

Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok

Informatika rovattal

Támogassa lapunk kiadását
adója **1%-ával** – **18157444-2-43**

Kép az M. 437. mérési feladat egyik megoldásából



Katsuhiko Okamoto: Void Cube



Egy Rubik-kocka variánsról – I. rész |
Bonyolult összegek és szorzatok 2. | Fizika feladatok
megoldásai | Matek az utcán 2025 |
Felhívás: KöMaL nyári fizika tábor!



KöMaL

75. évfolyam
4. szám
2025.
április



Néhány Rubik-kocka variáns



Skewb Ultimate (2000)



Hexaminx (2008)



Rex Rhombic
Dodecahedron (2011)



Asymmetrical Rex
2x2x2 (2015)



Ultra-X (2010)



Egy 2x2x16-os kocka
(2017)



Moyu AoChuang belső
szerkezete



Gyűjtemény



KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE

ALAPÍTOTTA: ARANY DÁNIEL 1894-ben

75. évfolyam 4. szám

Budapest, 2025. április

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta. ÁRA: 1450 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

<i>Freud Róbert</i> : Újabb bonyolult összegek és szorzatok, 2. rész.....	194
<i>Barbarics Márta</i> : Matek az utcán, 2025.....	199
<i>Mágori Marcell, Vigh Viktor</i> : Egy Rubik-kocka variánsról I.	205
<i>Fonyóné Németh Ildikó, Fonyó Lajos</i> : Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire.....	209
<i>Horváth Eszter</i> : Megoldásvázlatok a 2025./3. szám matematika gyakorló feladatsorához....	211
A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok (854–858.).....	222
A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (857–858., 1853–1857.).....	224
A B pontversenyben kitűzött feladatok (5454–5461.).....	225
Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (905–907.).....	226
Informatikából kitűzött feladatok (659–662.) ..	227
Mérési feladatok megoldása (437.).....	233
Fizika gyakorlatok megoldása (867., 868.).....	234
Fizika feladatok megoldása (5599., 5600., 5607., 5611., 5612., 5618.).....	238
Fizikából kitűzött feladatok (440., 885–888., 5643–5651.).....	250
Problems in Mathematics.....	253
Problems in Physics.....	255

Főszerkesztő: KORÁNDI JÓZSEF
Fizikus szerkesztő: VANKÓ PÉTER
Műszaki szerkesztő: FRIED KATALIN
Borító: BURGHARDT ZSUZSA
Kiadja: MATFUND ALAPÍTVÁNY
Alapítványi képviselő: KÓS RITA
Felelős kiadó: KATONA GYULA
Nyomda: OOK-PRESS Kft.
Felelős vezető: SZATHMÁRY ATTILA
INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A matematika bizottság vezetője:
HERMANN PÉTER

Tagjai: BÁN-SZABÓ ÁRON, BÍRÓ BÁLINT, CZETT MÁTYÁS, GYENES ZOLTÁN, HUJTER BÁLINT, IMOLAY ANDRÁS, KISS GÉZA, KÓS GÉZA, KOZMA KATALIN ABIGÉL, LOVAS MÁRTON, ÖKÖRDI PÉTERNÉ, PACH PÉTER PÁL, PAULOVSIC ZOLTÁN, RATKÓ ÉVA, SZTRANYÁK ATTILA, VIGH VIKTOR

A fizika bizottság tiszteletbeli elnöke:
HOLICS LÁSZLÓ

Vezetője: SZÉCHENYI GÁBOR

Tagjai: BARANYAI KLÁRA, GNÄDIG PÉTER, HONYEK GYULA, OLOSZ BALÁZS, SZÁSZ KRISZTIÁN, VIGH MÁTÉ, VLADÁR KÁROLY, WOYNAROVICH FERENC

Az informatika bizottság vezetője:
SCHMIEDER LÁSZLÓ

Tagjai: LÓCZI LAJOS, SIEGLER GÁBOR, TÓTH TAMÁS

Fordítók: GYENES ZOLTÁN, TASNÁDI ANIKÓ

Nyelvi korrektor: ANDICS ÁGNES

Szerkesztőségi titkár: ONDINÉ SZABÓ SÁRA
A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
Telefon: +36 20 320-1143
A lap megrendelhető a
<https://komalujsg.myshoprenter.hu>
oldalon keresztül.
Előfizetési díj egy évre: 12 000 Ft
Kéziratokat nem őrzünk meg és nem küldünk vissza.
Minden jog a KöMaL tulajdonosaié.
E-mail: szerk@komal.hu
Internet: <http://www.komal.hu>

This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 20 320-1143
or on the Internet:
<https://komalujsg.myshoprenter.hu>.
A Lapban megjelenő hirdetések tartalmáért felelősséget nem vállalunk.



Újabb bonyolult összegek és szorzatok, 2. rész

A KöMaL előző, 2025 márciusi számában jelent meg négy feladat, amelyekben bizonyos összegek, illetve szorzatok kiszámítása volt a cél. Ezen feladatok megoldásait ebben a lapszámban közöljük.

Az előző számban megjelent feladatok megoldását ismertetjük, de az Olvasónak érdemes a néhol vázlatos vagy hiányzó lépéseket önállóan végiggondolnia. A megoldások során hivatkozunk a feladatok után szereplő útmutatásokra is.

$$1. \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} j^3.$$

Első megoldás. Kezdjük egy egyszerűbb összeggel (erre szükségünk is lesz):

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} j. \text{ Részletesen kiírva:}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} j &= \binom{n}{0} 0 + \sum_{j=1}^n \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{j!} j = \\ &= n \sum_{j=1}^n \frac{(n-1)\dots(n-j+1)}{(j-1)!} = n \sum_{j=1}^n \binom{n-1}{j-1} = n2^{n-1}. \end{aligned} \quad (1)$$

Az utolsó lépésben felhasználtuk, hogy $\sum_{t=0}^m \binom{m}{t} = 2^m$. Ez az $(1+1)^m$ binomiális tétel szerinti felírásából következik, vagy pedig abból, hogy az egyenlőség mindkét oldala egy m elemű halmaz összes részhalmazainak a száma.

Most emeljük a tétet, pontosabban a kitevőt, és számítsuk ki a $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} j^2$

összeget. Az (1)-hez analóg módon a $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} j(j-1)$ összeget tudjuk kezelni:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} j(j-1) &= 0 + \sum_{j=2}^n \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{j!} j(j-1) = \\ &= n(n-1) \sum_{j=2}^n \frac{(n-2)\dots(n-j+1)}{(j-2)!} = \\ &= n(n-1) \sum_{j=2}^n \binom{n-2}{j-2} = n(n-1)2^{n-2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Így (1) és (2) alapján

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} j^2 = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (j(j-1) + j) = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}. \quad (3)$$

Ugyanígy járunk el az eredetileg kérdezett $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} j^3$ összegnél is.

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} j(j-1)(j-2) = n(n-1)(n-2)2^{n-3}, \quad (4)$$

továbbá $j^3 = j(j-1)(j-2) + 3j^2 - 2j$, így (1), (3) és (4) alapján

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} j^3 = n(n-1)(n-2)2^{n-3} + 3n(n+1)2^{n-2} - 2n2^{n-1} = n^2(n+3)2^{n-3}. \quad (5)$$

Második megoldás. Az (1)-beli

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} j = n2^{n-1}$$

egyenlőség közvetlen kombinatorikai megfontolással is igazolható: n ember közül egy tetszőleges létszámú bizottságot választunk elnökkel. A bal oldal szerint ezt megtehetjük úgy, hogy valahány embert kiválasztunk, és közülük kijelöljük az elnököt. A jobb oldali módszer előbb választja meg az elnököt, majd utána hozzá a bizottság többi tagját a maradék $n-1$ ember közül.

Ugyanígy, a (2) és (4) képletben szereplő

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} j(j-1) = n(n-1)2^{n-2} \text{ és } \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} j(j-1)(j-2) = n(n-1)(n-2)2^{n-3}$$

összefüggések olyan bizottságok kétféle kiválasztási módját jelentik, amelyekben elnök és alelnök, illetve elnök, alelnök és titkár is ki van tüntetve.

Harmadik megoldás. Generátorfüggvényt és egy kis analízist használunk. A binomiális tétel szerint $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j = (1+x)^n$. Ezt a polinomot deriválva

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} j x^{j-1} = n(1+x)^{n-1} \quad (6)$$

adódik. (Ha $x=1$, akkor ismételten megkaptuk (1)-et.) A (6)-ot x -szel szorozva, majd deriválva, a

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} j^2 x^{j-1} = n((1+x)^{n-1} + x(n-1)(1+x)^{n-2}) = n(1+x)^{n-2}(1+nx)$$

összefüggést nyerjük. (Ez $x=1$ -re éppen (3)-at adja.) Ismét szorozva x -szel és deriválva, majd $x=1$ -et helyettesítve megkapjuk (5)-öt.

$$2. \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j}^2.$$

Megoldás. Az $(1+x)^n(1-x)^n = (1-x^2)^n$ azonosság bal oldalán mindkét tényezőt a binomiális tétel alapján felírva, majd a szorzást elvégezve x^n együtthatója éppen a szóban forgó összeg lesz (felhasználva az $\binom{n}{j} = \binom{n}{n-j}$ összefüggést is). Ez tehát megegyezik a jobb oldalon x^n együtthatójával, ami ismét a binomiális tétel szerint páros n -re $(-1)^{n/2} \binom{n}{n/2}$ és páratlan n -re 0.

$$3. \sum_{i=1}^{v-1} \left\lfloor \frac{iu}{v} \right\rfloor + \sum_{j=1}^{u-1} \left\lfloor \frac{jv}{u} \right\rfloor, \text{ ahol } u \text{ és } v \text{ relatív prím, 1-nél nagyobb egész számok,}$$

és $\lfloor \alpha \rfloor$ az α (alsó) egészrészét jelenti.

Első megoldás. Belátjuk, hogy az összeg egy olyan téglalap belsejébe eső rácspontok (=egész koordinátájú pontok) száma, amelynek a csúcsai a $(0,0)$, $(u,0)$, $(0,v)$ és (u,v) pontok. Az ilyen rácspontok száma nyilván $(u-1)(v-1)$, tehát az összeg ezzel egyezik meg.

Az állítás igazolásához húzzuk be a téglalapnak a $(0,0)$ és (u,v) csúcsait összekötő átlóját. Az átlón belül nincs rácspont, mert a meredeksége v/u , ami nem egyszerűsíthető, hiszen u és v relatív prímek.

Az alsó háromszög belsejében az $1 \leq j \leq n-1$ abszcisszájú rácspontok r ordinátájára $1 \leq r < \frac{v}{u}$ teljesül, tehát $\lfloor \frac{v}{u} \rfloor$ ilyen rácspont van. Ezt j szerint összegezve adódik, hogy az alsó háromszög belsejében a rácspontok száma a második szumma.

Ugyanígy adódik, hogy az első szumma a felső háromszög belsejében levő rácspontok száma.

Második megoldás. Írjuk át az első szummát az $\lfloor \alpha \rfloor = \alpha - \{\alpha\}$ azonosság alapján, ahol $0 \leq \{\alpha\} < 1$ az α szám törtrésze:

$$\sum_{i=1}^{v-1} \left\lfloor \frac{iu}{v} \right\rfloor = \sum_{i=1}^{v-1} \frac{iu}{v} - \sum_{i=1}^{v-1} \left\{ \frac{iu}{v} \right\}. \quad (7)$$

A (7) jobb oldalán álló kisebbítendő az első $v-1$ pozitív egész összegének az u/v -szerese, azaz

$$\frac{u}{v} \cdot \frac{v(v-1)}{2} = \frac{u(v-1)}{2}. \quad (8)$$

A (7) jobb oldalán álló kivonandó olyan törtek összege, amelyek nevezője v , a számlálók pedig az iu számoknak a v szerinti osztási maradékai, $1 \leq i \leq v-1$. Mivel u és v relatív prímek, ezek a maradékok páronként különbözők és egyik sem 0. Így a számlálók ki kell hogy adják valamilyen sorrendben az $1, 2, \dots, v-1$ egészeket.

Ennek megfelelően a kivonandó összeg

$$\frac{1}{v}(1+2+\cdots+(v-1)) = \frac{1}{v} \cdot \frac{v(v-1)}{2} = \frac{v-1}{2}. \quad (9)$$

Kivonva (8)-ból (9)-et, (7) alapján kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{v-1} \left\lfloor \frac{iu}{v} \right\rfloor = \frac{(u-1)(v-1)}{2}.$$

Természetesen ugyanez adódik az eredeti összegben szereplő második szummára is, tehát a feladatban kért összeg $(u-1)(v-1)$.

$$4. a) \prod_{j=1}^{n-1} \sin\left(\frac{j\pi}{n}\right).$$

Megoldás. Írjunk az egységkörbe egy szabályos n -szöget, és számítsuk ki az egyik csúcsból kiinduló összesen $n-1$ átló és oldal hosszának a P_n szorzatát.

A rögzített csúcs, a kör középpontja és a másik csúcs egy olyan (esetleg elfajuló) egyenlő szárú háromszöget alkot, amelynek a szárai a kör két sugara, az alap a két csúcsot összekötő húr és a szárszög $2j\pi/n$ vagy $2(n-j)\pi/n$, attól függően, hogy $1 \leq j \leq n/2$ vagy $n/2 \leq j \leq n-1$. Így az alap hossza mindenképpen $2\sin(j\pi/n)$. Tehát az $n-1$ átló és oldal hosszának a szorzata $P_n = 2^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} \sin(j\pi/n)$.

Másrészt $n=3, 4$ és 6 esetén könnyen adódik az a szép és meglepő eredmény, hogy $P_n = n$. Megmutatjuk, hogy ez minden $n \geq 3$ esetén igaz. Ebből következik, hogy $\prod_{j=1}^{n-1} \sin\left(\frac{j\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$. Közvetlenül adódik, hogy ez a képlet $n=2$ -re is igaz (sőt $n=1$ -re is, ha az üres szorzatot a szokásos módon 1-nek definiáljuk).

A $P_n = n$ egyenlőség igazolásához áttérünk a komplex számsíkra. A szabályos n -szög középpontja legyen a 0 , a kitüntetett csúcs pedig az 1 . Ekkor a többi csúcs a többi n -edik egységgyök, w_j , $1 \leq j \leq n-1$. Egy szakasz hossza a két végpont különbségének az abszolút értéke, tehát az 1 -et a w_j -vel összekötő oldal vagy átló hossza $|1-w_j|$. Ennek alapján P_n -et abszolút értékek szorzataként írhatjuk fel, ami megegyezik a szorzat abszolút értékével:

$$P_n = \prod_{j=1}^{n-1} |1-w_j| = \left| \prod_{j=1}^{n-1} (1-w_j) \right|. \quad (10)$$

Bevezetve az $f(x) = \prod_{j=1}^{n-1} (x-w_j)$ polinomot, (10) jobb oldala éppen $|f(1)|$. Az $f(x)$ polinom gyökei az n -edik egységgyökök az 1 kivételével, tehát

$$f(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1.$$

Ebből következik, hogy $P_n = |f(1)| = |n| = n$.

$$4. b) \prod_{j=1}^{n-1} \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right).$$

Első megoldás. Ha n páros, akkor $j = n/2$ -re $\cos(j\pi/n) = 0$, tehát a szorzat 0. A továbbiakban feltesszük, hogy n páratlan.

Ismét a 4. a) feladatbeli szabályos n -szöget tekintjük és ebben a rögzített csúcs, a kör középpontja és a másik csúcs által alkotott egyenlő szárú háromszöget. Ennek az alaphoz (azaz a kör húrjához) tartozó magassága $|\cos(j\pi/n)|$. Ugyanez komplex számokkal kifejezve $|(1 + w_j)/2|$. Ebből következik, hogy

$$\prod_{j=1}^{n-1} \left| \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right) \right| = \prod_{j=1}^{n-1} \frac{|1 + w_j|}{2} = \frac{|\prod_{j=1}^{n-1} (1 + w_j)|}{2^{n-1}}. \quad (11)$$

Ismét az $f(x) = \prod_{j=1}^{n-1} (x - w_j)$ polinomot és az $|1 + w_j| = |-1 - w_j|$ egyenlőséget használva, (11) jobb oldala éppen $|f(-1)|/2^{n-1} = 1/2^{n-1}$. Tehát ennyi a keresett szorzat abszolút értéke. Az előjel $(-1)^{(n-1)/2}$, hiszen $\cos(j\pi/n) < 0 \iff j > n/2$. Ennek alapján

$$\prod_{j=1}^{n-1} \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right) = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{2^{n-1}}. \quad (12)$$

Második megoldás. Páros n -re a szorzat 0, így most is feltesszük, hogy n páratlan. A $\sin(2\alpha) = 2\cos\alpha\sin\alpha$ azonosság alapján

$$R_1 = \prod_{j=1}^{n-1} \sin\left(\frac{2j\pi}{n}\right) = 2^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right) \prod_{j=1}^{n-1} \sin\left(\frac{j\pi}{n}\right) = 2^{n-1} R_2 R_3. \quad (13)$$

Belátjuk, hogy

$$R_1 = (-1)^{(n-1)/2} R_3. \quad (14)$$

Így (14) alapján (13)-at $2^{n-1} R_3 \neq 0$ -val elosztva éppen (12) adódik.

