differenciálegyenlet-rendszert nem tudjuk zárt alakban megoldani, így ismét numerikus módszereket hívunk segítségül.

Numerikus megoldás. Ugyanúgy járunk el, mint az első feladatnál, csak itt két dimenzióval van dolgunk, így a (3)-as és (4)-es egyenletek helyett most két-két egyenletre lesz szükségünk:

$$\begin{aligned}x(\tau + \Delta t) &\approx x(\tau) + v_x(\tau)\Delta t, \\ y(\tau + \Delta t) &\approx y(\tau) + v_y(\tau)\Delta t, \\ v_x(\tau + \Delta t) &\approx v_x(\tau) - \left(\kappa v_x(\tau) \sqrt{(v_x(\tau))^2 + (v_y(\tau))^2} \right) \Delta t, \\ v_y(\tau + \Delta t) &\approx v_y(\tau) - \left(g + \kappa v_y(\tau) \sqrt{(v_x(\tau))^2 + (v_y(\tau))^2} \right) \Delta t.\end{aligned}$$

Ezekből az egyenletekből python segítségével ugyanúgy megírhatjuk a numerikus megoldásunkat, csak most több változót (t , x , y , v_x és v_y) kell kezelnünk⁵. A légellenállás hatásának demonstrálására érdemes először egy hajítás pályáját kirajzolni ($v_0 = 10$ m/s, $\alpha = 45^\circ$, $\kappa = 0,1$ m⁻¹, 4. ábra piros görbe).

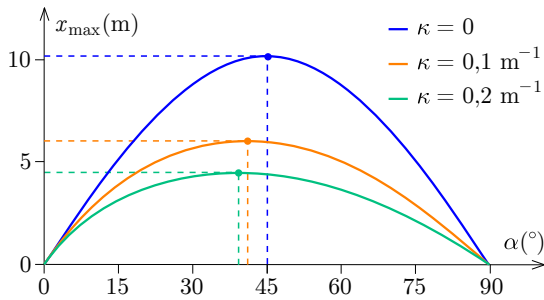


4. ábra

Látható, hogy a jól ismert, légellenállás nélkül számított szimmetrikus parabolapálya ($\kappa = 0$, kék görbe) deformálódott és aszimmetrikussá vált a közegellenállási erő hatására. Ebből már sejthetjük, hogy a maximális távolsághoz tartozó α_{opt} szög csökkenni fog.

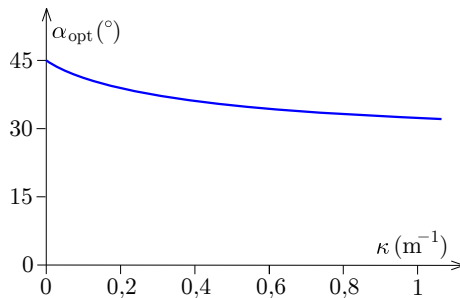
Ahhoz, hogy ezt a szöveget megtaláljuk, ugyanazon v_0 és κ paraméterekkel futtassuk le a szimulációt különböző kiindulási szögeknél, és mindig tároljuk el, hogy milyen messze repült a test. Ezután egyszerűen csak meg kell néznünk a legnagyobb távolságot és az ahhoz tartozó α_{opt} szöveget. A tartományt szűkítve addig finomíthatjuk az eredményt, ameddig szeretnénk. Az 5. ábrán a $v_0 = 10$ m/s sebességgel eldobott testek x_{max} hajítási távolsága látható az eldobás α szögének függvényében. Szaggatott vonallal bejelöltük a különböző κ értékeknél elérhető x_{max} maximális távolságot és az ezekhez tartozó α_{opt} optimális eldobási szöveget.

⁵https://www.komal.hu/cikkek/numerikus/projectile_motion.py



5. ábra

Ha sok, különböző κ -val rendelkező testet elindítunk ugyanazon sebességgel, akkor a fenti módszert használva elkészíthetjük az $\alpha_{\text{opt}}(\kappa)$ grafikont is. A 6. ábrán a $v_0 = 10 \text{ m/s}$ sebességgel eldobott testek ideális hajítási szöge látható a légellenállást jellemző κ paraméter függvényében.



6. ábra

Megjegyzés. Felmerül a kérdés, hogy a numerikus megoldás helyessége hogyan ellenőrizhető abban az esetben, ha a probléma nem oldható meg zárt alakban. Elsősorban a programozási hibák kiszűrése a cél. Az egyik lehetőség egy független, más módszerrel elvégzett numerikus megoldással való összevetés. A másik lehetőség olyan speciális esetek vizsgálata, amelyek nem csak numerikus megoldással kaphatóak meg. Néhány példa:

- A numerikus megoldás $\kappa = 0$ értékre egyezik a zárt alakban is meghatározható közegellenállás nélküli megoldással.
- Hosszú idő után a test sebessége függőlegessé válik és tart a $v_\infty = \sqrt{g/\kappa}$ értékhez.
- A labda mechanikai energiája időben monoton csökkenő függvény.

Fontos hangsúlyozni, hogy az ilyen tesztelés ugyan kimutathatja, ha hibás a megoldás, de nem bizonyítja annak helyességét.

Konklúzió, kitekintés. Cikkünkben bemutattuk, hogy egyszerű numerikus módszerekkel milyen átfogó képet lehet kapni bonyolult, akár megoldhatatlannak tűnő problémákról is. Fontos megjegyezni, hogy a fent leírt módszerekkel nemcsak mechanikai jelenségek írhatók le, hanem nagyon sokféle fizika probléma. Befejezésképp álljon itt egy *házi feladat*, amely a cikkben szerzett ismeretek segítségével megoldható.

Feladat. Nagyon nagy, felül nyitott edénybe, amely ϱ sűrűségű, η viszkozitású, homogén, összenyomhatatlan folyadékot tartalmaz, a felszíntől z_0 távolságban fúj-

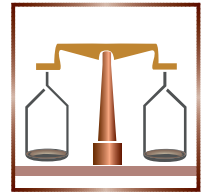
junk be egy apró, V_0 kezdeti térfogatú, nitrogént tartalmazó gázbuborékot. Mennyi idő alatt fogja elérni a buborék felső széle a folyadék felszínét?

Itt sokkal lassabb mozgás alakul ki, így most a viszkozitásból származó közegellenállási erőt számoljuk a Stokes-törvény⁶ alapján az $\mathbf{F}_v = -6\pi r\eta\mathbf{v}$ összefüggéssel, ahol r a buborék sugara, $\mathbf{v}$ a sebessége, η pedig a közeg viszkozitása. Tekintsük a buborékot végig gömb alakúnak, és a hőmérsékletet állandó T_0 értékűnek!

A megoldás akkor teljes értékű, ha különböző kezdeti paraméterekkel is működik a szimuláció, ezért nem adtunk meg numerikus értékeket.

A megoldást (bármilyen egyéb kérdéssel együtt) a csoka.peter.05@gmail.com e-mail címre lehet beküldeni.

Csóka Péter, Seprődi Barnabás



Mérési feladatok megoldása

M. 432. Készítsünk két, szájával összefordított PET palackból és búzadarából „homokórát”. A palackok közé helyezzünk különböző szűkítőket, amelyekkel a kör alakú nyílás d átmérőjét tudjuk változtatni. Mérjük meg a búzadara T lepergési idejét a d átmérő függvényében! Az elméleti várakozás szerint $T \sim d^\gamma$. Milyen γ kitevő adódik a mérésből?

(6 pont)

Közli: Széchenyi Gábor, Budapest

Megoldás. A méréshez a következő eszközöket használtam: két 1 literes PET-palack kupakkal, búzadara, fúrógép 1,5 mm–10 mm fúrószárakkal, konyhai mérleg, stopper, tolmérő, satu, ragasztószalag, tölcser, olló.