Rátérve (14) igazolására, az R_1 -beli $\sin(2j\pi/n)$ tényezők $1 \leq (n-1)/2$ esetén R_3 -ban is szerepelnek. Ha pedig $(n+1)/2 \leq j \leq n-1$, akkor

$$\sin\left(\frac{2j\pi}{n}\right) = \sin\left(\pi + \frac{(2j-n)\pi}{n}\right) = -\sin\left(\frac{(2j-n)\pi}{n}\right), \quad (15)$$

és itt $(n+1)/2 \leq j \leq n-1$ miatt a $2j-n$ számok éppen az n -nél kisebb pozitív páratlan számokat futják be. Mindebből (15) alapján következik (14).

✱

Most néhány újabb összeg és szorzat kiszámítása a cél. Ezek részletes megoldásait a következő számban közöljük.

$$5. \sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2n+1}\right).$$

$$6. \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{m}{j} \binom{k-j}{n}.$$

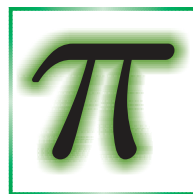
7. $\sum_{j|n} \sigma(j) \varphi\left(\frac{n}{j}\right)$, ahol $\sigma(j)$ a j pozitív osztóinak az összege és $\varphi(j)$ az Euler-féle φ -függvény, azaz az $1, 2, \dots, j$ egészek között a j -hez relatív prímek száma.

$$8. a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^n \sigma(j)}{n^2}.$$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^n r(j)}{n}$, ahol $r(j)$ a j előállításainak a száma két négyzetszám összegeként; pl. $r(3) = 0$; $r(5) = 8$, mert $5 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2$; $r(4) = 4$, mert $4 = (\pm 2)^2 + 0^2 = 0^2 + (\pm 2)^2$.

Freud Róbert

Matek az utcán, 2025



2025-ben minden eddiginél többen csatlakoztak a Bolyai János Matematikai Társulat hagyományteremtő Matek az utcán rendezvénysorozatához, amelyet idén is a Matematika Világnapja (március 14. – 3.14) alkalmából rendeztek meg. Országsszerte több ezer érdeklődőhöz sikerült közelebb hozni a matematika világát.



A központi rendezvény Budapesten, a Blaha Lujza téren volt.

Itt a járókelők bekapcsolódhattak a „Kézzelfogható matematika” nemzetközi kreatív kihívásba, ahol a feladat matematikai fogalmak megjelenítése volt egy



zsákból kihúzott instrukciók alapján. Voltak testek építésével és bűvös négyzetekkel kapcsolatos feladatok is, illetve a Budapesti Műszaki Egyetem önkéntesei a gráfok, fraktálok és paradoxonok világába kalauzolták az érdeklődőket. A Garabonciás Középiskola diákjai és tanárai matematikai témájúvá átirított dalokat adtak elő.



Mivel a rendezvény március 8-án, nőnapon zajlott, így a nők matematikában betöltött szerepéről szóló kvízzjátékban és beszélgetésben is részt lehetett venni.

Budapesten még a Vasarely Múzeum a Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium diákjaival együttműködve tartott MATEK az utcán-t.

A tizedikes gimnazisták meghajtottak előre több ezer origami négyzetet és összekötő elemet, amelyek segítségével a résztvevők különböző alakzatokat építhettek.

Győre két nap, két helyszínen is tartottak rendezvényt. Március 7-én a Széchenyi Egyetem Apáczai Karának hallgatói és az Öveges Kálmán Gyakorló Iskola tanárai és kisdíákjai vitték ki a matematikát a Batthyány parkba, ahova még Mosonmagyaróvárról is érkeztek érdeklődők.

A mozgásos játékokról, logikai fejtörőkről és az origamihoz hasonló kirigamiról a helyi televízió és újság is beszámolt. Március 14-én sajnos nem volt olyan verőfényes napsütés, mint egy héttel korábban, így a π -napon a Széchenyi István Egyetem Menedzsment Campus konferenciatermében tartották meg a tervezett programot. Megnyitó és köszöntő után tudományos előadás volt a π -ről, illetve a program részeként számos tanuló, pedagógus, szülő és kísérő közösen jelenítette meg a π -t néhány tizedesjegyre.



Március 8-án Bonyhádön a Völgysegi Múzeumban „Legyen a matek mindenkié!” szlogennel tartottak családi játéknapot, ahol a társasjátékok és a matematika-logika közötti kapcsolat volt a központi téma. A Møbee kártyajáték kitalálója és fejlesztője legújabb játékát mutatta be, emellett voltak még LEGO-Matek és Minden Matek fantázianevekkal ellátott érdekes feladványok is. Debrecen szintén duplázott: március 8-án és 14-én is ünnepelt. A Debreceni Egyetem Földtudományi és Matematikai Intézete előtti téren voltak még ördöglakatok, origami, térkitöltés, sokoban, SMS-scrabble, élő corridör és Galton-deszka játék. A nőnap alkalmából itt is szó esett kiváló női matematikusokról.



Győr, Batthyány park

Magán a π -napon pedig a Debreceni Fazekas Mihály Gimnázium diákjai és tanárai flashmob keretében szavaltak π -verset.



Gödöllőn a Református Líceum volt a szervező. Saját fejlesztésű thaleométerekkel várták az érdeklődőket, akik az eszközön keresztül két lufit figyelve rendeződtek körvonalba.

A résztvevők rengeteg matematikai játékot kipróbáltak, például a Penrose- és Escher-csempézést, stratégiai játékokat és Möbius-szalagokat. Veszprémben a Kosuth utca telt meg matekozással a Pannon Egyetem Humántudományi Karának jóvoltából. A kíváncsiskodók az egyetem mesteroktatója és tanító szakos hallgatói segítségével matematikai játékokat, logikai feladatokat, latin négyzetet, gyufarejtvényeket oldottak meg, de megismerkedhettek még a Lénárt-gömb geometriájával is. Kvízek és π -zene biztosította a jó hangulatot. Abaújszántón a piacon a vásárlók is tudomást szereztek a π -napról és kipróbálhatták az egy-, két-, illetve három-személyes logikai játékokat. Bátaszéken a gyerekek legnagyobb örömeire játékos foglalkozásokat tartottak az iskola udvarán és az aulában.



A hangulat olyan nagyszerű volt, hogy az egész iskola ettől zengett. π -napot ünnepelt a Matek Oázis is a nagykanizsai HSMK-ban. A matematika, művészet és kreativitás köré szervezett programban kicsik és nagyok egyaránt felfedezhették, hogy a matematika a művészetekben is jelen van. Voltak logikai és játékos feladatok minden korosztálynak. A Pápai Weöres Sándor Általános Iskola is csatlakozott a Matek az utcán rendezvénysorozathoz. Az időjárás miatt a π -nap miatt végül az iskola auláját rendezték be kirakodóvásár szerűen. Itt rengeteg kreatív, játékos feladaton keresztül kerülhettek közelebb az érdeklődők a matematikához.

A szervezők nagy örömére nemcsak az iskola tanulói, hanem sok szülő és nagyszülő is bekapcsolódott a játékba. Pécsen a Ciszterci Rend Nagy Lajos Gimnáziumában idén már hetedik alkalommal ünnepelték meg a π -napot. Érdeklődők



Pápai kirakós



Sárospatak, Picasso ihlette képek

érkeztek Komlóról, Tamásiból, Szentlőrincről, Siklósról, Hőgyészről és Mohácsról, Hosszúhetényből, több pécsi középiskolából, helyi és budapesti egyetemi karokról.



Obádovics Gyula Szegeden

Két szekcióban folytak előadások matematikai témákban, de a mesterséges intelligencia alkalmazása is szóba került. Az iskolán belüli előadásokkal egyidőben négy külső helyszínen diákok és tanárok segítségével kísérletezve lehetett megközelíteni a π értékét: rizsszemek mérésével (Monte Carlo módszer), pálcadobálással (Buffon tűkísérlete) vagy hullahopp karika gurításával (kerület és átmérő arányával). De a vállalkozó kedvűek online teszten keresztül a matematika-tudásukat is kipróbálhatták. Pusztamérgesen a Szent Ágoston Katolikus Általános Iskola, Óvoda-Bölcsőde tanulói π -flashmob előadással ünnepeltek. Salgótarjánban is az iskola aulájában játszottak matematikai játékokkal, oldottak meg logikai feladatokat a diákok és próbálkoztak ördöglakatok szétszedésével, összerakásával. Egy 16 méter hosszú papírra felírták a π értékét mintegy 150 tizedesjegyre, és még a tantestületet is meglepték egy kis barackos π -tével.

Sárospatakon egy illusztrátori kiállítás megnyitójával kezdődött a π -nap.

Ezután a gyerekek 21 helyszínen alkothattak, játszhattak, oldhattak meg érdekes feladatokat, próbálkozhattak kijutni a szabaduláshobából. Este újabb kihívásokat hozott a π zsiparty (játék, tánc, kvíz, mese, π zzavacsora, π zsamaséta), majd mindenki az osztályában kialakított hálóteremben tölthette az éjszakát.

Szegeden is nagy érdeklődés mellett zajlott a π -nap. Obádovics Gyula bácsi 98 évesen is elvárásolta a közönséget.

Volt itt még szó kiberbiztonságról, AI vs matekfeladatokról, végtelen sorokról és a zsonglörködés matematikájáról is. Szombathelyen a Berzsényi Dániel Könyvtár Gyermekkönyvtárában egy matematikai szabaduláshobából való kijutás érdekében veselkedhetek neki a diákok a matematikai feladványoknak és a megoldásra váró rejtvényeknek. Tatán az Eötvös Gimnázium szervezett π -napot. Megnyitották kapukat külsős érdeklődőknek is: a Kőköti Általános Iskolából érkeztek kíváncsi tekintetű gyerekek. π tesütő verseny, a Ilvax kávéházban π skóták, $\varrho\pi$ (ropi),



π lóta keksz, π rosgyümölcslé, valamint π -hez kapcsolódó rejtvények várták az érdeklődőket.

Lehetett még π dokut fejteni, a π számjegyeit memorizálni, saját ördöglakatot készíteni, π -karkötőt fűzni. Bárki megkereshette a születésnapját a π tizedesjegyeinek sorában. A jutalom sem maradhatott el: π llecukor, majd a π ték közös elfogyasztása zárta a napot.

A Bolyai János Matematikai Társulat az UNESCO Magyar Nemzeti Bizottságának védnökségével március 7 és 14 között a Matematika Világnapja alkalmából az ország 20 helyszínén vonta be az utca emberét érdekes matematikai tevékenységekbe.

Jövőre is várjuk a csatlakozókat!

Barbarics Márta (appx.bolyai@gmail.com)

Egy Rubik-kocka variánsról I.



A Rubik-kocka és első variánsai

Rubik Ernő 1974-es találmánya kétségkívül minden idők legnépszerűbb logikai játéka. Nem csupán Magyarországon, de világszerte közsímet, és a népszerűsége a megjelenése óta töretlen. Talán kevesebben tudják, hány hasonló elven működő variánsát alkották meg az elmúlt öt évtizedben. A „kockás” közösség 2002-ben indított egy online adatbázist a <https://www.twistypuzzles.com/> címen, amely lexikonszerűen tartalmaz jószerevel minden úgynevezett twisty puzzle-t, s így minden Rubik-kocka variáns is – innen érdemes tájékozódni.

Nagyjából 2009-ig szinte kizárólag tömeggyártott változatokkal találkozhatunk, ezek egy részét szintén Rubik Ernő találta ki, de például Uwe Mèffert termékei is nagy népszerűségnek örvendtek. 2009 környékén már szélesebb körnek vált megfizethetővé a jó minőségű 3D nyomtatás – eleinte még ezzel foglalkozó cégeken

keresztül –, ami új lendületet adott a tervezőknek, hiszen lehetővé tette bonyolultabb mechanizmusok használatát, illetve egyedi tervek megvalósítását.

A következő technológiai ugrás 2015 körül történt, amikor az otthoni használatra árusított 3D nyomtatók ára és nyomtatási minősége is elért egy versenyképes kombinációt, így – az egyre nagyobb – twisty puzzle készítő közösség újabb lendületet vett. A lap borítóján is láthatunk néhány az utóbbi 20-25 évben készült különleges kockát.

Időről időre a nem „kocka-specifikus” érdeklődésű (azaz *nem kocka-kocka*) ördöglakatos közösség figyelmét is felkeltette egy-egy izgalmas terv. A 2007-es Nob Yoshigahara Puzzle Design Competition zsűri nagydíját például Katsuhiko Okamoto munkája, a Void Cube kapta. 2010-ben ugyanő a Latch Cube-bal nevezett be a versenybe, amely ugyan díjat nem kapott, de széles körben népszerű lett. Ezeket a kockákat mindenképp ajánljuk azoknak az olvasóknak, akik kedvelik a „hagyományos” Rubik-kockát, és új, de nem megoldhatatlanul bonyolult kihívásokra vágynak. Mindkét játék kereskedelmi forgalomban kapható, könnyen beszerezhető.

A twisty puzzle-ok mechanikája

A Rubik-kocka nagy rejtélye – a kirakás mellett –, hogy hogyan működik. Minden kocka mechanizmusa azon alapszik, hogy egy adott tömör testet feldarabolunk *vágási felületekkel*. Ahogy az 1. ábrán szereplő képen látszik, bármilyen bonyolultak is az alkatrészek, ha egy adott forgatás mentén kettéválasztjuk a kockát, belül mindig egy forgásfelületet találunk, azaz a vágások forgásfelületek mentén történnek. Mivel egy vágási felület egyértelműen osztja két részre az alaphelyzetben lévő testet („kockát”), ezért definiálhatjuk az alkatrészeket aszerint, hogy az egyes vágási felületek melyik oldalán találhatók.

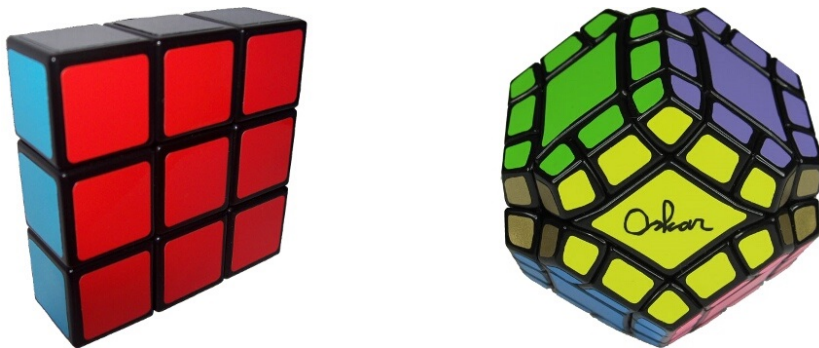


1. ábra. Egy szétszedett Moyu AoChuang V6 $5 \times 5 \times 5$ -ös kocka

Minden kocka alkatrészének nagy része elmozdulhat, de azok, amelyekeken keresztül halad valamelyik forgástengely, nem tudják elhagyni a helyüket. Ezek az úgynevezett közepek tipikusan egy belső maghoz vannak rögzítve a forgástengelyekre illeszkedő csavarokkal. A többi, szabadon mozgó alkatrész közvetlen vagy közvetett módon ezekhez a közepekhez kapcsolódik.

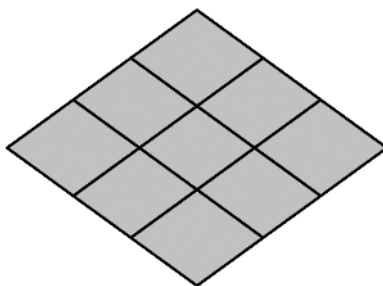
A Floppy Comet Plus bemutatása

Ennek a cikknek fő célja a Mágori Marcell (a cikk egyik szerzője) által fejlesztett Rubik-kocka variáns, a *Floppy Comet Plus* (röviden FCP) részletes bemutatása, míg a következő részben majd az FCP matematikai tulajdonságait tekintjük át. Az FCP logikai felmenője a Floppy Cube, más néven $1 \times 3 \times 3$ -as kocka (2. ábra balra). A korábban már említett Katsuhiko Okamoto mutatta be az első működő példányát 2004-ben, tömeggyártása 2009 óta zajlik. A „Comet” pedig az Oscar van Deventer által kitalált Crazy Comettel való külső hasonlóság miatt került az FCP nevébe. (2. ábra jobbra)



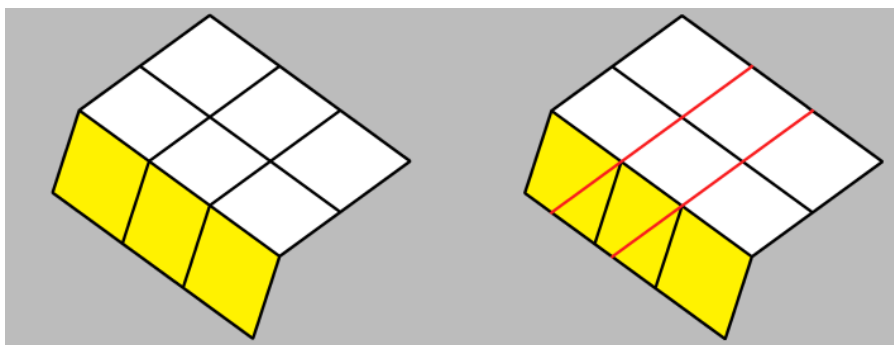
2. ábra. Floppy Cube (balra) és Crazy Comet (jobbra)

A Floppy Comet Plus fejlesztése 2021 júliusában kezdődött. Az alapötlet az volt, hogy mi történne, ha egy Floppy Cube-ot az egyik lapátlója mentén megnyújtanánk. A nyújtás után mind a 4 forgatási opció lehetséges marad a kirakott állapotban, de ettől még nem lehet összekeverni a kockát, ugyanis egy forgatás után a szomszédos oldalak mozgatása lehetetlenné válik, lásd 4. ábra. Emiatt van szükség a Plus alkatrészekre. A 4. ábra jobb oldalán látható két új vágás hozzáadása után ismét minden oldal forgathatóvá válik.