A mérés menete: Minden egyes d átmérőnél (a legkisebbel kezdve) rátekertem a kupakot az egyik palackra, és azt satuba fogva a kupak közepén lyukat fúrtam. A furat átmérőjét tolmérővel ellenőriztem. Ezután az üres palackot mérlegre helyeztem, és tárázás után tölcseren keresztül 400 g búzadarát öntöttem bele. A két palackot ragasztószalaggal egymáshoz rögzítettem. A „homokóra” megfordításától a lepergés abbamaradásáig mértem az időt. Ezt minden átmérőnél ötször megismétltem, és utána folytattam a következő átmérőjű lyuk elkészítésével.

1,5–4 mm-es furat esetén egyáltalán nem indult el a lepergés, mert a búzadara beszorult a furatba. A lepergési időket 4,5–10 mm-es furatok esetén, és a 25 mm átmérőjű kupak nélküli palacknyak esetében tudtam mérni. A mért adatokat, valamint az idők átlagát és szórását a táblázat első nyolc oszlopa tartalmazza.

Az elmélet szerint $T \sim d^\gamma$, azaz $T = kd^\gamma$, ahol k egy állandó. A kifejezés mindkét oldalának logaritmusát véve

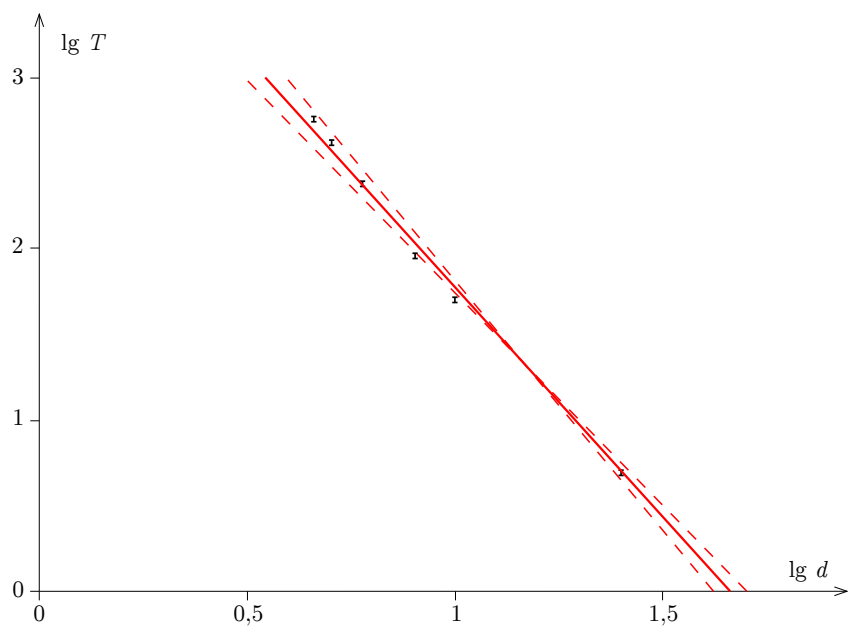
$$(1) \quad \lg T = \lg k + \gamma \lg d,$$

⁶A Stokes törvény akkor érvényes, ha a gömb alakú test körül lamináris áramlás alakul ki, és a $Re = \frac{\rho r v}{\eta}$ Reynolds-szám értéke 1-nél kisebb.

így a táblázat további oszlopaiban feltüntettem $\lg d$ és $\lg T$ értékeit, valamint az utóbbi hibáját is.

d (mm)	T_1 (s)	T_2 (s)	T_3 (s)	T_4 (s)	T_5 (s)	$\overline{T}$ (s)	$\sigma_{\overline{T}}$ (s)	$\lg d$	$\lg \overline{T}$	$\sigma_{\lg \overline{T}}$
4,5	586	578	570	601	596	586	12,7	0,653	2,768	0,009
5	436	427	426	433	419	428	6,61	0,699	2,632	0,007
6	256	241	242	228	241	242	9,91	0,778	2,383	0,008
8	89	93	93	93	95	92,6	2,19	0,903	1,967	0,011
10	49,7	49,3	49,8	50,4	50,9	50,0	0,63	1,000	1,699	0,006
25	5,09	4,92	4,91	4,90	4,98	4,96	0,08	1,398	0,695	0,007

(1)-nek megfelelően γ értékét grafikus egyenesillesztéssel határoztam meg. A táblázat alapján $\lg T$ -t $\lg d$ függvényében ábrázoltam, bejelölve $\lg T$ hibáját is. Az egyenesillesztést manuálisan végeztem el, a legjobban illeszkedő egyenesen kívül a hibákat figyelembe vevő leglaposabb és legmeredekebb egyeneseket is berajzolva.



A grafikonról az egyenesek meredeksége leolvasható. Ez alapján a kitevő mért értéke:

$$\gamma = -2,71 \pm 0,17.$$

Diszkusszió. Az várható volt, hogy d növelésével T csökkenni fog, azaz $\gamma < 0$. A keresztmetszet d^2 -tel arányos, ami alapján $\gamma = -2$ értéket várhatnánk, de ennél lényegesen erősebb csökkenést mértem ki. Ráadásul $d \leq 4$ mm esetében egyáltalán nem indult el a búzadara. Ez azzal magyarázható, hogy a daraszemcsék közötti

súrlódás miatt ilyenkor beszorulnak a szemek a lyukba. Feltételezhetően a -2 -nél kisebb mért γ érték is ezzel magyarázható.

A Gnädig Péter–Honyek Gyula: *123 Furfangos Fizika Feladat* 47. feladatában is egy homokóra lepergési idejét kell meghatározni dimenzióanalízis segítségével. A feladatban a lyukátmérőn kívül a homok teljes H magasságát és a g nehézségi gyorsulást is figyelembe veszik, és így az eredmény

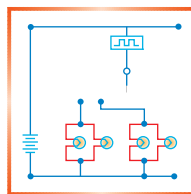
$$T \sim \sqrt{\frac{1}{d^5 g}} H^3$$

lesz, amely $\gamma = -2,5$ értéknek felel meg. A hibahatárt is figyelembe véve a mérési eredményeim ezt megközelítik. (Természetesen a kis átmérőknél történő beszorulást semelyik γ érték sem írja le.)

Hegedüs Márk (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 9. évf.)

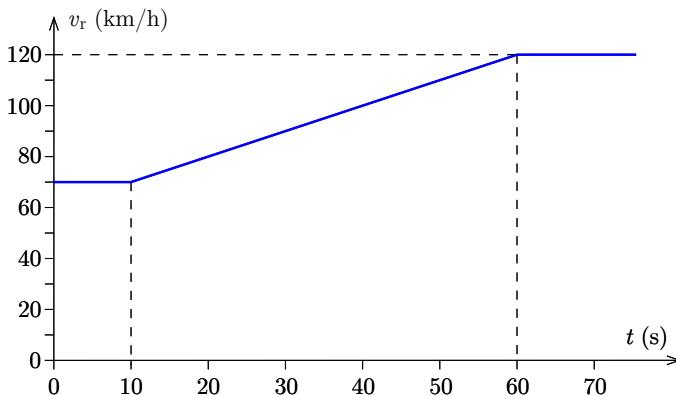
11 dolgozat érkezett. Helyes 5 megoldás. Kicsit hiányos (5 pont) 3, hiányos (3 pont) 3 dolgozat.