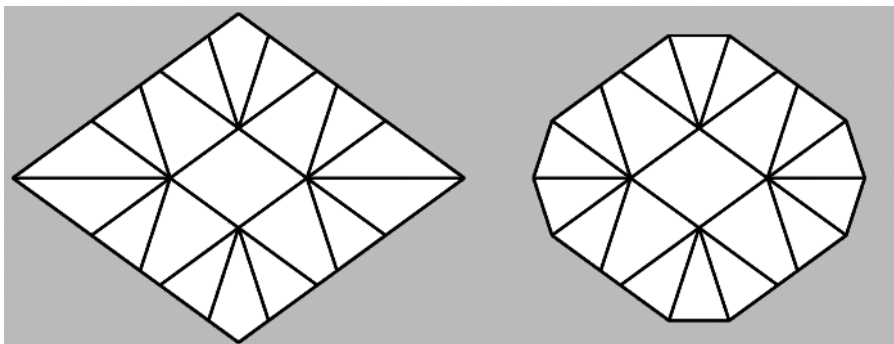
3. ábra. A nyújtott Floppy Cube felülmézete

Ezt a műveletet (azaz egy fordítás után minden szükséges új vágást „hozzáadunk”) addig csináljuk, amíg már nincs szükség további vágásra. További természetes cél, hogy minél kevesebb darab keletkezzen. Mivel a középső rombusz szögeit mi választhatjuk meg, ezzel elérhetjük – a fizikai megvalósíthatóságot szem előtt tartva –, hogy már aránylag kevés extra vágással működőképes legyen a kocka. Például célszerű a rombusz hegyesszögeit 72 foknak választani, így az 5. ábra bal oldalán látható struktúrát kapjuk. Egy végső formai korrekcióval az élek hegyei, ahol voltak, levágásra kerültek, így az FCP lapjai szimmetrikusak lesznek a for-



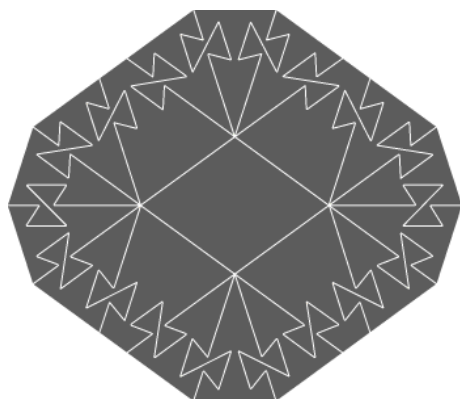
4. ábra. A nyújtott Floppy Cube felülnézete egy forgatás után.

gatásokra, emiatt játék közben a kocka nem vált alakot, ráadásul esztétikusabb megjelenésű is lesz.



5. ábra. A szükséges vágások felülnézete.

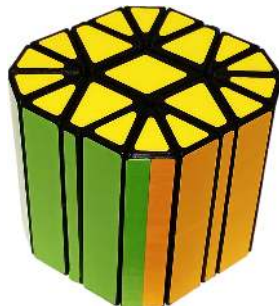
Az FCP belső mechanikai sajátosságai



6. ábra. Vízszintes keresztmetszet

A klasszikus gömbhéjas felépítés potenciálisan instabil, ezért az FCP egy másfajta mechanikai megközelítést alkalmaz, amihez inspirációként az asztalos munkáknál elterjedt fecskefarok illesztés szolgált. A jobb helykihasználás és a stabilitás kedvéért a 6. ábrán látható dupla fecskefarkas megoldás került a végleges verzióba.

A mechanika hátulütője, hogy nem lehet rugalmasságot, „löttyögést” vinni a rendszerbe, ezért összeszereléskor nincs lehetőség az utolsó elemet „bepattintani” a helyére. Emiatt minden alkatrészt



7. ábra. A két fél Floppy Comet Plus – és egyben

félbe kellett vágni a vízszintes tükörsík mentén, így egymástól függetlenül össze lehet rakni a kocka két felét. A 7. ábrán szereplő képen megfigyelhetjük, hogy a két félkocka erős egymáshoz ragasztását fogpiszkálók segítik. A forgatások precizitását belső mágnesek is növelik, amelyek egyébként a játékélményt is fokozzák.

Mágori Marcell, Víg Viktor

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire



I. rész

1. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak vagy hamisak. Indokoljuk a választ.

$$a) \frac{1}{3 - \sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{8} - \sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} - 2} = 5, \quad (5 \text{ pont})$$

$$b) \left(\frac{5^x + 5^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{5^x - 5^{-x}}{2} \right)^2 = 1, \quad (4 \text{ pont})$$

$$c) \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{256}. \quad (3 \text{ pont})$$

2. A pozitív egész számokból álló véges nemüres H halmaz elemeinek legalább a fele páros, legalább a kétharmada 3-mal osztható, és legalább a hathetede 7-tel osztható.

a) Igazoljuk, hogy ekkor a számok között kell lenni 42-vel osztható számnak is. (7 pont)

b) Adjuk meg az összes olyan kétjegyű pozitív egész számot, amelynek ugyanannyi osztója van, mint a 42-nek. (Beleértve a 42-t is.) (6 pont)

3. Egy háromszög szögei számtani sorozatot alkotnak. Két oldalának hossza 5 és 7 egység. Mekkora a háromszög harmadik oldala? (13 pont)

4. Egy k kör O középpontja az $A(1;1)$ és $B(7;13)$ pontokat összekötő e egyenesen van. A kör a $4x + 3y = 42$ egyenletű f egyenest abban az E pontban érinti, amelynek ordinátája 6.

a) Írjuk fel a k kör egyenletét. (9 pont)

b) Az f egyenes y tengellyel alkotott P metszéspontját a k kör O középpontjával összekötve a kapott egyenes a Q és R pontokban metszi a k kört. Mekkora a $PQ \cdot PR$ szorzat értéke? (4 pont)

II. rész

5. Egy forgáskúp alapkörének sugara megegyezik a kúp magasságával. A forgáskúpba olyan egyenes körhengert írunk, amelynek a magassága megegyezik az alapkörének átmérőjével. Számítsuk ki, hogy a henger térfogata, illetve felszíne hány százaléka a kúp térfogatának, illetve felszínének. (16 pont)

6. a) Dia egy majálison részt vesz egy darts játékban. A tábla három koncentrikus körből áll, amelyek átmérője rendre 15, 30 és 45 cm. Ha a dobó játékos nyila a belső körben landol, akkor nyer 12 eurót, ha a középső körgyűrűbe érkezik, akkor veszít 6 eurót, ha pedig a külső szektorba talál be, akkor nyer 3 eurót. A játékosok mindig eltalálják a táblát. Ha Dia nyila ugyanakkora valószínűséggel fúródik be a tábla minden egyes pontjába, akkor hány eurót kell fizetnie a részvételért ahhoz, hogy számára a játék igazságos legyen (azaz a nyeremény várható értéke egyenlő a részvételi díjjal)? (11 pont)

b) Ha a tábla szektorait a piros, kék, zöld, sárga és fehér színekkel jelölik meg, akkor hányféle olyan színezés lehetséges, ahol a szomszédos tartományok különböző színűek, és a táblán nem szerepel egyszerre a piros, fehér és zöld szín? (5 pont)

7. a) Egy trapéz párhuzamos oldalainak egyike 10, szárai 13 és 15, magassága 12 egység hosszú. Mekkora lehet a negyedik oldal? (12 pont)

b) Egy konvex érintőnégyyszög három oldalának hossza 10, 13 és 15 egység. Milyen hosszú lehet a negyedik oldal? (4 pont)

8. Andris a Vidámpark céllövöldéjében játszik. Egymás után vonulnak el előtte a célpontok, és mindegyiket egymástól függetlenül, azonos valószínűséggel találja el. (Mivel Andris jó lövő, ezért $p > 0,5$.)

a) Ha 4 lövésből 0,1536 valószínűséggel talál el 2 célpontot, akkor milyen eséllyel talál Andris egy lövése során? (5 pont)

b) Milyen valószínűséggel lő le Andris 4 lövésből legalább 1 célpontot? (4 pont)

c) A 4 lövésből várhatóan hány találata lesz Andrisnak? (2 pont)

d) Legalább hány lövést kell leadni Andrisnak, hogy legalább 99,99% biztonsággal legyen lövései között sikertelen? (5 pont)

9. a) Határozzuk meg az a valós paraméter értékét úgy, hogy az

$$f: \mathbb{R} \setminus \{4\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x-4}{a+1} - \frac{a-3}{x-4}$$

függvénynek legyen zérushelye.

(6 pont)

b) $a = 1$ esetén adjuk meg az f függvény lokális szélsőértékeit.

(10 pont)

Fonyóné Németh Ildikó, Fonyó Lajos

Keszthely

Megoldásvázlatok a 2025./3. szám matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket:

a) $9\sin^2 x + 4\sin x - 13 = 0$, (5 pont)

b) $9^{\sqrt{x+3}+1} + 4 \cdot 3^{\sqrt{x+3}} = 13$. (7 pont)

Megoldás. a) Az $y = \sin x$ helyettesítéssel a $9y^2 + 4y - 13 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek a megoldásai $y = 1$ és $y = -\frac{13}{9}$, azaz $\sin x = 1$ vagy $\sin x = -\frac{13}{9}$. Tudjuk, hogy $-1 \leq \sin x \leq 1$, ezért csak az első esetből kapunk megoldást.

Ha $\sin x = 1$, akkor $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

Az eredeti egyenletbe az általános alakot behelyettesítve látjuk, hogy ez végtelen sok, valóban helyes megoldás.

b) A négyzetgyök értelmezése miatt az $x \geq -3$ valós számok között keressük a megoldást.

Az egyenletet átalakítjuk, és felhasználjuk, hogy

$$\left(3^{\sqrt{x+3}}\right)^2 = 9^{\sqrt{x+3}}, \quad 9 \cdot \left(3^{\sqrt{x+3}}\right)^2 + 4 \cdot 3^{\sqrt{x+3}} - 13 = 0.$$

Az $y = 3^{\sqrt{x+3}}$ helyettesítéssel az a) feladatban már megoldott másodfokú egyenlethez jutunk, amelynek megoldásai alapján: $3^{\sqrt{x+3}} = 1$, vagy $3^{\sqrt{x+3}} = -\frac{13}{9}$.

Az első esetben $\sqrt{x+3} = 0$, azaz $x = -3$.

A második esetben nem kapunk megoldást, mert egy pozitív valós szám minden hatványa pozitív. Az $x = -3$ eleme az egyenlet értelmezési tartományának, továbbá a megoldás helyességét behelyettesítéssel ellenőrizzük.

2. A kishegyháti Toldy Ferenc Gimnázium 11.b osztályának heti 5 testnevelés óráját az alábbi elvek szerint kell elhelyezni az órarendben hétfőtől péntekig:

– egyik nap két óra, három további napon egy-egy óra legyen.

- a dupla óra a 6. és 7. órába kerüljön.
- valamelyik nap legyen egy első óra.
- a maradék két óra tetszőleges helyen lehet az elsőtől a hetedik óráig.

a) Hányféle különböző módon helyezhetők el az órák ilyen elvek szerint? (Nem vesszük figyelembe a többi tantárgyból adódó esetleges korlátozásokat.) (6 pont)

Nagy Barnabás tanár úr tanítja a történelmet. A következő hónapban az osztálynak összesen 8 történelem órája lesz, mindegyiken 1-1 tanuló fog felelni. Aki már felelt, biztonságban érezheti magát, ebben a hónapban ő már nem fog szóban felelni. Azok, akik még nem feleltek, a következő órán mind egyenlő valószínűséggel kerülnek sorra. A 30 fős osztályba 18 lány és 12 fiú jár.

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy ebben az időszakban 3 lány és 5 fiú fog felelni? (6 pont)

Megoldás. a) A dupla órát a hét bármelyik napjára tehetjük a 6-7. órába. Ez 5 lehetőség. Ezután kiválasztjuk azt a napot, amelyen nem lesz óra, ez 4 lehetőség. Most már tudjuk, hogy melyik 3 napon lesznek a szimpla órák. Ezeken a napokon $7 \cdot 7 \cdot 7$ -féleképpen választhatunk egy órát, ha további megkötésünk nem lenne. Ekkor azonban előfordulhat, hogy nem lesz egyik nap sem első óra. Ezeket az eseteket le kell vonnunk ebből az eredményből. Ha egyik napra sem választunk első órát, akkor $6 \cdot 6 \cdot 6$ lehetőségünk van. A szimpla órákat tehát a feltételek szerint $(7^3 - 6^3)$ -féleképpen tervezhetjük. A fenti választások alkalmával kapott esetszámokat összeszorozzuk, mert a választásaink nem befolyásolják a későbbi választási lehetőségek darabszámát, azaz először bárhogyan döntünk, a későbbiekben ugyanannyi féleképpen dönthetünk (vagyis a választások egymástól függetlenek). Ennek megfelelően az öt testnevelési órát $5 \cdot 4 \cdot (7^3 - 6^3) = 2540$ -féleképpen helyezhetjük el a kívánt módon az órarendben.

b) A 30 tanulóból a 8 felelőt $\binom{30}{8}$ -féle módon választhatjuk ki.

A 18 lányból hármat $\binom{18}{3}$ -féleképpen, a 12 fiúból az ötöt $\binom{12}{5}$ -féleképpen jelölhetünk ki.

Ezek a választások egymástól függetlenek, ezért a feladat feltételei szerint kedvező esetek száma: $\binom{18}{3} \cdot \binom{12}{5}$. A keresett valószínűség:

$$p = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}} = \frac{\binom{18}{3} \cdot \binom{12}{5}}{\binom{30}{8}} = \frac{816 \cdot 792}{5\,852\,925} \approx 0,11.$$

3. Egy háromszög oldalainak a hossza egy számtani sorozat három szomszédos tagja. A háromszög egyik szöge 120° , a területe 50 cm^2 .

a) Határozzuk meg a háromszög oldalainak a hosszát. (9 pont)

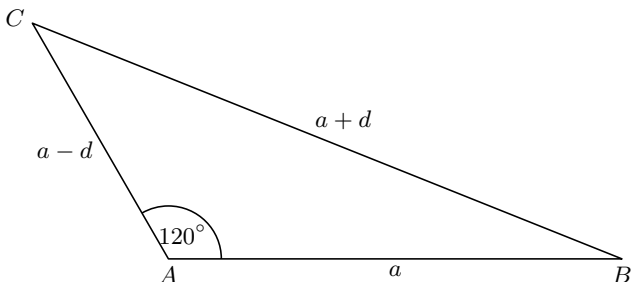
Egy középiskola 32 fős 12.a osztályában a próbaérettségi dolgozat két geometria-példája, a 3. és 7. feladat bizonyult a legnehezebbnek. Nyolcan nem tudták megoldani egyiket sem. A 3. feladatot 17-en, a 7. feladatot 12-en oldották meg.

b) Hányan oldották meg mindkét feladatot? (4 pont)

Megoldás.

a) A számtani sorozat középső tagja $a > 0$, differenciája pedig $d \geq 0$.

Az ábra szerint a 120° -os szöggel szemben van a legnagyobb oldal.



A koszinusztétel alapján:

$$(a + d)^2 = (a - d)^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot (a - d) \cdot \cos 120^\circ,$$

$$a^2 + 2ad + d^2 = a^2 - 2ad + d^2 + a^2 - 2 \cdot (a^2 - ad) \cdot (-0,5).$$

Az egyenletet rendezve kapjuk az $5ad = 2a^2$ összefüggést. Mivel $a \neq 0$, ezért osztunk $5a$ -val: $d = \frac{2}{5}a$. A háromszög oldalhosszai: $\frac{3}{5}a$; a ; $\frac{7}{5}a$.

Írjuk fel a háromszög területét két oldal és a közbezárt szög segítségével:

$$\frac{\frac{3}{5}a \cdot a \cdot \sin 120^\circ}{2} = 50.$$

Innen $a^2 = \frac{1000}{3 \cdot \sqrt{3}}$, $a \approx 13,9$ cm; $d \approx 5,55$ cm. Ebből $a - d \approx 8,35$ cm; $a + d \approx 19,45$ cm.

A háromszög oldalainak a hossza: 8,35 cm; 13,87 cm; 19,45 cm.

b) $32 - 8 = 24$ -en oldották meg legalább az egyik feladatot.

A 3. és 7. feladatot megoldók számát összeadva kétszer számoljuk azokat, akiknek mindkét feladata jó. Mivel $17 + 12 = 29$, ezért $29 - 24 = 5$ tanuló oldotta meg mindkét feladatot.

4. Egy négyszög csúcsainak a koordinátái: $A(-3; -1)$; $B(4; -3)$; $C(8; 4)$; $D(1; 6)$.

a) Igazoljuk, hogy az ABCD négyszög paralelogramma. (4 pont)

b) Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amely érinti mindkét koordinátatengelyt, középpontja az első síknegyedben van és átmegy a $(8; 1)$ ponton. (7 pont)

c) Fogalmazzuk meg az alábbi állítás megfordítását:

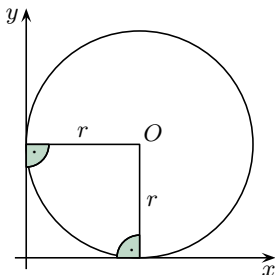
Ha két kör középpontjának távolsága egyenlő a két kör sugarának összegével, akkor a két kör érinti egymást.

Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az eredeti állítás, illetve a megfordítása. (3 pont)

Megoldás. $\overrightarrow{AB} = (4 - (-3); -3 - (-1)) = (7; -2)$; $\overrightarrow{DC} = (8 - 1; 4 - 6) = (7; -2)$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, azaz AB és DC párhuzamos és egyenlő hosszú szakaszok. Ezzel igazoltuk, hogy az $ABCD$ négyszög paralelogramma.

Ha az r sugarú kör középpontja az első síknegyedben van és érinti a tengelyeket, akkor a középpontjának koordinátái $O(r; r)$. Egy ilyen kör egyenlete: $(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2$.



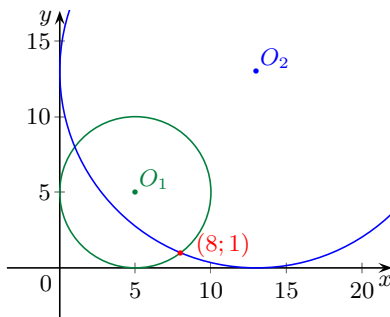
Ezen a körön rajta van a $(8; 1)$ pont, ezért

$$(8 - r)^2 + (1 - r)^2 = r^2.$$

Az egyenletet rendezve r -ben másodfokú egyenletet kapunk: $r^2 - 18r + 65 = 0$, amiből két megoldást kapunk: $r_1 = 5$ és $r_2 = 13$.

A két kör egyenlete:

$$k_1: (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25 \quad \text{és} \quad k_2: (x - 13)^2 + (y - 13)^2 = 169.$$



c) Az eredeti állítás igaz.

Az állítás megfordítása: Ha két kör érinti egymást, akkor a két kör középpontjának távolsága egyenlő a két kör sugarának összegével.

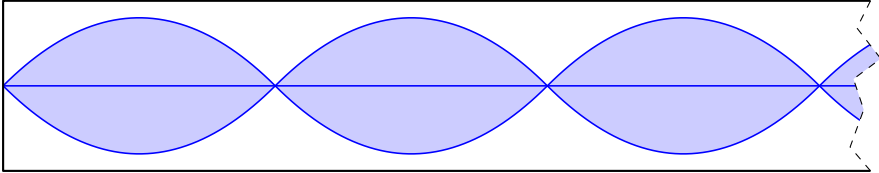
A megfordítás nem igaz. Ha az egyik kör belülről érinti a másikat, akkor a középpontok távolsága a sugarak különbségével egyenlő.

II. rész

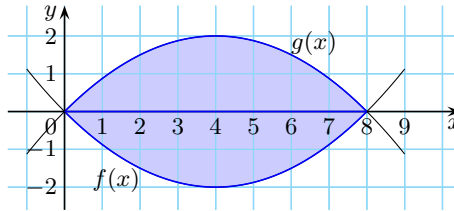
5. a) Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 8x} < 0. \quad (7 \text{ pont})$$

Egy 40 centiméter hosszú, 5 centiméter széles fehér szalagot az ábrán látható, kék minta ismétlésével díszítenek.



Az alakzat határoló vonalai az $f(x)$ és $g(x)$ másodfokú függvények grafikonjai. A koordinátatengely egységei a valóságban 1 cm-nek felelnek meg.



b) Adjuk meg az $f(x)$ függvény hozzárendelési szabályát. (4 pont)

c) A szalag területének hány százaléka kék színű? (5 pont)

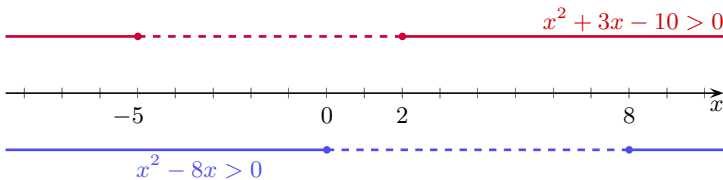
Megoldás. a) Először megállapítjuk a számláló és a nevező zérushelyeit:

$$x^2 + 3x - 10 = 0, \text{ ha } x = 2 \text{ vagy } x = -5.$$

$$x^2 - 8x = 0, \text{ ha } x = 0 \text{ vagy } x = 8.$$

A tört nevezőjében nem lehet 0, ezért a megoldást az $\mathbb{R} \setminus \{0; 8\}$ halmazon keressük.

Egy tört értéke akkor negatív, ha a számláló és a nevező ellenkező előjelű. Ha a másodfokú tag együttthatója pozitív, akkor a kifejezés a két zérushely között negatív, a többi értékre pozitív. Ezt az alábbi ábrán szemléltetjük:



A számláló és a nevező ellenkező előjelű, ha $-5 < x < 0$ vagy $2 < x < 8$, $x \in \mathbb{R}$.

Az egyenlőtlenség megoldása: $] -5; 0[\cup] 2; 8[$.

b) A grafikonról leolvasható, hogy az f függvény két zérushelye $x = 0$ és $x = 8$. Ezért $f(x) = a \cdot x \cdot (x - 8)$ gyöktényezős alakban keressük a megoldást. Az f függvény helyettesítési értéke az $x = 4$ helyen -2 , $f(4) = -2$. Ennek megfelelően adjuk meg az a valós szám értékét: $a \cdot 4 \cdot (4 - 8) = -2$; tehát $a = \frac{1}{8}$.

$$f(x) = \frac{1}{8} \cdot x(x - 8) = \frac{1}{8}x^2 - x.$$

c) A minta a szalagon ötször ismétlődik. A kék színű minta arányát megkapjuk, ha a szalag egy 8 centiméteres darabján számolunk, ennek területe $8 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 40 \text{ cm}^2$.

Határozzuk meg az f függvény és az x tengely által közrefogott terület nagyságát a megfelelő határozott integrál kiszámításával.

$$\int_0^8 \left(\frac{1}{8}x^2 - x \right) dx = \left[\frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^8 = \frac{1}{24} \cdot 8^3 - \frac{1}{2} \cdot 8^2 = -10 \frac{2}{3}.$$

A terület ennek az értéknek az abszolút értéke. A kék minta területe pedig ennek a kétszerese, $21 \frac{1}{3} \text{ cm}^2$, az ábra tengelyes szimmetriája miatt.

A szalag területének $\frac{21 \frac{1}{3}}{40} = \frac{8}{15} \approx 0,533$ része, azaz körülbelül 53%-a.

6. Egy hibás dobókocka a tapasztalatok szerint nem egyenlő eséllyel esik mind-egyik lapjára. Az 1-est 0,06 valószínűséggel, a 2, 3, 4, 5 számokat 0,18, a 6-ost 0,22 valószínűséggel dobjuk ezzel a kockával.

a) Mennyi a dobott szám várható értéke, ha ezzel a kockával dobunk? (2 pont)

Az asztalon van három dobókocka, két szabályos és a fenti tulajdonságú. A kockák külsőre nem különböztethetők meg egymástól. Találomra, vagyis bármelyiket egyenlő valószínűséggel választva kivesszünk egyet közülük, és egyszer dobunk a kiválasztott kockával.

b) Mennyi a valószínűsége, hogy hatost dobunk? (3 pont)

c) Ha hatost dobtunk, mennyi a valószínűsége annak, hogy ezt a nem szabályos kockával dobtuk? (5 pont)

Ügyes Gábor nyert a LOTTÓ-n 2 000 000 forintot. 2025. január 1-én betette a nyereményét a Bravó Bankba. Azzal számol, hogy az éves kamatláb a következő 3 évben 5% lesz.

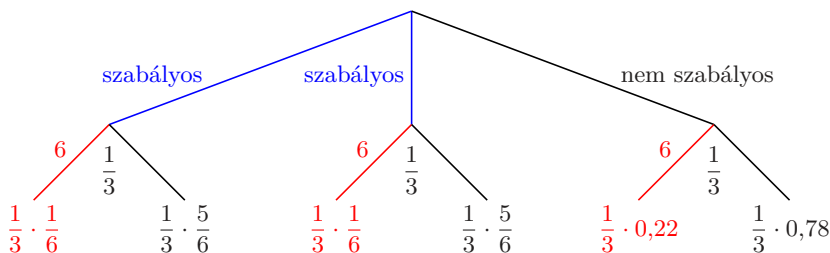
d) Gábor a befizetett pénzt és kamatait három egyenlő részletben, 2025, 2026, 2027 év végén szeretné felvenni. Mekkora részletekben gondolkozhat, ha a banki kamatláb elképzelése szerint alakul ezekben az években? A választ 1000 forintra kerekítve adjuk meg. (6 pont)

Megoldás. a) Mivel $0,06 + 4 \cdot 0,18 + 0,22 = 1$, ezért valóban valószínűségi eloszlásról van szó. A dobás várható értéke:

$$E = 1 \cdot 0,06 + 2 \cdot 0,18 + 3 \cdot 0,18 + 4 \cdot 0,18 + 5 \cdot 0,18 + 6 \cdot 0,22 = 3,9.$$

b) A dobókockákat $\frac{1}{3}$ - $\frac{1}{3}$ valószínűséggel választjuk dobásra. Két kocka esetében $\frac{1}{6}$ valószínűséggel dobunk hatost, a nem szabályos dobókockával pedig 0,22 valószínűséggel.

Az alábbi gráf szemléletesen mutatja, hogy mely értékeket használtuk a teljes valószínűség tételének felírásához.



A hatos dobásának valószínűsége a teljes valószínűség tétele alapján:

$$P = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot 0,22 = \frac{83}{450} \approx 0,184.$$

c) Feltételes valószínűséget fogunk meghatározni. Az a kérdés, hogy mennyi a nem szabályos kockával való dobás valószínűsége, feltéve, hogy hatost dobtunk.

A Bayes-tételt alkalmazzuk, amelynek felírásához is használhatjuk a fenti gráfot.

$$P(\text{nem szabályos kockával dobtunk} \mid \text{hatost dobtunk}) = \frac{0,22 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot 0,22} = \frac{33}{83} \approx 0,398.$$

d) Jelöljük x -szel az évente felvett összeget. 2025 végén a bankban lévő pénz értéke $2\,000\,000 \cdot 1,05 - x$, mert a pénz kamatozott, és Gábor kivett x forintot.

2026-ban ez az összeg kamatozik, így év végén $(2\,000\,000 \cdot 1,05 - x) \cdot 1,05 - x$ forint lesz a számlán.

Hasonlóan 2027 végén: $((2\,000\,000 \cdot 1,05 - x) \cdot 1,05 - x) \cdot 1,05 - x$.

Ekkor elfogyott a pénz:

$$\begin{aligned} ((2\,000\,000 \cdot 1,05 - x) \cdot 1,05 - x) \cdot 1,05 - x &= 0, \\ 2\,000\,000 \cdot 1,05^3 &= x \cdot (1,05^2 + 1,05 + 1). \\ x &= \frac{2\,000\,000 \cdot 1,05^3}{1,05^2 + 1,05 + 1} = \frac{2\,315\,250}{3,1525} \approx 734\,000. \end{aligned}$$

Gábor 734 000 forint körüli összeggel tervezhet évente.

7. a) Oldjuk meg a valós számpárok halmazán az alábbi egyenletrendszert:

$$xy = 16, \quad \log_x y + 6 \cdot \log_y x = 5. \quad (10 \text{ pont})$$

b) Határozzuk meg az alábbi szám utolsó számjegyét:

$$2021^{2022} + 2022^{2023} + 2023^{2024}. \quad (6 \text{ pont})$$

Megoldás. a) A logaritmus értelmezése miatt: $x > 0$; $x \neq 1$; $y > 0$; $y \neq 1$.

A második egyenletben felhasználjuk, hogy $\log_y x = \frac{1}{\log_x y}$.

Vezessük be a $z = \log_x y$ ismeretlent. Ekkor a második egyenlet $z + \frac{6}{z} = 5$ alakú lesz. Az egyenletet rendezve a $z^2 - 5z + 6 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek a gyökei $z_1 = 2$, $z_2 = 3$. Ha $z_1 = 2$, akkor $\log_x y = 2$, a logaritmus definíciója miatt $y = x^2$. Használjuk fel az első egyenletet: $x^3 = 16 \Rightarrow x_1 = \sqrt[3]{16} = 2^{\frac{4}{3}} \approx 2,52$; $y_1 = 2^{\frac{8}{3}} \approx 6,35$. Ha $z_2 = 3$, akkor $\log_x y = 3$, a logaritmus definíciója miatt $y = x^3$. Az első egyenletből, $x > 0$ feltétellel: $x^4 = 16 \Rightarrow x_2 = 2$; $y_2 = 8$.

A kapott számpárokat ellenőrizve látjuk, hogy valóban megoldások.

b) Egy hatvány utolsó számjegyét az utolsó számjegyének hatványa határozza meg. A 2021^{2022} minden hatványa 1-re végződik. A 2 hatványainak végződése periodikusan ismétlődik: 2, 4, 8, 6 számokkal. A 2023 négyvel osztva 3 maradékot ad, ezért 2022^{2023} végződése 8. A 2023 hatványai is periodikusan ismétlődnek: 3, 9, 7, 1 periódussal. A 2024 osztható 4-gyel, ezért 2023^{2024} végződése 1. Ekkor $1 + 8 + 1 = 10$, ezért $2021^{2022} + 2022^{2023} + 2023^{2024}$ 0-ra végződik.

8. Adott a valós számok halmazán értelmezett f függvény:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3 - 6x^2 + 9x.$$

a) Adjuk meg az f függvény zérushelyeit. (3 pont)

b) Írjuk fel az érintő egyenletét az $x = 2$ abszcisszájú pontban. (5 pont)

A $[0; 4]$ intervallumon értelmezett g valós értékű függvényt az alábbi hozzárendelési szabállyal adjuk meg:

$$x \mapsto 0,5^{x^3 - 6x^2 + 9x}.$$

c) Határozzuk meg a g függvény maximumának helyét és értékét. (8 pont)

Megoldás. a) Az $x^3 - 6x^2 + 9x = 0$ egyenlet megoldásait keressük.

$$x^3 - 6x^2 + 9x = x \cdot (x^2 - 6x + 9).$$

Egy szorzat akkor lehet 0, ha valamelyik tényezője 0.

Eszerint $x = 0$ vagy $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 = 0$. Ez utóbbi egyenlet egyetlen megoldása $x = 3$. Az f függvény zérushelyei: $x = 0$ és $x = 3$.

b) A függvény érintőjének meredekségét a függvény deriváltjának az adott helyen vett helyettesítési értéke adja: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$,

$$f'(2) = -3, \text{ valamint } f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 = 2.$$

Az $m = -3$ meredeksű, az $E(2,2)$ ponton átmenő érintő egyenlete:

$$y = -3 \cdot (x - 2) + 2 = -3x + 8.$$

c) A $0,5$ alapú exponenciális függvény szigorúan monoton csökken, ezért arra az értékre veszi fel a maximumát, amelyre a kitevő a legkisebb.

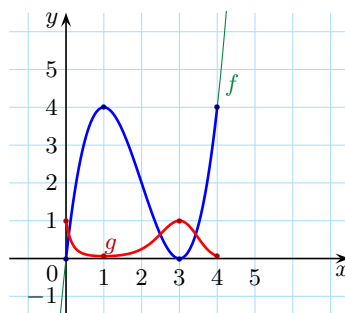
Határozzuk meg a kitevő, azaz az f függvény minimumát a $[0;4]$ intervallumon. A függvénynek ott lehet minimuma, ahol a deriváltja 0 és a derivált előjele abban a pontban negatívból pozitívba vált. A függvénynek lehet minimuma a zárt intervallum két végpontjában is.

Az $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0$ egyenlet megoldásai $x = 1$ és $x = 3$.

Az $x = 1$ helyen a másodfokú függvény pozitívból negatívba vált, az $x = 3$ helyen pedig a derivált negatívból pozitívba vált. Így az f függvény a $[0;1]$ intervallumon szigorúan monoton nő, az $[1;3]$ intervallumon szigorúan monoton csökken, a $[3;4]$ intervallumon szigorúan monoton nő (így az $x = 4$ helyen nincs minimum).

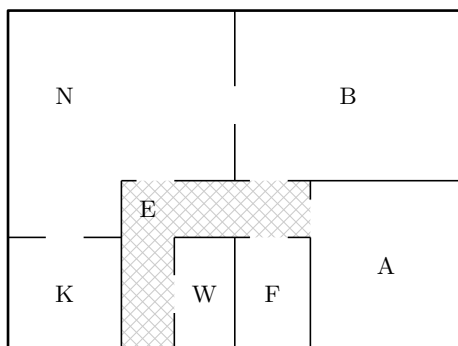
Minimuma az $x = 0$ és $x = 3$ helyen lehet. $f(0) = 0$ és $f(3) = 0$, tehát a kitevő minimuma 0 , és ezt két helyen veszi fel.