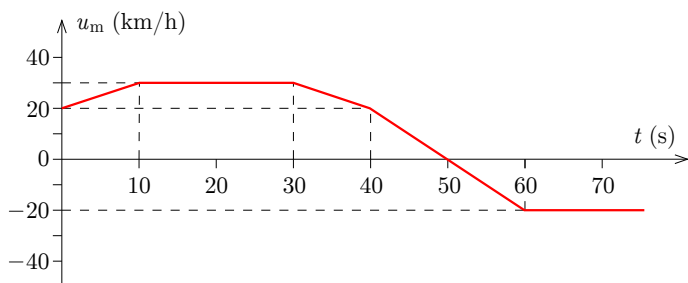
Fizika gyakorlatok megoldása



G. 853. Egy rendőrautó az autópályán halad. Sebességét a számítógépes rendszer rögzítette, ez alapján készült az alábbi $v_r(t)$ grafikon. Egy motoros egyszer csak megelőzi a rendőrautót, a rendőrautó méri a motoros sebességét. Az $u_m(t)$ grafikon azt mutatja, hogy mekkora a motoros sebessége a rendőrautóhoz viszonyítva.

- Rajzoljuk meg a motoros földhöz viszonyított sebességének $v_m(t)$ grafikonját!
- A grafikonokon ábrázolt időtartam alatt mikor volt a legtávolabb egymástól a két jármű? Mekkora ez a távolság?



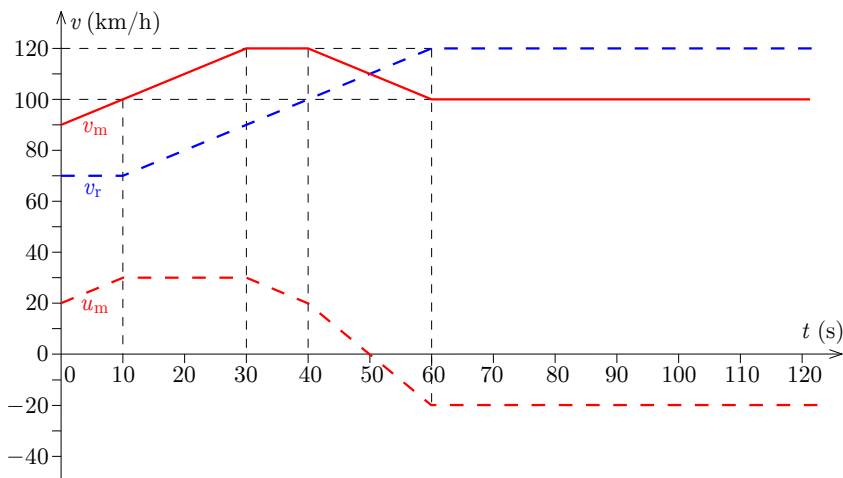


c) A 60. másodperc után állandó sebességgel haladnak tovább. Mikor előzi vissza a rendőrautó a motorost?

(4 pont)

Közli: Baranyai Klára, Veresegyház

Megoldás. a) A motoros sebességét megkapjuk, ha a két grafikont összeadjuk (1. ábra).



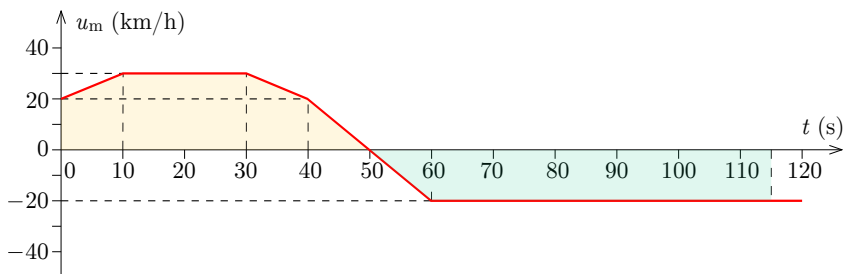
1. ábra

b) A $t = 0$ pillanatban a két jármű egymás mellett van, így a motoros rendőrautóhoz viszonyított sebességét ábrázoló grafikon alatti terület megadja a két jármű egymáshoz viszonyított távolságát (2. ábra). Amíg a relatív sebesség pozitív, addig a motorosnak nagyobb a sebessége, és távolodik a rendőrautótól. Tehát a $t = 50$ s időpontban lesz a két jármű közötti távolság a legnagyobb.

A két maximális távolság a görbe pozitív része alatti terület (a km/h-ban megadott sebességeket m/s-ra átváltva):

$$\Delta d_{\max} = \frac{1}{3,6} \cdot \left(10 \cdot \frac{20+30}{2} + 20 \cdot 30 + 10 \cdot \frac{30+20}{2} + 10 \cdot \frac{20}{2} \right) = 333 \text{ m} = \frac{1}{3} \text{ km}.$$

c) Ezután a távolságuk csökkenni fog, a rendőrautó a t_0 időpontban éri utol a motorost. A görbe negatív része „alatti” területnek meg kell egyeznie a b) részben



2. ábra

kiszámolt maximális távolsággal:

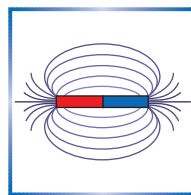
$$\frac{1}{3,6} \cdot \left(10 \cdot \frac{20}{2} + (t_0 - 60) \cdot 20 \right) = \Delta d_{\max}.$$

Ebből $t_0 = 115$ s, ekkor előzi vissza a rendőrautó a motorost.

Barth Albert Krisztián (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 9. évf.)

39 dolgozat érkezett. Helyes 16 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 7, hiányos (1–2 pont) 13, hibás 3 dolgozat.

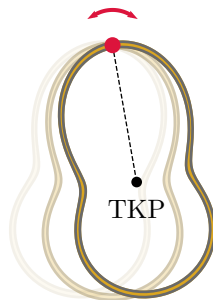
Fizika feladatok megoldása



P. 5549. Homogén tömegeloszlású, M tömegű, vékony huzalból zárt síkgörbét hajlítunk. Az így kapott keret tehetetlenségi nyomatéka a tömegközéppontján áthaladó, síkjára merőleges tengelyre vonatkozóan Θ_0 . A testtel ezután kísérletet végzünk az *ábrán* vázolt módon: különböző pontjai mentén felfüggesztjük, majd mérjük a kis amplitúdójú, saját síkjába eső lengéseinek periódusidejét. Mekkora a lehetséges legkisebb lengésidej?

(5 pont)

Dürer Verseny feladata nyomán



Megoldás. A fizikai inga periódusideje kis amplitúdójú lengések esetén

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{MgL}},$$

ahol L a forgástengely távolsága a tömegközépponttól, Θ pedig a forgástengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték. A Steiner-tétel alapján $\Theta = \Theta_0 + ML^2$,

ahol Θ_0 a tömegközéppontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték. Ezt behelyettesítve a lengésidő képletébe:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta_0 + ML^2}{MgL}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta_0}{MgL} + \frac{ML^2}{MgL}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta_0}{MgL} + \frac{L}{g}} \geq 2\pi\sqrt{2\sqrt{\frac{\Theta_0}{Mg^2}}}.$$

Az utolsó lépésben a számtani és mértani közepekre vonatkozó egyenlőtlenséget használtuk fel. Tehát a lehető legkisebb lengésidő:

$$T_{\min} = 2\pi\sqrt[4]{\frac{4\Theta_0}{Mg^2}}.$$

Ez akkor teljesül, amikor

$$\frac{\Theta_0}{MgL} = \frac{L}{g},$$

azaz

$$L_{\min} = \sqrt{\frac{\Theta_0}{M}}.$$

Az ingát a tömegközépponttól ilyen távolságban kell felfüggeszteni.