A g függvény maximuma tehát $0,5^0 = 1$, és ezt az értéket az $x = 0$ és $x = 3$ helyettesítési értékek esetén veszi fel.



Megjegyzés. Az f és a g függvény kapcsolata ezen az ábrán látható:

9. Egy ingatlanközvetítő iroda egy 3 szobás lakást hirdet. A lakás alaprajzát mutatja az ábra:

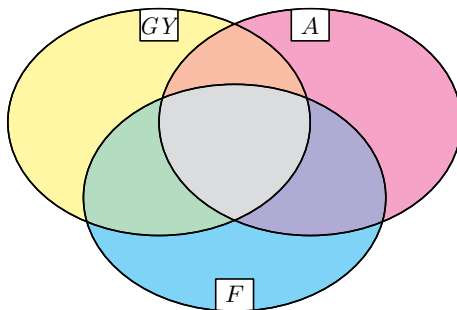


E – előszoba és közlekedő
K – konyha
N – nappali
A – szoba
B – szoba
F – fürdő
W – WC

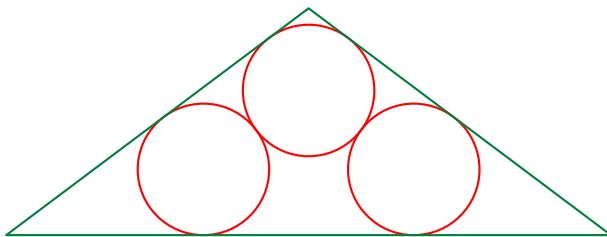
a) Rajzoljuk meg azt a gráfot, amelynek a pontjai a lakás helyiségeit ábrázolják: E, K, N, A, B, F, W , és két pont között akkor vezet él, ha a két helyiséget ajtó köti össze. (2 pont)

Az iroda egy új alkalmazottat szeretne felvenni. A jelentkezők esetében három szempontra különösen figyelnek: rendelkezik-e legalább 5 éves gyakorlattal hasonló munkakörben (GY), van-e angol nyelvvizsgálója (A), van-e felsőfokú végzettsége (F). A jelentkezők közül a kívánt gyakorlattal 16-an rendelkeznek, angol nyelvvizsgálója van 25 pályázónak, felsőfokú végzettsége 18 embernek van. A gyakorlattal rendelkezők közül nyolcan angol nyelvvizsgálóval is rendelkeznek. Hét jelentkezőnek van gyakorlata és felsőfokú végzettsége is. A felsőfokú végzettségűek közül tizenkettőnek van angol nyelvvizsgálója. Mindhárom szempontnak öten felelnek meg. Nem jelentkezett az állásra olyan ember, aki egyik feltételnek sem felel meg.

- b) A fenti adatok alapján írjuk be az egyszínű részhalmazokba, hány elemük van.
(5 pont)

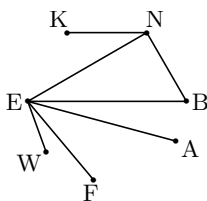


- c) A cég logója egy háromszög, benne 3 egyenlő sugarú kör, amelyek az ábra szerint érintik az oldalakat, illetve egymást.

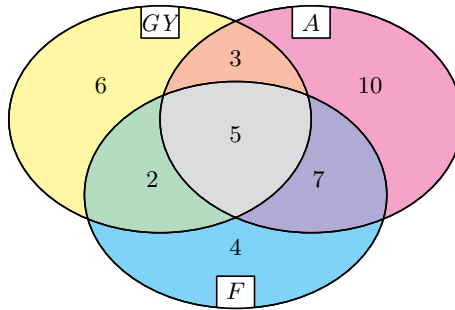


A háromszög oldalai 8 cm, 5 cm, 5 cm hosszúak. Határozzuk meg a körök sugarát.
(9 pont)

Megoldás. a)



b) A halmazábra kitöltésének célszerű sorrendje:



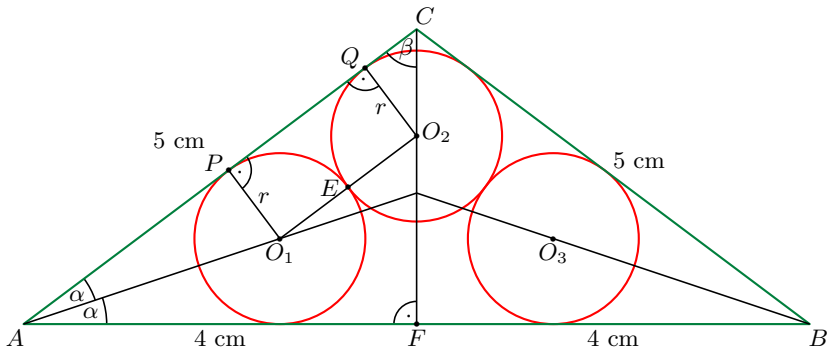
$$|GY \cap A \cap F| = 5,$$

$$|(GY \cap A) \setminus F| = 8 - 5 = 3, |(GY \cap F) \setminus A| = 7 - 5 = 2, |(A \cap F) \setminus GY| = 12 - 5 = 7,$$

$$|(GY \setminus A) \setminus F| = 16 - 3 - 5 - 2 = 6, |(A \setminus GY) \setminus F| = 25 - 3 - 5 - 7 = 10,$$

$$|(F \setminus GY) \setminus A| = 18 - 2 - 5 - 7 = 4.$$

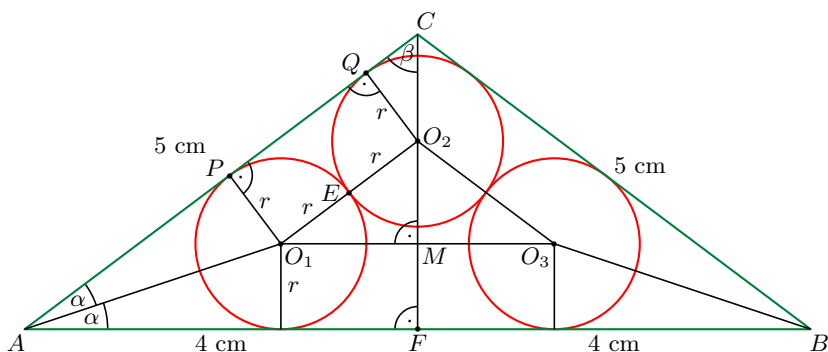
c) Az ábra elkészítésénél felhasználjuk, hogy a körök középpontjai a háromszög szögfelezőin vannak. Használjuk az ábra jelöléseit! Az ábra szimmetrikus a CF magasságvonalra. Az érintkező körök középpontjai és az érintési pont egy egyenesen vannak. Az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre. A háromszög alapon fekvő szöge 2α , a csúcsszög 2β . A keresett körök sugara r .



Az AFC derékszögű háromszögben: $\cos(2\alpha) = \frac{4}{5}$, amiből $2\alpha = 36,87^\circ$, ezért $\alpha = 18,43^\circ$. Ekkor $\beta = 90^\circ - 2\alpha = 53,13^\circ$. Az AO_1P derékszögű háromszögben $AP = r \cdot \operatorname{ctg} \alpha$; a CO_2Q derékszögű háromszögben $QC = r \cdot \operatorname{ctg} \beta$, és az O_1O_2QP téglalapban $PQ = O_1O_2 = 2r$:

$$AC = 5 = AP + PQ + QC = r \cdot (\operatorname{ctg} \alpha + 2 + \operatorname{ctg} \beta) = 5,7509 \cdot r.$$

Innen $r = 0,87$. A körök sugara tehát $0,87$ cm.



2. megoldás a c) feladatra.

Az ábra elkészítésénél az 1. megoldásban leírt elveket használtuk.

Az AFC derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele alapján $CF = 3$ cm.

Az $O_1MO_2\Delta \sim AFC\Delta$, mert oldalai párhuzamosak, tehát szögeik egyenlők. Hasonló háromszögekben a megfelelő oldalak aránya megegyezik:

$$\frac{MO_2}{3} = \frac{2r}{5} \Rightarrow MO_2 = \frac{6}{5}r.$$

Az $O_2QC\Delta \sim AFC\Delta$, mert mindkettő derékszögű és egyik hegyesszögük β , tehát a szögeik egyenlők. Az oldalak arányát felírva:

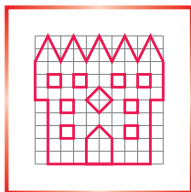
$$\frac{O_2C}{5} = \frac{r}{4} \Rightarrow O_2C = \frac{5}{4}r.$$

A CF szakaszt ezekkel az adatokkal kifejezve:

$$CF = FM + MO_2 + O_2C; \quad 3 = r + \frac{6}{5}r + \frac{5}{4}r = \frac{69}{20}r.$$

$r = \frac{60}{69} = \frac{20}{23} \approx 0,87$ cm. A körök sugara tehát 0,87 cm.

Horváth Eszter



A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (854–888.)

K. 854. János bácsi a következőket mondja magáról: „amikor születtem, édesanyám már elmúlt 20 éves. Ha az ő akkori életkorának mindkét számjegyéhez 1-et adunk és a kapott szám jegyeit fölcseréljük, akkor édesanyám mostani életkorát kapjuk. Édesanyám jó egészségnak örvend, és még nincs 90 éves. Én 56 éves vagyok.”

Hány éves volt János bácsi édesanyja János bácsi születésekor?

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

K. 855. Három hajó egyszerre indult el egy kikötőből. Az egyik hajó északi, míg a másik kettő délkeleti irányba haladt, és mindhárom hajó pontosan egyszerre futott be a megfelelő kikötőbe. Ekkor az addig párban haladó két hajó szétvált, az egyik továbbment délkeleti irányba, a másik pedig az első megállójában veszteglő harmadik felé indult, és ez alkalommal is egyszerre kötöttek ki. Az északi irányhoz képest mekkora szögben kellett ezután a két azonos helyen lévő hajónak elindulnia, hogy nyílegyenesen abba a kikötőbe érkezzen, ahol az előzőleg végig délkelet felé haladó hajó várakozott? (Minden szakaszon minden hajónak ugyanakkora volt az átlagsebessége.)

Javasolta: *Kozma Katalin Abigél* (Győr)

K. 856. Van egy zsákunk, amelyben piros, kék és zöld golyók vannak, összesen 25 darab. A zsákhoz mellékelve van egy papír, amelyen az alábbi állítások olvashatóak:

- A zsákban több kék golyó van, mint piros.
- A piros és kék golyók számának összege 22.
- A piros és kék golyók számának különbsége kisebb, mint a zöld golyók száma.
- Több kék golyó van, mint piros és zöld golyó együtt.
- Van két szín, melyekből ugyanannyi golyó van a zsákban.

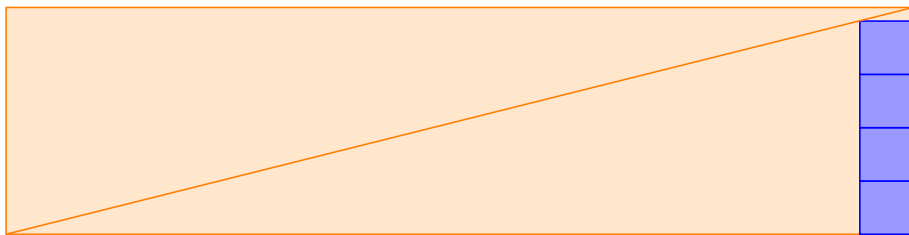
Tudjuk, hogy ezen öt állítás közül pontosan egy hamis. Melyik színből hány golyó lehet?

Javasolta: *Czett Mátyás* (Budapest)

K/C. 857. Milyen x, y valós számokra áll fenn az $x^2 + y^2 \geq (x+1)(y-1)$ egyenlőtlenség? Mely valós számokra teljesül az egyenlőség?

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

K/C. 858. Egy 4×1 -es téglalapba négy darab kis kék négyzetet rajzoltunk az alábbi ábra szerint.



Hányadrésze egy kis kék négyzet területe a 4×1 -es téglalap területének?

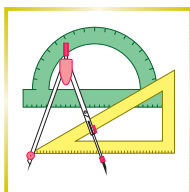
Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)



Beküldési határidő: 2025. május 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>





A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (857–858., 1853–1857.)

Feladatok 10. évfolyamig

K/C. 857. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

K/C. 858. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

Feladatok mindenkinek

C. 1853. Néhány kutató egy virágos homokgyepen zümmögő poszméhek ötvenfős csapatát figyeli. Izgatottan állapítják meg, hogy a poszméhek mindegyike pontosan négyféle virágról gyűjtött virágport, mielőtt továbbrepült volna. Sőt, még azt is feljegyezték, hogy mindegyik poszméh különböző négyest választott, de mind az 50 poszméh meglátogatott egy buglyos fátvirágot. Bizonyítsuk be, hogy összesen legalább 9-féle virágról gyűjtöttek a poszméhek.

javasolta: *Paulovics Zoltán* (Budapest)

C. 1854. A k_1 és a k_2 kör az A és B pontban metszi egymást úgy, hogy a k_2 kör áthalad a k_1 kör K középpontján. Válasszuk ki a k_2 körvonalnak egy S pontját úgy, hogy S közelebb legyen A -hoz, mint B -hez és ne essen a k_1 belsejébe. A BS egyenes és k_1 második metszéspontja legyen D , az AD egyenes a k_2 kört másodszor a T pontban metszi. Igazoljuk, hogy KT merőleges BS -re.

görög versenyfeladat

C. 1855. Egy 19 drónból álló csapat repül egy gyakorlótér felett, a biztonsági előírásoknak megfelelően olyan rögzített alakzatban, ahol bármely két gépnek különböző a távolsága. Egy hackertámadás következtében a drónok egymásra nyitnak tüzet: mindegyik drón lö egyet a hozzá legközelebbi drónra, és ezzel megsemmisíti azt. (Feltételezzük, hogy minden drón tudott lőni, a drónok pontszerűnek tekinthetők, továbbá hogy a drónok csak azután semmisülnek meg, miután minden golyó becsapódott.)

Van-e köztük túlélő drón?

Egy drónt legfeljebb hány azonos (öt is tartalmazó) síkból származó lövedék találhatott el?

javasolta: *Paulovics Zoltán* (Budapest)

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1856. Bizonyítsuk be, hogy minden háromszögben (az oldalakat és a megfelelő szögeket a szokásos módon jelölve)

$$a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma \geq \frac{a+b+c}{3} (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma).$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

Javasolta: *Holló Gábor* (Budapest)

C. 1857. Határozzuk meg az összes olyan p , q , r pozitív prímszámokból álló számhármast, amelyek megoldásai a $p+q=r+1$; $p \cdot r = q^2 + 6$ egyenletrendszernek.

német versenyfeladat

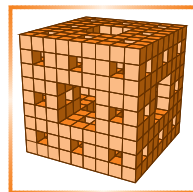


Beküldési határidő: 2025. május 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5454–5461.)



B. 5454. Az $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2024}, a_{2025}$ pozitív egészeket úgy választottuk ki, hogy az $\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \frac{a_3}{a_4}, \dots, \frac{a_{2024}}{a_{2025}}$ törtek páronként különböző értékek legyenek. Legalább hány különböző van a kiválasztott számok között?

(4 pont)

Javasolta: *Sztranyák Attila* (Budapest)

B. 5455. Az $ABCD$ konvex négyszög AB és CD oldalegyenesének metszéspontja P , az átlók felezőpontja M és N . Mutassuk meg, hogy a PMN háromszög területe negyede az $ABCD$ négyszög területének.

(4 pont)

Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

B. 5456. Az $a^{\log_b c}$, $b^{\log_c a}$, $c^{\log_a b}$ számok közül melyik lehet a legkisebb, illetve a legnagyobb, ha $1 < a < b < c$?

(3 pont)

Javasolta: *Hujter Bálint* (Budapest)

B. 5457. Egy háromszög szögei $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, és a leghosszabb oldal egységnyi. Bizonyítandó, hogy a háromszög akkor és csak akkor tompaszögű, ha a területének reciproka több, mint $2(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)$.

(4 pont)

Javasolta: *Hujter Mihály* (Budapest)

B. 5458. Az ABC háromszög beírt körének középpontja I , és $AB < AC$. Az AI -re I -ben állított merőleges a BC egyenest P -ben, az AP szakasz az ABC háromszög köré írt kört másodszor Q -ban metszi. Mutassuk meg, hogy IQ merőleges AP -re.
(5 pont) Javasolta: Kós Géza (Budapest)

B. 5459. Határozzuk meg azokat az $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ függvényeket, amelyekre bármely racionális x, y számok esetén teljesül, hogy

$$f(x) + f(y) = \frac{f(x+2y) + f(2x-y)}{5}.$$

(5 pont) Javasolta: Füredi Erik (Budapest)

B. 5460. Az ABC hegyesszögű háromszögben jelölje D, E, F rendre az A, B, C csúcsokhoz tartozó magasságvonalak talppontjait. A DE egyenes messe az A, B, C pontok köré írt kört a G, H pontokban. Hasonlóan, a DF egyenes messe az A, B, C pontok köré írt kört az I, J pontokban. Bizonyítsuk be, hogy az E, I, J és F, G, H pontok köré írt körök hatványvonala átmegy az ABC háromszög magasságpontján.