A következőkben megmutatjuk, hogy ez mindig lehetséges. Osszuk fel a huzalt n darab, egyenként $\frac{M}{n}$ tömegű, a huzal mentén egyenlően elosztott tömegpontra. Jelölje az i -edik tömegpont távolságát a tömegközépponttól r_i , a tömegközéppont-hoz legközelebbi pont távolságát $r_{\min}$, a legtávolabbiét $r_{\max}$. Ekkor a tehetetlenségi nyomaték definíciója alapján

$$\Theta_0 = \sum_{i=1}^n r_i^2 \frac{M}{n} = \frac{M}{n} \sum_{i=1}^n r_i^2.$$

Ezt felhasználva

$$L_{\min} = \sqrt{\frac{\Theta_0}{M}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i^2} \geq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_{\min}^2} = r_{\min},$$

mivel minden i -re $r_i \geq r_{\min}$. Ugyanezt a gondolatmenetet elvégezve $r_{\max}$ -ra is, megkapjuk, hogy $r_{\min} \leq L_{\min} \leq r_{\max}$, tehát a huzal folytonossága miatt mindig található megfelelő távolságra lévő felfüggesztési pont a huzalon.

Pázmándi József Áron (Dunakeszi Radnóti M. Gimn., 8. évf.)

32 dolgozat érkezett. Helyes Czirják Márton Pál, Gyenes Károly és Pázmándi József Áron megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 21, hiányos (2–3 pont) 3, hibás 5 dolgozat.

P. 5556. Egy távoli kettőscsillag egyik bolygóján értelmes lények élnek. A csillagászai megállapították, hogy a két csillag távolsága időben állandó, ezt a távolságot választották „csillagászati egységnek” (CsE). Az űrkutatók egy érzékeny űrtávcsövet juttattak el a kettős rendszer L_2 Lagrange-pontjába, amely a kisebb tömegű csillagtól $\frac{1}{2}$ CsE távolságra, a másik csillaggal ellentétes oldalon helyezkedik el. Mekkora a két csillag tömegének aránya?

(5 pont)

Közli: Gnädig Péter, Vácduka

Megoldás. Legyen a két csillag tömege m_1 és m_2 , ahol $m_2 > m_1$. A két csillag közötti gravitációs erő:

$$F_g = \gamma \frac{m_1 m_2}{(r_1 + r_2)^2},$$

ahol r_1 és r_2 a két csillag távolsága a tömegközépponttól. Mindkét csillagot a köztük fellépő gravitációs erő tartja körpályán:

$$F_g = m_1 r_1 \omega^2,$$

$$F_g = m_2 r_2 \omega^2.$$

Behelyettesítve F_g kifejezését, és egyszerűsítve m_1 -gyel, illetve m_2 -vel:

$$\gamma \frac{m_2}{(r_1 + r_2)^2} = r_1 \omega^2,$$

$$\gamma \frac{m_1}{(r_1 + r_2)^2} = r_2 \omega^2.$$

A két egyenletet összeadva és rendezve megkapjuk a körmozgás szögsebességének négyzetét:

$$\omega^2 = \gamma \frac{m_1 + m_2}{(r_1 + r_2)^3}.$$

A kettős rendszer L_2 Lagrange-pontjában az oda helyezett m_0 tömegű testet a két csillag együttes gravitációs ereje tartja ugyanekkora ω szögsebességű körpályán, így a mozgásegyenlete:

$$\gamma \frac{m_0 m_1}{R^2} + \gamma \frac{m_0 m_2}{(R + r_1 + r_2)^2} = m_0 (r_1 + R) \omega^2 = m_0 (r_1 + R) \gamma \frac{m_1 + m_2}{(r_1 + r_2)^3},$$

ahol R az L_2 pont m_1 -től való távolsága. Rendezve:

$$\frac{m_1}{R^2} + \frac{m_2}{(R + r_1 + r_2)^2} = (r_1 + R) \frac{m_1 + m_2}{(r_1 + r_2)^3},$$

majd felhasználva, hogy a feladatban szereplő adatok, illetve a tömegközéppont definíciója alapján:

$$r_1 + r_2 = 1 \text{ CSE}, \quad R = \frac{1}{2} \text{ CSE} = \frac{r_1 + r_2}{2} \quad \text{és} \quad r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (r_1 + r_2),$$

$$\frac{m_1}{(0,5(r_1 + r_2))^2} + \frac{m_2}{(1,5(r_1 + r_2))^2} = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} + 0,5 \right) (r_1 + r_2) \frac{m_1 + m_2}{(r_1 + r_2)^3},$$

$$\frac{m_1}{0,5^2} + \frac{m_2}{1,5^2} = m_2 + 0,5(m_1 + m_2),$$

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{63}{19}.$$

Tehát a két csillag tömegének aránya $\frac{63}{19} \approx 3,32$.

Csernyik Péter (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 12. évf.)

53 dolgozat érkezett. Helyes 30 megoldás. Kicsit hiányos (3–4 pont) 3, hiányos (1–2 pont) 7, hibás 13 dolgozat.

P. 5557. Egy R sugarú, vékony falú, rögzített cső belsejében, annak legmélyebb pontjának közelében csúszásmentesen ide-oda gurul egy m tömegű, r sugarú, homogén tömegeloszlású henger. Mekkora a mozgás periódusideje?

(5 pont)

Közli: Gelencsér Jenő, Kaposvár

Megoldás. Térítsük ki a hengert valamilyen kis Φ szöggel, és vizsgáljuk meg a rá ható erőket, forgatónyomatékokat. A csőhöz képest radiális irányban a falból származó nyomóerő kiegyenlíti a többi erőt, így ezzel a komponenssel nem kell foglalkoznunk. Tangenciális irányban lefele hat a nehézségi erő $mg \sin \Phi$ komponense, ezzel ellentétesen pedig a súrlódási erő. Erre az irányra a mozgásegyenletet felírva:

$$(1) \quad S - mg \sin \Phi = ma,$$

ahol a -val a henger tömegközéppontjának érintő irányú gyorsulását jelöltük. A tömör henger forgástengelyére nézve csak a súrlódási erőnek lesz forgatónyomatéka, így a forgásegyenlet:

$$(2) \quad Sr = \Theta \beta,$$

ahol $\Theta = \frac{1}{2}mr^2$ a tömör henger tehetetlenségi nyomatéka, β pedig a szimmetriatengelye körüli szöggyorsulása. Mivel a henger nem csúszik meg, így az alsó pont gyorsulása zérus, amiből:

$$(3) \quad a = r\beta.$$

A (2)-es egyenletből S -t kifejezve és (1)-be behelyettesítve:

$$\frac{\Theta \beta}{r} - mg \sin \Phi = ma,$$

amelyből (3)-at és Θ kifejezését felhasználva az alábbi kifejezés adódik:

$$(4) \quad a = -\frac{2}{3}g \sin \Phi.$$

Ha a cső szimmetriatengelye körüli mozgást tekintjük, akkor a kis test tömegközéppontjának szöggyorsulása:

$$B = \frac{a}{R - r},$$

amelybe (4)-ből a értékét behelyettesítve:

$$B = -\frac{2g}{3(R - r)} \sin \Phi.$$

B éppen a cső szimmetriatengelye körüli Φ szögelfordulás második deriváltja, továbbá kicsiny kitérésre $\sin \Phi \approx \Phi$. Ezeket felhasználva:

$$\ddot{\Phi} = -\frac{2g}{3(R - r)} \Phi.$$

Ez egy harmonikus rezgőmozgást leíró differenciálegyenlet, amelyből a mozgás körfrekvenciája:

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}},$$

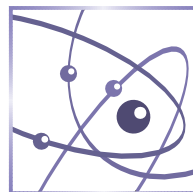
a kért periódusidő pedig:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}}.$$

Csóka Péter (Pécsi Janus Pannonius Gimn., 12. évf.)

39 dolgozat érkezett. Helyes 9 megoldás. Kicsit hiányos (3–4 pont) 11, hiányos (1–2 pont) 18, nem értékelt 1 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok



M. 435. Rakjunk nehezéket egy háztartási gyertya aljára, hogy az vízbe helyezve függőleges helyzetben ússzon. Gyűjtsuk meg a gyertyát, majd mérjük meg, hogyan változik a gyertya vízbe merülő hossza a pillanatnyi teljes hosszának függvényében. A mérési adatok segítségével határozzuk meg a gyertya anyagának sűrűségét!