(6 pont) Javasolta: Csaplár Viktor (Bátorkeszi) ötletéből

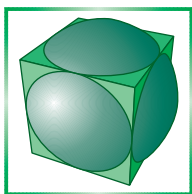
B. 5461. Bizonyítsuk be, hogy bármely a, b, c és d pozitív egészekhez végtelen sok olyan pozitív egész n létezik, amelyre $a^n + bc$ és $b^{n+d} - 1$ nem relatív prímek.

(6 pont) Javasolta: Kós Géza (Budapest) IMO2024/2 alapján



Beküldési határidő: 2025. május 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (905–907.)

A. 905. Nevezzünk egy $n_1, n_2, \dots$ pozitív egész számokból álló sorozatot *nem lassulónak*, ha szigorúan monoton nő és $n_{k+1} - n_k \leq n_{k+2} - n_{k+1}$ teljesül minden pozitív egész k -ra. Nevezzünk továbbá egy $n_1, n_2, \dots$ pozitív egész számokból álló sorozatot *konvergencia-biztosítónak*, ha szigorúan monoton nő, és a következő feltétel teljesül: ha $a_1, a_2, \dots$ olyan valós számokból álló sorozat, amelyre minden m pozitív egész szám esetén az $a_{m+n_1}, a_{m+n_2}, a_{m+n_3}, \dots$ részsorozat konvergens és 0-hoz tart, akkor az $a_1, a_2, \dots$ sorozat is konvergens és 0-hoz tart.

Bizonyítsuk be, hogy egy $n_1, n_2, \dots$ nem lassuló sorozat akkor és csak akkor konvergencia biztosító, ha az $n_2 - n_1, n_3 - n_2, \dots$ sorozat felülről korlátos.

Javasolta: Imolay András (Budapest)

A. 906. Nevezük $\mathcal{V}_c$ -nek azt a végtelen párhuzamos vonalzót, amelynek párhuzamos élének távolsága c . Egy $\mathcal{V}_c$ vonalzóval az alábbi szerkesztési lépések végezhetőek el:

- két különböző ponton átmenő egyenes megszerkesztése;
- adott l egyenesre olyan l' -el párhuzamos l' egyenes megszerkesztése, amelyre l és l' távolsága c (két ilyen egyenes létezik minden l -re, és mindkét egyenes megszerkeszthető ezzel a lépéssel);
- adott A, B pontokra, ha $|AB| \geq c$, akkor két olyan párhuzamos egyenes megszerkesztése, melyek közül az egyik átmegy A -n, a másik B -n, és az egyenesek távolsága c (itt is két lehetséges megoldás van amennyiben $|AB| > c$, és ezzel a lépéssel mindkettő megszerkeszthető).

Egy kör alakú lap határán adott három pont, melyek egy nem egyenlő szárú háromszöget határoznak meg. Legyen n egy pozitív egész szám. Bizonyítsuk be, hogy a három felvett pont és az n szám függvényében létezik olyan $C > 0$ szám, amelyre bármely $0 < c \leq C$ -re meg lehet szerkeszteni n darab olyan pontot csak egy $\mathcal{V}_c$ használatával, amely rajta fekszik a háromszögnek valamelyik hozzáírt körén.

A lapon kívül nem tudunk szerkeszteni. A lap határán lehet szerkeszteni, fel lehet venni egy egyenes és a lap határának a metszéspontját.

Javaolta: Bán-Szabó Áron (Budapest)

A. 907. Adott 2025 lámpa és néhány kapcsoló. Minden kapcsolóhoz hozzá van rendelve a lámpák egy részhalmaza. Ha használunk egy kapcsolót, akkor az összes lámpa a hozzá tartozó részhalmazban állapotot vált, azaz ami eddig fel volt kapcsolva az lekapcsolódik, ami pedig le volt kapcsolva az felkapcsolódik. Kezdetben minden lámpa le volt kapcsolva. Tudjuk, hogy minden lámpához van olyan kapcsoló, amelyhez a lámpa hozzá van rendelve.

Határozzuk meg azt a legnagyobb k számot, amelyre akárhogyan is működnek a kapcsolók, mindenképpen fel lehet kapcsolni egyszerre legalább k darab lámpát.

OKTV feladat alapján



Beküldési határidő: 2025. május 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



Informatikából kitűzött feladatok (659–662.)



I. 659. Egy téglalap alakú asztalon robotjárművek mozognak úgy, hogy időegységenként egységnyi távolságot tesznek meg. Minden járművet úgy indítunk el,

hogy az asztal valamelyik szélével párhuzamosan mozogjon. A járművek szenzora érzékeli az asztal szélét, így ott a mozgás iránya az ellenkezőjére vált. Előfordulhat, hogy egy idő után két jármű összeütközne, de ilyenkor a szenzor érzékelése alapján a két jármű megáll.

Készítsünk programot **i659** néven, amely megadja, hogy T időegység alatt mikor áll meg először két robotjármű.

A program standard bemenetének első sorában az asztal oldalainak hossza ($1 \leq N, M \leq 100$), a robotjárművek száma ($1 \leq DB \leq 10$) és a vizsgált időtartam ($1 \leq T \leq 1000$) található. A következő DB sor egy-egy jármű indulási helyét ($1 \leq X_i \leq N, 1 \leq Y_i \leq M$) és mozgásának irányát tartalmazza (F, L, J, B – fel, le, jobbra, balra, ahol fel és le az egyik oldallal párhuzamos, míg a jobbra és balra az ezekre merőleges irányú mozgásirányt jelenti).

A programmal a standard kimenetre írjuk ki, hogy az ütközés elkerülése miatt mikor áll meg az első két robotjármű. Ha T időegység alatt nincs ilyen esemény, akkor -1 -et írunk ki.

Példa:

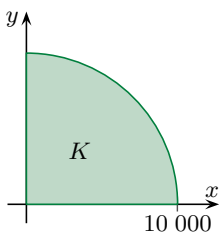
Bemenet (a / jel sortörést helyettesít)	Kimenet
6 8 4 10 2 1 L / 2 5 J / 3 1 J / 6 7 F	4

Magyarázat: a robotok kezdeti helyzete és iránya látható az alábbi ábrán. Négy időegység után a 2. sor 7. cellájában ütközne két robot.

↓				→			
→							
						↑	

Beküldendő egy tömörített **i659.zip** állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

(10 pont)



I. 660. Nevezzük K -nak az origó középpontú, 10 000 egység sugarú kör lap I. síknegyedbe eső részét. Matematikai formalizmussal: az $x \geq 0$ és $y \geq 0$ és $x^2 + y^2 \leq 10\,000^2$ feltételekkel adott ponthalmaz.

Feladataink:

- Nyissunk meg egy üres táblázatkezelő munkafüzetet, nevezzük át a munkalapot *negyedkor* névre, a munkafüzetet mentjük *pontok* néven. Segédszámításokat csak ezen a munkalapon végezzünk a 9. sor alatt.

2. Hozzunk létre egy üres munkalapot *segedatok* néven. Illesszük be az **A1** cellától az UTF-8 kódolású, tabulátorokkal tagolt *segedatok.txt* fájl tartalmát és formázzuk meg a minták szerint:

	A	B	C	D
1	egészek	négyzet-számok	köb-számok	prímek
2	1	1	1	2
3	2	4	8	3
4	3	9	27	5

19	18	324	5832	61
20	19	361	6859	67
21	20	400	8000	71
22	21	441	9261	73
23	22	484		79
24	23	529		83

98	97	9409		509
99	98	9604		521
100	99	9801		523
101	100			541
102	101			547
103	102			557

1228	1227			9949
1229	1228			9967
1230	1229			9973
1231	1230			
1232	1231			
1233	1232			

Számítsuk ki a választ a következő kérdésekre és jelenítsük meg az eredményt a zárójelben jelölt cellában:

3. Hány rácspont (vagyis olyan pont, amelynek mindkét koordinátája egész szám) van K belsejében? (**A1**)
4. Hány olyan rácspont van K belsejében, amelyiknek mindkét koordinátája négyzetszám? (**A2**)
5. Hány olyan rácspont van K belsejében, amelyiknek mindkét koordinátája köbszám? (**A3**)
6. Hány olyan rácspont van K belsejében, amelyiknek mindkét koordinátája prímszám? (**A4**)
7. Hány olyan rácspont van K belsejében, amelyiknek x koordinátája prímszám, y koordinátája négyzetszám? (**A5**)
8. Melyik az a legkisebb, egész értékű r sugár, amely esetén a K -hoz hasonlóan elhelyezkedő r sugarú k negyedkör belsejében a fenti első négy feltételnek eleget tevő pontokból mind a négy feltétel esetén legalább 100-100 pont van? (**A6**)

Segédszámításokat a negyedkor munkalapon a 9. sor alatt lehet végezni. A megoldásban saját függvény vagy makró nem használható.

Beküldendő az *i660.zip* tömörtett állományban a munkafüzet és egy rövid dokumentáció, amelyben szerepel a számítások magyarázata, a táblázatkezelő neve és verziószáma.

Letölthető fájl: *segedatok.txt*

(10 pont)

I. 661. A szeptemberi számban megjelent **I. 633.** feladat és a novemberi számban megjelent **I. 641.** feladat harmadik része következik. Most ötféle speciális prímet keresünk az első százezer prímszám között, ezek a kiegyensúlyozott prímek, a prímnégyesek, a biztonságos prímek, a szuper prímek és az unokatestvér prímek. Nézzük is ezek definíciót:

Kiegyensúlyozott prímmek nevezzük azt a p prímszámot, amely azonos távolságra van a két szomszédos prímtől. Például a 3637 ilyen prím, a két szomszédos prímszám: 3761 és 3641.

Prímnégyesnek nevezzük a p , $p + 2$, $p + 6$, $p + 8$ számnégycet, ha mind a négy szám prím. Például: a (9431;9433;9437;9439) ilyen számnégyes, hiszen a 9431, a 9433, a 9437 a 9439 szám is prímszám.

Biztonságos prímmek azt a p prímet nevezzük, amelynél $\frac{p-1}{2}$ is prím. Például: az 1319 ilyen prím, hiszen az eggyel kisebb 1318 fele 659, amely szintén prímszám.

Szuperprímek azok a prímek, amelyeknek a prímszámok sorozatában vett indexe is prímszám. Például: a 67, amely a 19. prímszám vagy az 547, amely a 101. prímszám, és – persze – a 19 és a 101 is prím.

Unokatestvér prímeknek az olyan prímszám-párokat nevezzük, amelyek különbsége 4. Tehát p és $p + 4$ is prím. Például unokatestvér prímek a 757 és 761 vagy a 175 753 és a 175 757 prímszámok.

1. Egy üres táblázatkezelő munkafüzetben nevezzük át a munkalapot *prímek* névre, a munkafüzetet mentsük **prim_3-resz** néven.
2. Illesszük be az **A3** cellától az első 100 000 prím listáját a **100000prim.txt** fájlból. Az első két sorba oszlopfeliratok kerülhetnek a számításokhoz.
3. Válogassuk ki az öt prímcsoport első 100 000 prím közé eső tagjait. A számításokat ezen a munkalapon végezzük.
4. Hozzunk létre egy *eredmények* nevű munkalapot, amelynek **A** oszlopát töltsük fel számokkal 1-től addig, amennyi a speciális prímszámok darabszámának maximuma. A következő oszlopokban határozzuk meg:
 - (a) A **B** oszlopban a kiegyensúlyozott prímekeket növekvő sorrendben, helykihagyás nélkül. A **C** oszlopban az adott kiegyensúlyozott prím távolságát a szomszédaitól.
 - (b) A **D:G** oszlopban a prímnégyeseket, a **D** oszlopba kerülők növekvő sorrendjében, helykihagyás nélkül.
 - (c) A **H** és **I** oszlopban a biztonságos prímekeket és a kisebb párjukat növekvő sorrendben, helykihagyás nélkül.
 - (d) A **J** oszlopban a talált szuperprímeket növekvő sorrendben, helykihagyás nélkül.
 - (e) A **K:L** oszlopba pedig az unokatestvér prímekeket kerüljenek (a **K** oszlopba a kisebb unokatestvér) növekvő sorrendben, helykihagyás nélkül.

5. A munkalap adattartományát formázzuk a minta szerint.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	1	5	2	5	7	11	13	5	2	3	3	7		
2	2	53	6	11	13	17	19	7	3	5	7	11		
3	3	157	6	101	103	107	109	11	5	11	13	17		
4	4	173	6	191	193	197	199	23	11	17	19	23		
5	5	211	12	821	823	827	829	47	23	31	37	41		
6	6	257	6	1481	1483	1487	1489	59	29	41	43	47		
7	7	263	6	1871	1873	1877	1879	83	41	59	67	71		
8	8	373	6	2081	2083	2087	2089	107	53	67	79	83		
9	9	563	6	3251	3253	3257	3259	167	83	83	97	101		
10	10	593	6	3461	3463	3467	3469	179	89	109	103	107		
11	11	607	6	5651	5653	5657	5659	227	113	127	109	113		

6. Számoljuk össze, hogy ezer prímenként hány szám fordul elő az öt kategóriában (a prímnégyeseknél és az unokatestvér prímeknél a legkisebb értéket számolva). Határozzuk meg az öt kategóriában az adatok szórását és ábrázoljuk oszlopdiagramon a legnagyobb szórású adatsor adatait a max nevű, diagram elrendezésű munkalapon. A diagram címében a prímszoport neve szerepeljen, ezt kövesse a „számok előfordulása 1000 prímenként” szöveg.

7. Az *eredmények* munkalapon cseréljük le oszloponként az első tíz sor utáni képleteket az értékükre.

8. Végül a munkafüzetet mentjük az eredeti nevén *xlsb* formátumban (bináris munkafüzetként).

Segédszámításokat a *prímek* munkalapon végezhetünk. A megoldásban saját függvény vagy makró nem használható.

Beküldendő az *i661.zip* tömörtett állományban a munkafüzet és egy rövid dokumentáció, amelyben szerepel a táblázatkezelő neve, verziószáma.

Letölthető fájl: *100000prim.txt*

(10 pont)

I. 662. Nagy méretű táblázatokban adatok elhelyezésére és gyors keresésére sok esetben hash-, vagy más néven hasítófüggvényeket alkalmaznak. Az eljárás egy lehetséges módja a következő: a legfőljebb N számú adatnak $N+M$ méretű tömböt foglalunk le, majd megadunk egy olyan hash-függvényt, amely az adat tulajdonságai alapján kijelöl egy helyet az $N+M$ méretű sorozatban. A függvény nem kölcsönösen egyértelmű. Ugyanakkor minél kevesebbszer fordul elő, hogy a függvény két adathoz azonos helyet rendel (hash-ütközés), annál hatékonyabb a tárolás és utána a keresés. Amennyiben az adatok beírásakor ütközés lép fel, úgy a már foglalt hely utáni első üres helyre tesszük az adatot.

Készítsünk programot, amely modellezi és vizsgálja a fent leírt hasítóábra működését. Először vegyünk föl egy $N+M$ méretű tömböt, amelynek minden elemét jelöljük kezdetben üresnek, tehát egyik sem tartalmaz adatot. Ezután töltsük fel a tömböt az N számú adattal egy hash-függvényt alkalmazva: ha egy adat számára

kijelölt hely szabad, akkor tegyük oda, ha nem szabad, akkor a függvény által kijelölt helyet követő első üres helyre. A tömb utolsó eleme után a tömb első eleme következzen. Az adatok elhelyezése során számoljuk meg, hogy hány esetben (T) nem sikerült egy elemet a hasítófüggvény által jelölt helyre tenni, illetve összesen hány lépést kellett tenni (L), hogy az adatoknak üres helyet találjunk. A T és L szám jól jellemzi a módszer hatékonyságát, és természetesen függ a hash-függvénytől, valamint N és M értékétől.

A program hozzon létre N számú adatot, amelyek mindegyike egy véletlenszerűen választott szó. A szavakat a `word5000.txt` szöveges állományból vegyük, minden szót legfőljebb egyszer válasszunk ki. A honlapunkról letölthető állományban soronként egy angol szó szerepel. Ezt követően találjunk ki egy hash-függvényt, amely minden szóhoz egy 0 és $N + M - 1$ közötti egész számot rendel, és végezzük el a szavak elhelyezését a kezdetben üres tömbbe úgy, hogy közben kiszámítjuk T és L értékét.

A program standard bemenetének első sorában a szavak N száma ($30 \leq N \leq 3000$) és a tömb N-et meghaladó celláinak M száma ($0 \leq M \leq 3000$) szerepel. A program a standard kimenet egy sorába írja ki T és L értékét, valamint a `hashtab.txt` szöveges állományba a hash-tábla tartalmát: soronként egy szót, üres helyek esetén a „—” karaktersorozatot.

Példa (a várható kimenet a hash-függvénytől és véletlentől függő érték):

Bemenetek	Kimenetek
30 10	18 60
100 0	70 702
1000 500	672 3954
3000 3000	1913 8827
500 2000	159 264

Beküldendő egy tömörített *i662.zip* állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható, illetve röviden bemutatja a programban alkalmazott hasítófüggvényt.