(6 pont)

Közli: Zsigri Ferenc, Budapest

G. 865. Egy tartálykocsi Hódmezővásárhelyről a 200 km távolságban lévő Debrecenbe szállított heti rendszerességgel tejet. Egyik alkalommal a sofőr félúton észrevette, hogy a tartályon képződött kicsiny lyukon keresztül a tej folyamatosan csöpög az úttestre. Amikor 2 órája úton volt már, 1,2 liter tej hiányzott a tartályból. Ekkor nagyobb sebességre kapcsolt, hogy minél előbb célba juttassa a szállítmányt. Debrecenbe érkezve összesen 2 literrel kevesebb tejet tudott átadni, mint amennyivel eredetileg elindult.

a) Mekkora átlagsebességgel tette meg a 200 km-es távolságot a tartálykocsi?

b) Hány méterenként hagyott nyomot az útburkolaton a kicsöpögött tej az út első, illetve második felén, ha egy-egy csepp térfogata 0,2 ml?

A cseppek szabályos időközönként váltak le a tartályon lévő lyuk pereméről.

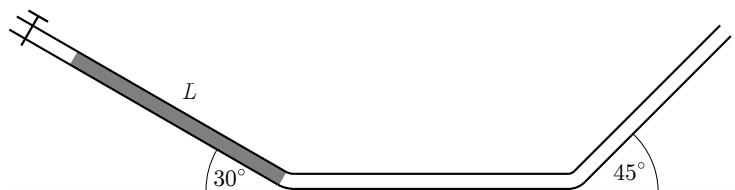
(4 pont)

Tornyai Sándor Fizikaverseny, Hódmezővásárhely

G. 866. Egy kétszeresen meghajlított vékony cső három, elegendően hosszú részből áll. A középső rész vízszintes, az első rész 30°-os szöget, a harmadik rész pedig 45°-os szöget zár be a vízszintessel. A szakaszok ugyanabban a függőleges síkban fekszenek, az egyes szakaszokat rövid, törésmentes hajlatok kötik össze.

A cső bal oldali végén egy csap annyi levegőt zár el a külvilágtól, hogy a bal oldali csőszakasz alján L hosszúságú higanyszál legyen nyugalmi állapotban. A csapot hirtelen kinyitjuk, emiatt a higanyszál súrlódásmentesnek tekinthető mozgásba kezd. Induláskor a higanyszál eleje a cső első és második szakaszának találkozásánál van.

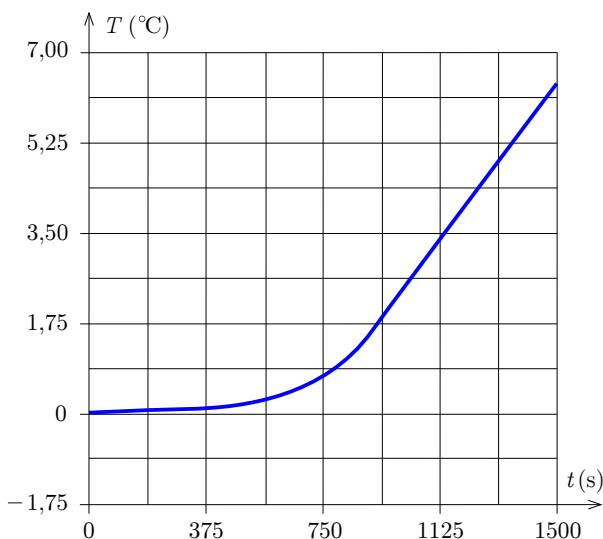
A higanyszálnak maximálisan mekkora része kerül be a cső harmadik szakaszába?



(4 pont)

Közli: Baranyai Klára, Verezegyház

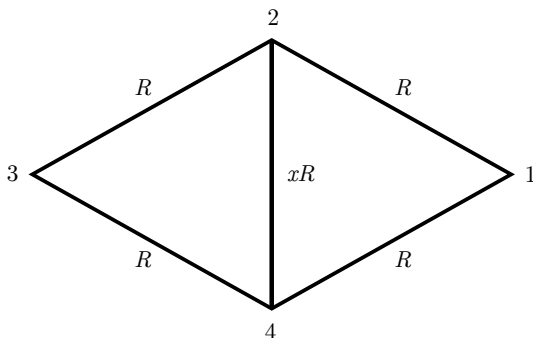
G. 867. Egy kaloriméterben jég és víz keveréke van. A kalorimétert állandó fűtőteljesítménnyel melegítjük, és mérjük a tartalmának hőmérsékletét, amelyet az idő függvényében ábrázoltunk.



A mérés végén 850 ml víz volt a kaloriméterben. Állapítsuk meg, hogy mekkora a fűtőteljesítmény, valamint azt, hogy mennyi jég volt kezdetben a kaloriméterben!

(4 pont)

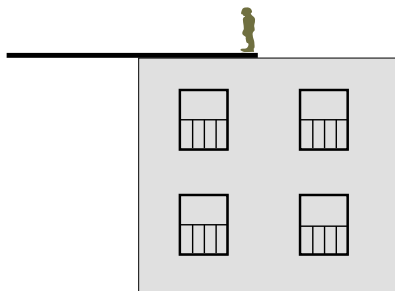
G. 868. Az ábrán látható rombusz oldalélei R ellenállásúak, az egyik átlós élnek ellenállása pedig xR , ahol $x \geq 0$ egy változtatható paraméter. Két tetszőleges csúcspontra U feszültséget kapcsolunk. Számítsuk ki minden lehetséges esetben az öt ellenálláson fejlődő teljes hőteljesítményt az x paraméter függvényében!



(4 pont)

Közli: Cserti József, Budapest

P. 5598. Tom McPoint, a híres akrobata a hírek szerint 2024 telén Hódmezővásárhelyen is bemutatja legendás mutatványát, amelyben egy toronyház tetejére rögzítés nélkül ráfektetett, az utca fölé kinyúló deszkapalló végére kisétálva integet a nézőközönségnek. A produkciót megelőző napon az akrobata segédei vízzel fellecsolják a kiválasztott ház vízszintes tetejét, hogy tükörsima jégpáncél alakuljon ki rajta, majd a mutatvány kezdőpillanatában a jégre fektetett, 6 méter hosszú pallót olyan hosszan tolják ki a tető szélén túl, hogy még éppen ne billenjen le, ha Tom a tetőn maradt végére rááll (ábra).



a) Legfeljebb milyen hosszú lehet a mutatvány kezdetén a deszkapalló utca fölé kinyúló része, ha Tom 60 kg, a palló pedig 40 kg tömegű?

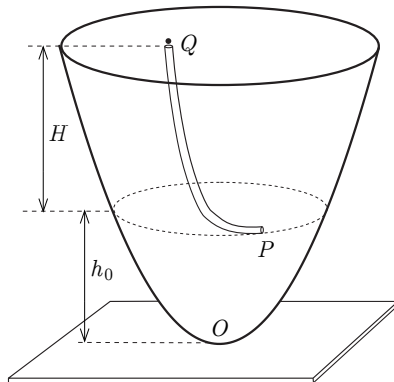
b) Milyen messze lesz Tom a mutatvány végén a háztető szélétől, ha állandó nagyságú sebességgel 20 s alatt végigsétál a deszkán?

A palló és a jég között fellépő súrlódás elhanyagolható, a mutatvány során Tom talpa nem csúszik meg a deszka felületén.

(4 pont)

Tornyai Sándor fizikaverseny, Hódmezővásárhely

P. 5599. Egy forgási paraboloid alakú, függőleges szimmetriatengelyű, vékony fémserleget az O csúcsánál vízszintes tartólaphoz erősítettünk. A P pont és a síklap távolsága h_0 . A serleg belsejében elhelyezett vékony csőbe, annak Q végpontjánál egy pontszerű testet ejtettünk, amely a serleg P pontjánál hagyja el a csövet. A Q és a P pont magasságkülönbsége H .

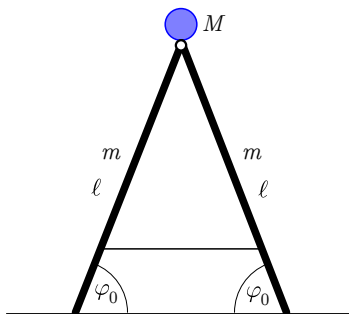


A kis test a serleg érintősíkjában fekvő, vízszintes egyenes irányában repül ki a csőből. Milyen határok között fog változni a kis testnek a lemeztől mért h távolsága a további mozgás során? (A súrlódás mindenhol elhanyagolható.)

(5 pont)

Közli: Gnädig Péter, Vácduka

P. 5600. A vízszintes, súrlódásmentes talajon álló létra két egyforma szára kezdetben φ_0 szöget zár be a talajjal, és a köztük lévő lánc akadályozza meg a szétcsúszásukat. A létra tetején egy M tömegű ember ül. A lánc elszakad, a létra szétnyílik. Mekkora sebességgel és gyorsulással ér talajt az ember? Hogyan aránylik ez a két mennyiség ahhoz, amikor az ember ugyanekkora magasságból szabadon esik le? Vizsgáljuk az $M \rightarrow 0$, illetve az $M \rightarrow \infty$ határeseteket. Tekintsük a létra szárait egy-egy m tömegű, ℓ hosszúságú homogén rúdnak, az embert pedig pontszerűnek. A létra két szarát felül egy súrlódásmentes csukló tartja össze.



(5 pont)

Közli: Cserti József, Budapest

P. 5601. Egy vízszintes membrán függőleges irányban, harmonikusan, 500 Hz frekvenciával rezeg. A membránra finom homokot szórunk, és azt látjuk, hogy a homokszemcsék a levegőbe emelkednek, a membrán egyensúlyi helyzete felett 3 mm magasságig. Mekkora a membrán rezgésének amplitúdója?

A homokszemcsék ütközését a membránon tekintsük teljesen rugalmatlannak.

(5 pont)

Quantum Magazine nyomán

P. 5602. Vízszintes hengerben egy dugattyú héliumgázt zár el. A gázt 10 W teljesítményű fűtőszállal melegítik. A gáz a dugattyút egyenletesen tolja kifelé. A henger keresztmetszete 10 cm^2 . A külső légnyomás 100 kPa. Mekkora sebességgel mozog a dugattyú?

(4 pont)

Közli: Holics László, Budapest

P. 5603. Egy homokos tengerparton heverő, kis méretű tengeri csillagot négykézláb állva, pontosan felülről, 50 cm magasságból nézünk. A dagály miatt lassan emelkedni kezd a vízszint, és 40 cm magasságú víz lepi el az állatot.

a) Hányszor nagyobbak (azaz hányszor nagyobb szög alatt) látjuk a tengeri csillagot, mint kezdetben, ha testhelyzetünket nem változtatjuk meg?

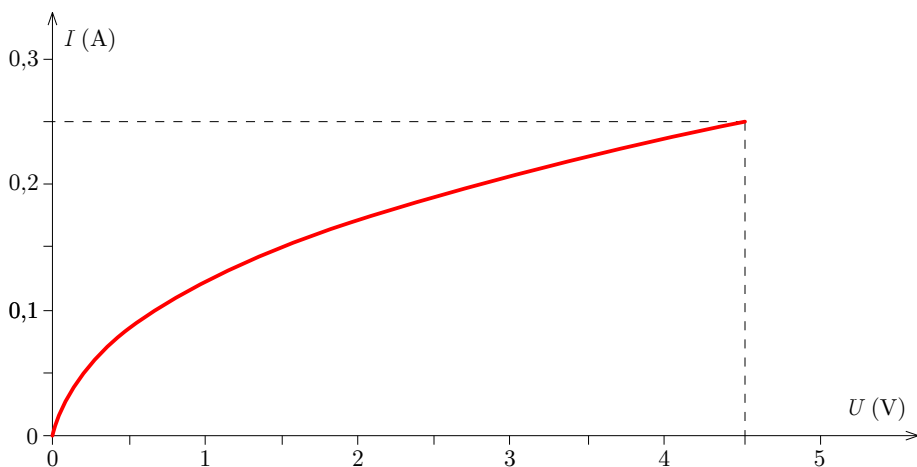
b) Hányszor nagyobbak látjuk a tengeri csillagot, ha egy 0,5 dioptriás szemüveget is felvesszünk a dagály beálltával? Hol keletkezik ilyenkor a lencse által alkotott kép?

A szemüveg és a szemünk közti távolságot hanyagoljuk el!

(4 pont)

Példatári feladat nyomán

P. 5604. Egy laposelem üresjárási feszültsége $U_0 = 4,5 \text{ V}$, belső ellenállása $R_b = 1,5 \Omega$. Van két egyforma izzólámpánk, amelyek $I(U)$ karakterisztikája az ábrán látható.



a) Hogyan függ a telep kapcsolófeszültsége a terhelő áramtól? Ábrázoljuk a telep $I(U)$ karakterisztikáját!

b) Egy izzót rákapcsolunk a telepre. Határozzuk meg az izzóra eső feszültséget és az izzón átfolyó áramot (az ún. munkapontot) az $I(U)$ grafikon segítségével!

c) A két izzót

i) párhuzamosan,

ii) sorba

kapcsoljuk, és így kötjük rá a telepre. Készítsük el a párhuzamosan, illetve a sorba kapcsolt izzók (együttes) $I(U)$ karakterisztikáját, majd határozzuk meg mindkét esetben az új munkapontot. Ezután határozzuk meg mindkét esetben az egy izzóra eső feszültséget és az izzón átfolyó áramot!

(5 pont)

Közli: Vankó Péter, Budapest

P. 5605. Egy mozgó argonatom nyugvó neonatommal rugalmasan ütközik. Legfeljebb mekkora szöggel térülhet el az argonatom?

(5 pont)

Példatári feladat nyomán

P. 5606. Egy m_0 össztömegű űrhajó a bolygóközi térben, külső erők jelenléte nélkül halad v sebességgel. A mozgásirány megváltoztatása céljából egyszer csak bekapcsolja hajtóművét, amelyből állandó u nagyságú (relatív) sebességgel áramlik ki a hajtóanyag, mindvégig az űrhajó pillanatnyi sebességére merőleges irányban. Mekkora csökken az űrhajó tömege, amíg sebességvektora az eredeti irányhoz képest 90° -kal fordul el?

(6 pont)

Példatári feladat nyomán



Beküldési határidő: 2024. december 15.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



Felhívás a Fagy pont Fizikatórba

A tavalyi sikeres első alkalom után ebben a tanévben

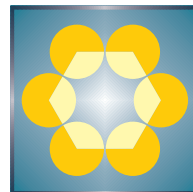
2025. január 3. és 5. között

másodszor is megrendezésre kerül a Fagy pont Fizikatór.