(10 pont)

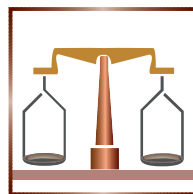


Beküldési határidő: 2025. május 15.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



Mérési feladatok megoldása



M. 437. Kérjük meg egy társunkat, hogy sétáljon lassan, mozogjon átlagos sebességgel, illetve haladjon gyorsjárással. Ezekről a mozgásokról készítsünk (például mobiltelefonnal) lassított felvételt, majd a felvételt elemezve állapítsuk meg, hogy a mozgás alatt az idő hány százalékában volt a sétáló társunk mindkét talpa a talajon! (6 pont)

Közli: Honyek Gyula, Veresegyház

Megoldás. A mérés helyszínéül egy falusi focipálya kapuja előtti pár négyzetmétert választottuk. Megmértük a két kapufa közötti L távolságot mérőszalaggal, hogy tudjunk majd átlagos sebességet számolni a különböző sétálási tempókhoz. Egyikünk végigsétált a két kapufa közötti távon háromszor, egyre gyorsabban, másikunk pedig ezt levideózta. Feltöltöttük a számítógépre a videót, majd megnéztük, hogy egy lépés hányad részében volt mindkét talp a talajon. A mérési adatokat táblázatba foglaltuk és kiértékeljük.

Mért adatok. $L = 730$ cm. A táblázatban az egyes lépésekhez tartozó összes képkocka száma, ezen belül a kétlábás képkockák száma, valamint ezek aránya szerepel.

lépés	lassú járás			közepes járás			gyors járás		
	össz.	kétl.	arány	össz.	kétl.	arány	össz.	kétl.	arány
1.	49	16	32,7%	36	8	22,2%	27	6	22,2%
2.	40	12	30,0%	32	7	21,9%	28	6	21,4%
3.	44	10	22,7%	31	5	16,1%	25	5	20,0%
4.	44	11	25,0%	38	10	26,3%	25	4	16,0%
5.	40	7	17,5%	32	5	15,6%	27	4	14,8%
6.	40	9	22,5%	36	8	22,2%	30	5	16,7%
7.	43	9	20,9%	36	8	22,2%	28	7	25,0%
8.	42	10	23,8%	34	10	29,4%			
9.	44	10	22,7%						

A háromféle járásnál az átlagos sebességek és a kétlábás idők átlagos aránya:

I. Lassú járás: $v_{\text{átl}} = \frac{7,3 \text{ m}}{7,5 \text{ s}} = 0,97 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, kétlábás idő átlagos aránya: $24,2\% \pm 4,6\%$.

II. Közepes járás: $v_{\text{átl}} = \frac{7,3 \text{ m}}{5,5 \text{ s}} = 1,33 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, kétlábás idő átlagos aránya: $21,0\% \pm 4,6\%$.

III. Gyors járás: $v_{\text{átl}} = \frac{7,3 \text{ m}}{4,0 \text{ s}} = 1,83 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, kétlábás idő átlagos aránya: $19,4\% \pm 3,8\%$.

Megfigyelhető, hogy a sebesség növelésével az arány csökken. A körülbelül 20%-os hibát egyrészt a videó felbontása (30 fps), másrészt a nem egyenletes járás okozta.

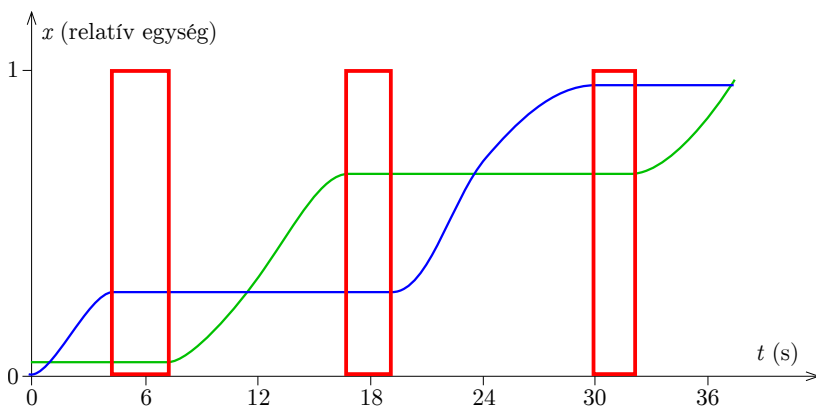
A Csupa cserfes csajócák csülingelő csapata:

Papp Emese Petra (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 10. évf.),

Handler Hanna Beáta (Pécsi Leőwey Klára Gimn., 10. évf.)

Lassított felvétellel a segítőm levideózta, ahogyan sétálok lassan, normál tempóban és gyorsan. Ezután a videókat a Tracker program segítségével kielemeztem. Mindkét talpamra felvettem egy „tömegpontot”, és kirajzoltattam a talpaim vízszintes pozícióját az idő függvényében. Jó közelítéssel akkor lesz egy talpam a talajon, amikor a vízszintes pozíciója állandó. Egymásra raktam a két talpam grafikonját, és leolvastam azon időtartamok hosszát, amikor mindkét talpam grafikonja vízszintes. Ezeknek az időeknek az összegét a teljes időhöz viszonyítva megkaptam a kétlábás idő százalékos arányát.

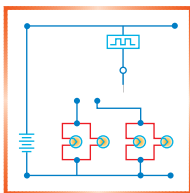
Az ábrán egy ilyen grafikon látható, lassú séta esetében. A kétlábás idők aránya: $\frac{7 \text{ s}}{37 \text{ s}} = 19\%$.



Gáti Benjamin (Budapest, Berzsényi D. Gimn., 10. évf.)

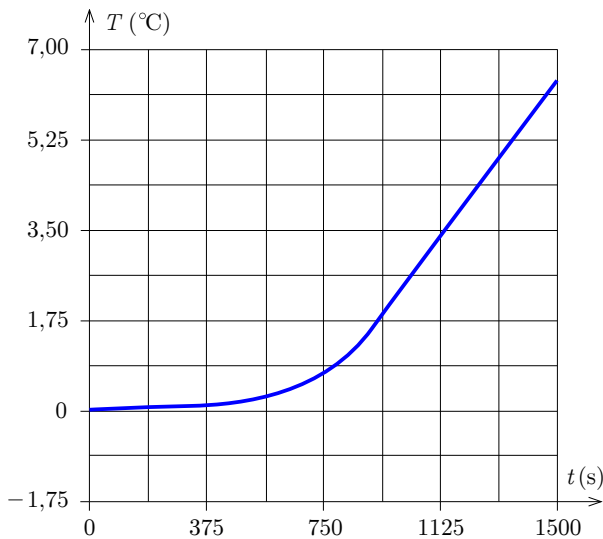
Megjegyzés. A módszer pontatlanságát a kisszámú felvett lépés okozza: emiatt a teljes időt nagyban befolyásolja, hogy milyen fázisban kezdődik és fejeződik be a felvétel.

8 dolgozat érkezett. Helyes 6 megoldás. Kicsit hiányos (5 pont) 2 dolgozat.



Fizika gyakorlatok megoldása

G. 867. Egy kaloriméterben jég és víz keveréke van. A kalorimétert állandó fűtőtéljesítménnyel melegítjük, és mérjük a tartalmának hőmérsékletét, amelyet az idő függvényében ábrázoltunk. A mérés végén 850 ml víz volt a kaloriméterben. Állapítsuk meg, hogy mekkora a fűtőtéljesítmény, valamint azt, hogy mennyi jég volt kezdetben a kaloriméterben!



(4 pont)

Megoldás. A fűtőteljesítmény a görbe azon részéből állapítható meg, amikor már minden jég elolvadt és csak a vizet melegítjük. Ez az a rész, amikor a hőmérséklet lineárisan emelkedik, azaz amikor $T > 1,75\text{ }^{\circ}\text{C}$. A kinagyított grafikonon erre a lineáris szakaszra egyenest illesztettem. Ennek meredeksége a víz melegedési sebessége $\frac{\Delta T}{\Delta t} = 0,00814\text{ } \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{s}}$. A víz tömege $m = 850\text{ g} = 0,85\text{ kg}$, fajhője $c = 4200\text{ } \frac{\text{J}}{\text{kg } ^{\circ}\text{C}} = 4,2\text{ } \frac{\text{kJ}}{\text{kg } ^{\circ}\text{C}}$. Ebből a keresett teljesítmény, amellyel a kalorimétert fűtöttük:

$$P = \frac{\Delta T}{\Delta t} mc \approx 29\text{ W}.$$

A kísérlet során $t = 1500\text{ s}$ alatt $Q = Pt = 43500\text{ J} = 43,5\text{ kJ}$ hőt közöltünk a rendszerrel. Ez egyrészt az ismeretlen m_j tömegű, $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ -os jég megolvasztására, másrészt az összesen $m = 0,85\text{ kg}$ víz $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ -ról $6,42\text{ }^{\circ}\text{C}$ -ra való felmelegítésére használandó fel.

$$Q = m_j L_0 + mc\Delta T,$$

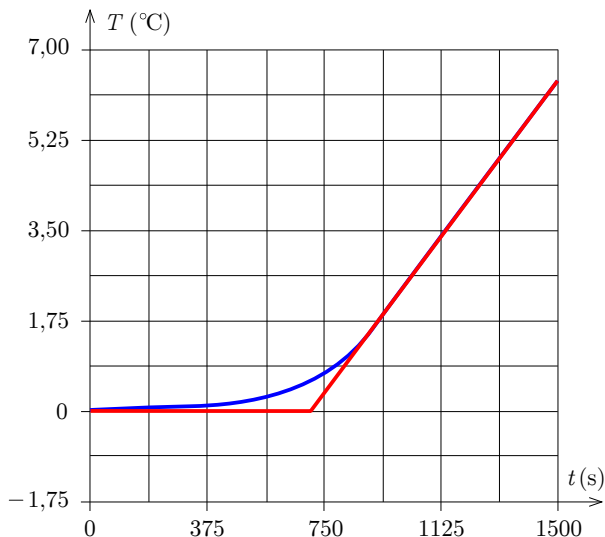
ahol $L_0 = 334\text{ } \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$ a jég olvadáshője és $\Delta T = 6,42\text{ }^{\circ}\text{C}$. Ebből a jég tömege:

$$m_j = \frac{Q - mc\Delta T}{L_0} \approx 0,062\text{ kg} = 62\text{ g}.$$

Sipeki Andor (Budapest, Karinthy Frigyes Gimn., 10. évf.)

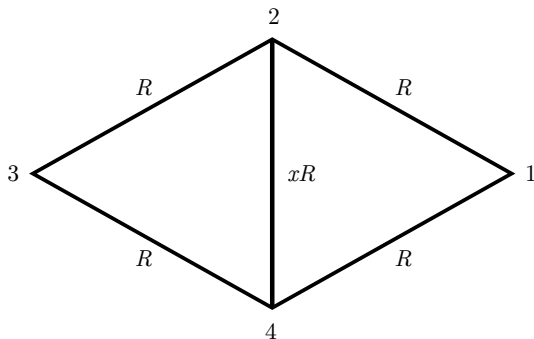
Megjegyzés. Ha a melegedés úgy történne, hogy a termoszon belül mindig hőmérsékleti egyensúly lenne, akkor mindaddig, amíg az összes jég el nem olvad, a hőmérséklet $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ -os lenne, és csak utána kezdene (egyenletesen) melegedni. A valóságban viszont a víz már akkor melegedni kezd, amikor a jég még nem olvadt el teljesen: emiatt lesz a fűtési görbe az ideálistól eltérő. Az *ábrán* megrajzoltuk egyrészt a $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ -os vízszintes egyenest, másrészt a megoldásban említett lineáris szakasz meghosszabbítását. A két egyenes metszéspontja

megadja azt a pillanatot, amikor ideális hőmérséklet-kiegyenlítődség esetén a jég olvadása befejeződné. Ennek az időadatnak a leolvasásából a fentiekhez hasonló gondolatmenettel szintén meghatározhatjuk P és m_j értékét.



A számszerű eredmény bizonytalanságát egyrészt a grafikonról való leolvasás pontatlansága, másrészt a kaloriméter hőkapacitásának elhanyagolása okozza.

37 dolgozat érkezett. Helyes 14 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 12, hiányos (1–2 pont) 11 dolgozat.



G. 868. Az ábrán látható rombusz oldalélei R ellenállásúak, az egyik átlós élének ellenállása pedig xR , ahol $x \geq 0$ egy változtatható paraméter. Két tetszőleges csúcspontra U feszültséget kapcsolunk. Számítsuk ki minden lehetséges esetben az öt ellenálláson fejlődő teljes hőteljesítményt az x paraméter függvényében!

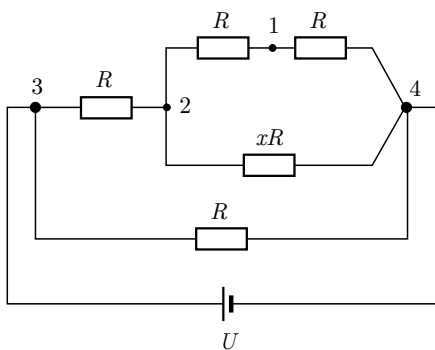
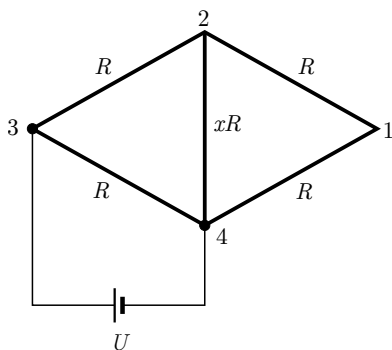
(4 pont)

Közli: Cserti József, Budapest

Megoldás. A két tetszőleges csomópontot a kapcsolás szimmetriája miatt három különböző módon tudjuk kiválasztani.

1. Két szomszédos csúcspontra kötjük a feszültségforrást. Az 1. ábrán a négy egyenértékű lehetőség közül az egyik látható. Az átrajzolt áramkör alapján egymás utáni soros és párhuzamos kapcsolásokkal meghatározható az eredő ellenállás:

$$R_{41} = R_{12} = R_{23} = R_{34} = \frac{R \cdot \left(R + \frac{2R \cdot xR}{2R + xR} \right)}{R + \left(R + \frac{2R \cdot xR}{2R + xR} \right)} = \frac{3x + 2}{4x + 4} R.$$

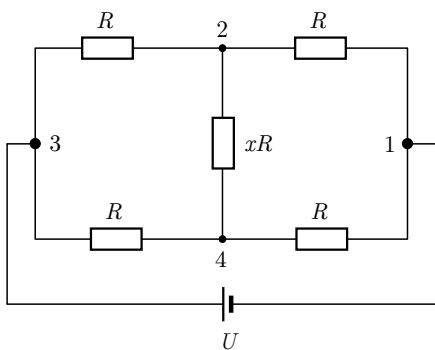
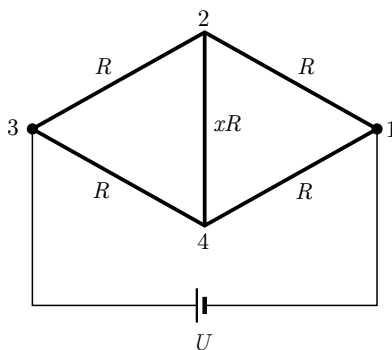


1. ábra

A teljes hőteljesítmény pedig ez alapján:

$$P_{41} = P_{12} = P_{23} = P_{34} = \frac{U^2}{R_{34}} = \frac{4x + 4}{3x + 2} \frac{U^2}{R}.$$

2. A 3-as és 1-es csúcspontok közé (2. ábra) kötjük a feszültségforrást.



2. ábra

Ebben az esetben a szimmetria miatt az xR ellenálláson nem folyik áram (olyan, mintha ott se lenne). Az eredő ellenállás:

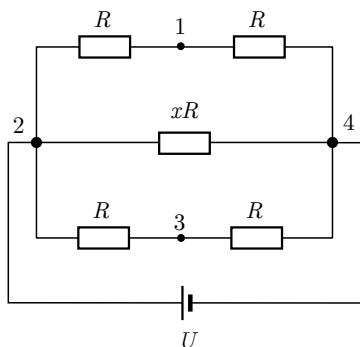
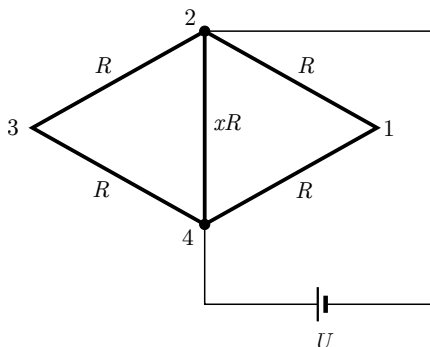
$$R_{13} = \frac{2R \cdot 2R}{2R + 2R} = R,$$

a teljes hőteljesítmény:

$$P_{13} = \frac{U^2}{R_{13}} = \frac{U^2}{R}.$$

Az ellenállás és a teljesítmény is független x -től.