A hétvége fő célja, hogy segítsen a fizikaversenyekre, elsősorban a Nemzetközi Fizikai Diákolimpiára felkészülni, és összehozza a fizika iránt érdeklődőket. Lesznek előadások ritkán tárgyalt témakörökről, amelyeket volt olimpiások és felkészítő tanárok tartanak. Mutatunk különböző érdekes megoldási módszereket, és persze lesz sok-sok izgalmas feladat. A fizika mellett beszélgetésre, társasozásra, zenélésre és sportolásra is lesz lehetőség. A tábor Budapesten lesz, a részvétel A Gondolkodás Öröme Alapítvány jóvoltából ingyenes. További információ és jelentkezés: <https://sites.google.com/view/fagy pont fizika>

A szervezők

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS (Volume 74. No. 8. November 2024)



Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 493): **K. 829.** Find the two smallest consecutive positive integers, adding the digits of which we get exactly 2024. **K. 830.** In swimming competitions, there are mixed-gender 4x100 m medley relay races. This means that the team consists of two men and two women, and in each stroke 100 meters has to be completed. It's up to the team to decide which stroke the male and female members will compete in. The best times achieved by the swimmers for the 100-meter segments is the following. In backstroke Botond 52.30; Csaba 52.52; András 52.59; Xénia 57.33; Zóra 57.72; Vera 57.98. In breaststroke Ferenc 59.03; Géza 59.11; Hugó 59.30; Sára 65.28; Tímea 65.54; Róza 65.59. In butterfly András 49.90; Botond 49.99; Dénes 50.21; Yvette 55.58; Ursula 55.63; Vera 56.21. In freestyle stroke András 47.40; Csaba 48.48; Elemér 48.50; Xénia 52.36; Yvette 52.49; Piroska 52.73. Supposing that the swimmers can achieve the same results in a competition, find the composition of the team that provides the best possible result. **K. 831.** We have arranged four congruent rectangles according to the figure obtaining a large outer and a small inner square. (See figure on page 493.) The ratio of the areas of the large square and a single rectangle is $25 : 6$, and the area of the inner small square is 144 cm^2 . Find the lengths of the sides of the rectangles. **K/C. 832.** Nine English lords are planning to establish clubs. They want each club to have exactly three members from among them, but no two clubs should have more than one member in common. What is the maximum number of clubs they can establish? **K/C. 833.** A rectangle-shaped piece of paper is given with dimensions $20 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$, according to the figure. (See page 494.) Folding vertex A over vertex C , the line across we folded intersects sides AB and CD in points P and Q . Prove that quadrilateral $APCQ$ is a rhombus, and compute its area.

New exercises for practice – competition C (see page 494): **Exercises up to grade 10:** **K/C. 832.** See the text at Exercises **K.** **K/C. 833.** See the text at Exercises **K.** **Exercises for everyone:** **C. 1828.** Anna added the positive integers from 1 to 500, however, she accidentally skipped a three digit number. How many numbers could have she skipped, if she obtained a sum that is divisible by 3, and also ends in a digit 3? (Proposed by *Katalin Abigél Kozma*, Győr) **C. 1829.** Points E and F are chosen on sides AB and BC of unit square $ABCD$, respectively, such that $\angle EDF = 45^\circ$. Find the exact value of the perimeter of triangle EBF . (Proposed by *Bálint Bíró*, Eger) **C. 1830.** The elements of set $A = \{x; y; z; u; v\}$ are natural numbers satisfying $x + 2y = 3v$ and $z + u = 2v$. Prove that the elements of A cannot be consecutive natural numbers. (*Matlap*, Kolozsvár) **Exercises upwards of grade 11:** **C. 1831.** Solve the following system of equations on the set of real numbers: $2x^3 - 3x^2y + 2xy^2 - y^3 + 1 = 0$, $x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 + 3 = 0$. (Proposed by *Bálint Bíró*, Eger) **C. 1832.** The area of triangle ABC is $15\sqrt{7}$, and the lengths of its sides are integers. Find all possible lengths of the three sides. (Proposed by *Gergely Szmerka*, Budapest)

New exercises – competition B (see page 495): **B. 5414.** Let $ABCD$ be a rectangle. Points P and Q are chosen such that the circumcenter of triangle ABP is Q and the circumcenter of triangle BCQ is P . Find the magnitude of angle PDQ . (3 points) (Proposed by *Bálint Hujter*, Budapest) **B. 5415.** Each of the three kids, Beni, Lili and Domi completes three laps on the athletics track. The referee keeps track of the names of each kid completing a lap, and thus gets a list of nine names. Find the number of different lists the referee can get supposing that no two kids complete a lap at the same time and the speed

of each kid remains constant for all three laps. (4 points) (Proposed by Péter Pál Pach, Budapest) **B. 5416.** Real numbers x , y and z satisfy $x + y + z = 8$ and $xy + yz + zx = 5$. Find the biggest possible value of z . (3 points) (Proposed by Attila Sztranyák, Budapest) **B. 5417.** Which number is bigger, $(2^{1000})!$ or $2^{1000!}$? (4 points) (Proposed by Máté Szalai, Szeged) **B. 5418.** Let a , b and c denote the side lengths of acute triangle ABC , and let R denote its circumradius. Prove that $\frac{1}{-a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{a^2-b^2+c^2} + \frac{1}{a^2+b^2-c^2} \geq \frac{1}{R^2}$, and find those triangles where equality holds. (5 points) (Proposed by Géza Kiss, Csömör) **B. 5419.** Let $q(n)$ denote the greatest odd divisor of positive integer n . Let $P(n) = q(1) + q(2) + \dots + q(n)$ and $S(n) = 1 + 2 + \dots + n$. Prove that the ratio $P(n)/Q(n)$ is smaller than $2/3$ for infinitely many values of n , and also greater than $2/3$ for infinitely many values of n . (5 points) (Proposed by Attila Sztranyák, Budapest) **B. 5420.** Ádám, the famous conman signed up for the following game of luck. There is a rotating table with a shape of a regular 13-gon, and at each vertex there is a black or a white cap. (Caps of the same colour are indistinguishable from each other.) Under one of the caps 1000 dollars are hidden, and there is nothing under the other caps. The host rotates the table, and then Ádám chooses a cap, and take what is underneath. Ádám's accomplice, Béla is working at the company behind this game. Béla is responsible for the placement of the 1000 dollars under the caps, however, the colors of the caps are chosen by a different colleague. After placing the money Béla a) has to change the color of one of the caps, b) is allowed to change the color of one of the caps, but he is not allowed to touch any other cap. Can Ádám and Béla find a strategy in part a) and in part b), respectively, so that Ádám can surely find the money? (After entering the casino, Béla cannot communicate with Ádám, and he also cannot influence his colleague choosing the colors of the caps on the table.) (6 points) (Proposed by Gábor Damásdi, Budapest) **B. 5421.** The incenter and the inradius of the acute triangle ABC is I and r , respectively. The excenter and exradius relative to vertex A is I_a and r_a , respectively. Let R denote the circumradius. Prove that if $II_a = r_a + R - r$, then $\angle BAC = 60^\circ$. (6 points) (Proposed by Class 2024C of Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., Budapest)

New problems – competition A (see page 497): **A. 890.** Bart, Lisa and Maggie play the following game: Bart colors finitely many points red or blue on a circle such that no four colored points can be chosen on the circle such that their colors are blue-red-blue-red (the four points do not have to be consecutive). Lisa chooses finitely many of the colored points. Now Bart gives the circle (possibly rotated) to Maggie with Lisa's chosen points, however, without their colors. Finally, Maggie colors all the points of the circle to red or blue. Lisa and Maggie wins the game, if Maggie correctly guessed the colors of Bart's points. A strategy of Lisa and Maggie is called a winning strategy, if they can win the game for all possible colorings by Bart. Prove that Lisa and Maggie have a winning strategy, where Lisa chooses at most c points in all possible cases, and find the smallest possible value of c . (Proposed by Dömötör Pálvölgyi, Budapest) **A. 891.** Let ABC be an acute triangle. Points B' and C' are located on the interior of sides AB and AC , respectively. Let M denote the second intersection of the circumcircles of triangles ABC and $AB'C'$, while let N denote the second intersection of the circumcircles of triangles ABC' and $AB'C$. Reflect M across lines AB and AC , and let l denote the line through the reflections. a) Prove that the line through M perpendicular to line AM , the line AK , and l are either concurrent or all parallel. b) Show that if the three lines are concurrent at S , then triangles SBC' and SCB' have equal areas. (Proposed by Áron Bán-Szabó, Budapest) **A. 892.** Given two integers, k and d such that d divides $k^3 - 2$. Show that there exists integers a , b , c satisfying $d = a^3 + 2b^3 + 4c^3 - 6abc$. (Proposed by Csongor Beke and László Bence Simon, Cambridge)

Problems in Physics

(see page 519)

M. 435. Attach a weight to the bottom of a household candle so that it floats in a vertical position when placed in water. Light the candle and then measure how the length of the candle submerged in the water varies as a function of its total instantaneous length. Using the measured data, determine the density of the material of the candle.

G. 865. A tanker truck delivered milk from Hódmezővásárhely to Debrecen, 200 km away, on a weekly basis. On one of the trips, the driver noticed halfway through the trip that milk was dripping through a small hole in the tank to the road. When he had been on the road for 2 hours, 1.2 litre of milk was missing from the tank. He then increased the speed of the truck in order to get the milk to its destination as quickly as possible. On arrival in Debrecen, he was able to deliver a total of 2 litres less milk than he had originally set off with. *a)* What was the average speed at which the truck covered the 200 km distance? *b)* In metres what was the distance between two adjacent milk drops on the road on the first and on the second part of the trip, if the volume of each drop is 0.2 ml? The drops were detaching from the rim of the hole in the tank at regular time intervals. **G. 866.** A thin, double-bent tube is made from three long enough pieces. The middle section is horizontal, the first section makes an angle of 30° with the horizontal, and the third section makes an angle of 45° with the horizontal. The sections lie in the same vertical plane, with short, smooth bends connecting each section. At the left end of the tube, a tap seals off enough air, such that there is a mercury thread, of length L , at rest in the bottom of the left section of the tube (as shown in the figure). The tap is suddenly opened, causing the mercury thread to move without friction. Initially, the bottom of the mercury thread is at the junction of the first and second tube sections. What is the maximum fraction of the mercury thread that enters the third section of the tube? **G. 867.** A calorimeter contains a mixture of ice and water. The calorimeter is heated at a constant power and the temperature of its contents is measured and plotted against time (see the figure). At the end of the measurement, there was 850 ml of water in the calorimeter. Determine the heating power of the calorimeter and the initial amount of ice in it. **G. 868.** The resistance of the edges of the rhombus shown in the figure is R , and the resistance of the diagonal is xR , where $x \geq 0$ is a variable parameter. A voltage supply U is connected across two arbitrary chosen vertices. For each possible case, calculate the total dissipated power in the five resistors as a function of the parameter x .

P. 5598. According to the rumours, Tom McPoint, the famous acrobat, will perform his legendary stunt in Hódmezővásárhely in the winter of 2024. He will walk along a wooden plank waving to the audience such that one end of the plank lies on the top of a tower block without fastening it to the building, while the other end extends over the street. On the day before the performance, the acrobat's assistants sprinkle water on the horizontal roof of the chosen building to form a flat layer of ice. Then, at the start of the show, the 6 m long plank is pushed out over the edge of the roof so that it just will not fall over when Tom steps on its end which is on the roof (See the figure). *a)* What is the maximum length of the part of the plank that extends above the street at the beginning of the stunt, if Tom's mass is 60 kg and that of the plank is 40 kg? *b)* At the end of the stunt, how far will Tom be from the edge of the roof if he walks along the plank in 20 s at a constant speed? The friction between the plank and the ice is negligible and Tom's feet do not slip on the plank during the stunt. **P. 5599.** The shape of a thin metal cup is a paraboloid of revolution, and it has a vertical axis of symmetry and is attached to a horizontal supporting plate at its apex O . The distance between point P and the plate

is h_0 . A point-like body is dropped into the thin tube placed inside the cup at its end point Q , and it leaves the tube at point P . The difference in height between the points Q and P is H . (See the *figure*.) The small body flies out of the tube in the direction of a horizontal straight line, which lies in the plane tangent to the surface of the cup. Within what limits will the distance h of the small body from the cup vary during the rest of the motion? (Friction is negligible everywhere.) **P. 5600.** A twin ladder is standing on a frictionless, horizontal ground such that initially the angle between the ground and each side rail is φ_0 . The spreaders between the front and rear rails prevents them from sliding apart. A man of mass M sits on top of the ladder. The spreaders break and the ladder opens. At what speed and acceleration does the man reach the ground? What is the ratio of these two quantities to the speed and acceleration, respectively, when the man falls freely from the same height? Investigate the two limiting cases when $M \rightarrow 0$ and when $M \rightarrow \infty$. Consider the two sides of the ladder as uniform rods of mass m and length ℓ , and the man as a point. The two sides of the ladder are held together at the top by a frictionless hinge. (See the *figure*).

P. 5601. A horizontal membrane vibrates vertically, harmonically, at a frequency of 500 Hz. Fine sand is sprinkled on the membrane and the sand particles are seen to rise into the air to a height of 3 mm above the equilibrium position of the diaphragm. What is the amplitude of the vibration of the membrane? Consider the collision of the sand particles on the membrane as totally inelastic.

P. 5602. A piston in a horizontal cylinder seals off helium gas. The gas is heated by a 10 W heating element. The gas pushes the piston outwards uniformly. The cross section of the cylinder is 10 cm^2 . The external air pressure is 100 kPa. What is the speed of the piston?

P. 5603. We are observing a small starfish lying on a sandy beach, standing on all fours, from exactly above, at a height of 50 cm. The tide slowly causes the water level to rise, and 40 cm of water covers the animal.

a) How many times larger, i.e., at how many times greater angle do we see the starfish than at the beginning if we do not change our body position?

b) How many times larger do we see the starfish if at high tide we wear glasses which have a power of 0.5 dioptres? Where is the image formed by the lens in this case? Ignore the distance between the glasses and your eyes.

P. 5604. The electromotive force (emf) of a flat-pack lantern battery is $U_0 = 4.5 \text{ V}$, its internal resistance is $R_i = 1.5 \Omega$. We have two alike incandescent bulbs, whose $I(U)$ characteristics is shown in the *figure*.

a) How does the terminal voltage of the battery depend on the current? Graph the $I(U)$ characteristics of the battery.

b) A bulb is connected to the battery. Using the $I(U)$ graph determine the voltage across the bulb and the current flowing through the bulb (the so-called operating point).

c) The two bulbs are connected *i)* in parallel *ii)* in series and then they are connected to the battery. Plot the $I(U)$ characteristics of the two bulbs (together) when they are connected in series and in parallel, and then determine the new operating point in both cases. Then determine in both cases the voltage across one bulb, and the current flowing through one bulb.

P. 5605. A moving argon atom collides elastically with a neon atom, initially at rest. What is the maximum angle of deflection of the argon atom?

P. 5606. A spacecraft with a total mass m_0 is travelling in interplanetary space at a speed of v without the presence of external forces. To change the direction of its motion, it suddenly turns on its propulsion system, from which propellant flows out at a constant (relative) speed u , all the time in a direction perpendicular to the instantaneous speed of the spacecraft. How much does the mass of the spacecraft decrease until its velocity vector turns 90° relative to the original direction?

Képek a KömaL Ankét díjkioszójáról



AIT - BUDAPEST



Morgan Stanley

 hiflylabs

Képek a KöMaL Ankét előadásairól



Keszthelyi Gabriella



Héger Tamás



Széchenyi Gábor

Juhász Péter



Vankó Péter

Daróczy Bálint

Az előadásokról készült felvételek megtekinthetők a KöMaL YouTube csatornáján:



Ördöglakatalás