3. A 2-es és 4-es csúcspontok közé (3. ábra) kötjük a feszültségforrást.



3. ábra

Három párhuzamosan kapcsolt ellenállás eredője:

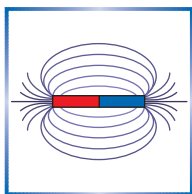
$$\frac{1}{R_{24}} = 2 \cdot \frac{1}{2R} + \frac{1}{xR} \Rightarrow R_{24} = \frac{x}{x+1} R.$$

A teljes hőteljesítmény:

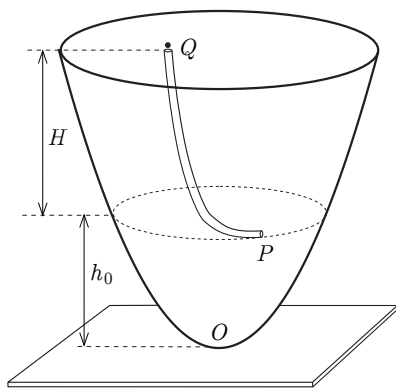
$$P_{24} = \frac{U^2}{R_{24}} = \frac{x+1}{x} \frac{U^2}{R}.$$

Szighardt Anna (Révkomárom, Selye János Gimn., 9. évf.)

23 dolgozat érkezett. Helyes 10 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 6, hiányos (1–2 pont) 6, hibás 1 dolgozat.



Fizika feladatok megoldása



P. 5599. Egy forgási paraboloid alakú, függőleges szimmetriatengelyű, vékony fémserleget az O csúcsánál vízszintes tartólaphoz erősítettünk. A P pont és a síklap távolsága h_0 . A serleg belsejében elhelyezett vékony csőbe, annak Q végpontjánál egy pontszerű testet ejtettünk, amely a serleg P pontjánál hagyja el a csövet. A Q és a P pont magasságkülönbsége H .

A kis test a serleg érintősíkjában fekvő, vízszintes egyenes irányában repül ki a csőből. Milyen határok között fog változni a kis testnek a lemezről mért h távolsága a további

mozgás során? (A súrlódás mindenhol elhanyagolható.)

(5 pont)

Közli: Gnädig Péter, Vácduka

Megoldás. A test sebessége a csőből való kilépéskor vízszintes, így ekkor pályájának legmagasabb vagy legalacsonyabb pontján van. A sebessége ekkor az energiamegmaradás alapján:

$$v_0 = \sqrt{2gH}.$$

A mozgás során jelölje a test síklaphoz viszonyított magasságát h , pillanatnyi sebességét v . A serleg alakja miatt

$$h = ar^2,$$

ahol a egy állandó, r pedig a szimmetriatengelytől mért távolság. Az energiamegmaradás alapján:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0.$$

A testre mindvégig csak a felület nyomóereje hat, amelynek hatásvonala átmegy a szimmetriatengelyen, így a test szimmetriatengelyre vonatkoztatott perdülete állandó. Azt a másik helyzetet keressük, ahol a sebesség szintén vízszintes irányú, ezekben a pontokban a perdület könnyen kifejezhető, és így a perdületmegmaradás alapján:

$$mvr = mv_0r_0.$$

Ebből

$$v = v_0 \frac{r_0}{r},$$

amelyet az energiaegyenletbe behelyettesítve:

$$v_0^2 \frac{r_0^2}{r^2} + 2gh = v_0^2 + 2gh_0.$$

Felhasználva v_0 kifejezését, valamint az

$$\frac{r_0^2}{r^2} = \frac{h_0}{h}$$

összefüggést, h -ra egy másodfokú egyenletet kapunk:

$$h^2 - (H + h_0)h + Hh_0 = 0.$$

Az egyenlet gyökei: $h_1 = H$ és $h_2 = h_0$, tehát a test magassága a síklaphoz képest h_0 és H között fog változni. Amennyiben $h_0 < H$, $h_0 \leq h \leq H$; $h_0 > H$ esetén pedig $H \leq h \leq h_0$. Ha $h_0 = H$, akkor a test $h = h_0$ magasságban körpályán fog mozogni.

Molnár Zétény (Budapest, Berzsényi D. Gimn., 12. évf.)

Megjegyzések. 1. A megmaradási törvények alapján felírt egyenleteknek mindig megoldása a kezdeti állapot is, így $h = h_0$ az egyenlet triviális megoldása. Ezt felhasználva a másodfokú egyenlet egyszerűsíthető, és a másik megoldás azonnal megkapható:

$$\begin{aligned} h^2 - (H + h_0)h + Hh_0 &= 0, \\ h(h - h_0) &= H(h - h_0), \\ h &= H. \end{aligned}$$

Ez a trükk különösen hasznos olyan feladatoknál, ahol az eredeti egyenlet harmadfokú.

2. Amennyiben $h_0 = H$, a test egyenletes sebességgel körpályán mozog. Ezt dinamikai megfontolásokkal is megkaphatjuk. A testre ható nyomóerő N_f függőleges komponense a

nehézségi erőt egyenlíti ki, a radiális (vízszintes) N_r komponense pedig körpályán tartja a testet. Ebből a nyomóerő vízszintessel bezárt szöge:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{N_f}{N_r} = \frac{mg}{m \frac{v_0^2}{r_0}} = \frac{gr_0}{v_0^2}.$$

Másképpen a $h = ar^2$ egyenletű parabola érintőjének meredeksége h_0 magasságban:

$$\operatorname{tg} \alpha = 2ar_0 = 2 \frac{h_0}{r_0}.$$

(Ez nemcsak deriválással, hanem geometriai vagy optikai megfontolásokkal is megkapható.) Az erő merőleges a felületre, így $\alpha + \varphi = 90^\circ$, amiből $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi = 1$, és:

$$2 \frac{h_0}{r_0} \frac{gr_0}{v_0^2} = 1.$$

Ebből $v_0^2 = 2gH$ behelyettesítésével azonnal adódik a $h_0 = H$ feltétel.

3. A szélső helyzeteken kívül a testnek nemcsak tangenciális, hanem radiális és függőleges sebességkomponense is van. A megmaradási egyenletek:

$$v_0^2 + 2gh_0 = v^2 + 2gh = (v_t^2 + v_r^2 + v_f^2) + 2gh,$$

$$v_0 r_0 = v_t r,$$

amiből

$$v_t = v_0 \frac{r_0}{r}$$

és

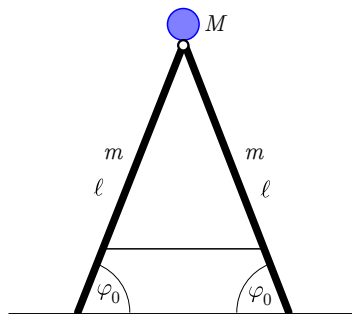
$$v_r^2 + v_f^2 = v_0^2 + 2gh_0 - v_0^2 \frac{r_0^2}{r^2} - 2gh = 2gH + 2gh_0 - 2gH \frac{h_0}{h} - 2gh = 2g \frac{(H-h)(h-h_0)}{h}.$$

Az eredményből egyrészt látható, hogy $h = H$ és $h = h_0$ esetén a nem tangenciális tagok valóban eltűnnek. Más esetekben pedig meghatározható h függvényében a sebesség parabola érintőjével párhuzamos $\sqrt{v_r^2 + v_f^2}$ komponense. A mozgás időbeli leírása azonban csak numerikus módszerekkel lehetséges.

15 dolgozat érkezett. Helyes 7 megoldás. Kicsit hiányos (3–4 pont) 4, hiányos (1–2 pont) 4 dolgozat.

P. 5600. A vízszintes, súrlódásmentes talajon álló létra két egyforma szára kezdetben φ_0 szöget zár be a talajjal, és a köztük lévő lánc akadályozza meg a szétcsúszásukat. A létra tetején egy M tömegű ember ül. A lánc elszakad, a létra szétnyílik. Mekkora sebességgel és gyorsulással ér talajt az ember? Hogyan aránylik ez a két mennyiség ahhoz, amikor az ember ugyanekkora magasságból szabadon esik le? Vizsgáljuk az $M \rightarrow 0$, illetve az $M \rightarrow \infty$ határeseteket. Tekintsük a létra szarait egy-egy m tömegű, ℓ hosszúságú homogén rúdnak, az embert pedig pontszerűnek. A létra két szárát felül egy súrlódásmentes csukló tartja össze.

(5 pont)



Közli: Cserti József, Budapest

Megoldás. A felállított rendszer szimmetrikus az emberen és a csuklón átmenő függőleges síkra, így elegendő az egyik felét vizsgálni, mintha a szimmetriasíknál egy fal lenne. Ekkor az M tömegnek csak a felét kell figyelembe vennünk (1. ábra).

Kezdetben a rendszer nyugalomban van. A létraszár egyik vége mindvégig a talajon mozog, amikor pedig a másik vége is leérkezik a talajra, akkor a vízszintes sebessége is nulla lesz. Így a leérkezés pillanatában a létraszárnak csak forgó mozgása lesz ekörül a pont körül. A mechanikai energia megmaradása alapján tehát:

$$\frac{M}{2}gh + mg\frac{h}{2} = \frac{1}{2}\frac{M}{2}v^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2,$$

ahol $h = \ell \sin \varphi_0$, v az ember sebessége a földetéréskor, valamint

$$\Theta = \frac{1}{3}m\ell^2 \quad \text{és} \quad \omega = \frac{v}{\ell}.$$

Behelyettesítve és rendezve:

$$v = \sqrt{\frac{6(M+m)g\ell \sin \varphi_0}{3M+2m}} = \sqrt{\frac{3(M+m)}{3M+2m}}v_0,$$

ahol

$$v_0 = \sqrt{2g\ell \sin \varphi_0}$$

a $h = \ell \sin \varphi_0$ magasságból szabadon eső test földetérési sebessége.

Ha $M \rightarrow 0$, akkor $v = \sqrt{3g\ell \sin \varphi_0} = \sqrt{\frac{3}{2}}v_0$.

Ha $M \rightarrow \infty$, akkor mellette m elhanyagolható, tehát olyan, mintha $m \rightarrow 0$ lenne. Ilyenkor $v = \sqrt{2g\ell \sin \varphi_0} = v_0$, azaz az ember úgy esik le, mintha a létra ott sem lenne.

A földetéréskor a gyorsulás meghatározásához tekintsünk úgy a rendszerre, mintha egyetlen merev testként β szöggyorsulással forogna az ekkor nyugalomban lévő O végpont körül (2. ábra). A testre ható, erre a pontra vonatkoztatott forgatónyomatékok eredője:

$$T = \frac{M}{2}g\ell + mg\frac{\ell}{2},$$

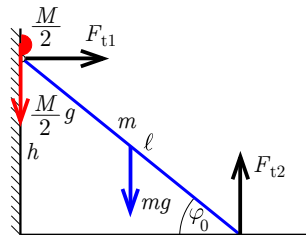
a rendszer teljes tehetetlenségi nyomatéka szintén erre a pontra vonatkoztatva:

$$\Theta_{\text{össz}} = \frac{M}{2}\ell^2 + \frac{1}{3}m\ell^2,$$

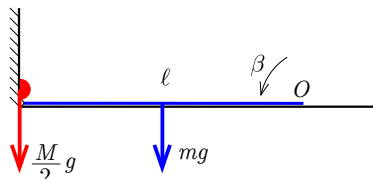
és így az ember gyorsulása földetéréskor:

$$a = \beta\ell = \frac{T}{\Theta_{\text{össz}}}\ell = \frac{3(M+m)}{3M+2m}g.$$

Ha $M \rightarrow 0$, akkor $a = \frac{3}{2}g$, ha $M \rightarrow \infty$ ($m \rightarrow 0$), akkor $a = g$.



1. ábra



2. ábra

Az utóbbi határesetet kivéve minden esetben $a > g$, azaz az embernek csak akkor lesz ekkora a sebessége és a gyorsulása, ha kapaszkodik vagy rögzítve van a létrához, különben elválik tőle.

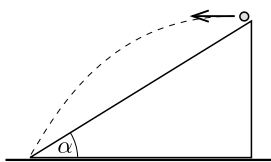
Vértesi Janka (Debreceni Ady E. Gimn., 11. évf.)

Megjegyzések. 1. Ebben a megoldásban a gyorsulás kiszámításakor a forgatónyomatékegyenletet a *pillanatnyi forgástengelyre* írtuk fel. Ezt csak akkor tehetjük meg ilyen egyszerűen, ha ennek a pontnak a gyorsulása is nulla, vagy pedig ha van gyorsulása, akkor az ebből származó tehetetlenségi erőnek nincsen forgatónyomatéka a forgástengelyre. Esetünkben az utóbbi teljesül, hiszen a pont vízszintesen gyorsul, és így a tehetetlenségi erők is vízszintesek, átmennek az O ponton.

2. Elkerülhetjük az ilyen feltételek vizsgálatát, ha a forgó test mozgását a tömegközéppont haladó mozgásából és az akörüli forgómozgásból rakjuk össze. Ilyen megoldás látható a munkafüzetben (<https://www.komal.hu/munkafuzet.h.shtml>).

3. Több megoldó elkövette azt a hibát, hogy miközben csak az egyik létraszár mozgását vizsgálta, az ember teljes tömegével számolt. Ez olyan, mintha az ember tömege kétszer akkora lenne, így a határesetekben jó, de általános esetben rossz megoldást ad.

24 dolgozat érkezett. Helyes 7 megoldás. Kicsit hiányos (3–4 pont) 14, hiányos (2 pont) 2, hibás 1 dolgozat.

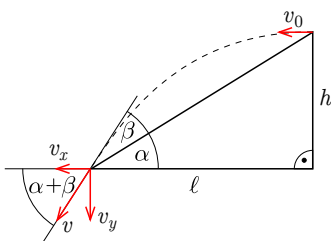


P. 5607. Egy rögzített lejtő tetejéről vízszintesen elhajított kicsiny test éppen a lejtő aljánál csapódik be (ábra). A becsapódáskor a sebessége a lejtő síkjával $\beta = 19^\circ$ -os szöget zár be. Mekkora a lejtő hajlásszöge?

(3 pont)

Közli: Zsigri Ferenc, (Budapest)

Megoldás. Legyen a vízszintes hajítás kezdősebessége v_0 , a lejtő magassága h , alapjának hossza ℓ , ahogy az ábrán látható. A test t idő alatt éri el a lejtő alját. A kinematikai összefüggések alapján:



$$\ell = v_0 t,$$

$$h = \frac{g}{2} t^2,$$

$$v_x = v_0,$$

$$v_y = gt.$$

Ezeket felhasználva az ábra alapján:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{\ell} = \frac{gt}{2v_0},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{v_y}{v_x} = \frac{gt}{v_0},$$

és ebből

$$2 \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Ez $\operatorname{tg} \alpha$ -ra egy másodfokú egyenlet:

$$2 \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = 0,$$

amelynek gyökei:

$$\operatorname{tg} \alpha_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8 \operatorname{tg}^2 \beta}}{4 \operatorname{tg} \beta}.$$

Felhasználva, hogy $\beta = 19^\circ$:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = 0,891 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 41,7^\circ,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = 0,561 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 29,3^\circ.$$

A feladatnak mindkét szög megoldása.

Kis Boglárka (Kecskeméti Katona J. Gimn., 10. évf.)

41 dolgozat érkezett. Helyes 28 megoldás. Kicsit hiányos (2 pont) 6, hiányos (1 pont) 3, hibás 4 dolgozat.

P. 5611. Az ábrán látható „kettős jojó” két egyforma, homogén tömegeloszlású korongból és a rájuk tekert fonalakból áll.

A két testet a fonalak függőleges helyzetéből kezdősebesség nélkül indítjuk el.

a) Melyik korong tengelyének lesz nagyobb a sebessége egy bizonyos idő elteltével, és hányszorosa ez a sebesség a másik korongénak?

b) Melyik korong szögsebessége lesz nagyobb egy bizonyos idő elteltével, és hányszorosa ez a szögsebesség a másik korongénak?

(A kérdéses pillanatban a fonalak még nem tekeredtek le a korongokról.)

(5 pont)

Közli: Gnädig Péter, Vácduka

Megoldás. Az ábra jelöléseit használva írjuk fel mindkét korongra a haladó és a forgómozgás egyenleteit:

$$(1) \quad ma_1 = mg + K_2 - K_1,$$

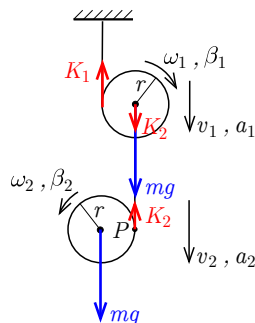
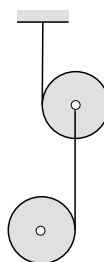
$$(2) \quad ma_2 = mg - K_2,$$

$$(3) \quad \Theta \beta_1 = r K_1,$$

$$(4) \quad \Theta \beta_2 = r K_2,$$

ahol $\Theta = \frac{1}{2}mr^2$ a korongok tehetetlenségi nyomatéka. Ezen kívül szükségünk van a kényszerfeltételekre. A felső korong tisztán gördül a fonálon, így

$$(5) \quad a_1 - r \beta_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_1 = \frac{a_1}{r}.$$



A fonál nyújthatatlan, így az alsó korong P érintkezési pontjának a gyorsulása megegyezik a felső korong gyorsulásával. Ez alapján:

$$(6) \quad a_2 - r\beta_2 = a_1 \quad \Rightarrow \quad \beta_2 = \frac{a_2 - a_1}{r}.$$

A fonálerőket (3) és (4)-ből kifejezve, majd Θ kifejezését és a szöggyorsulások (5) és (6) képleteit behelyettesítve:

$$K_1 = \frac{\Theta\beta_1}{r} = \frac{1}{2}ma_1,$$

$$K_2 = \frac{\Theta\beta_2}{r} = \frac{1}{2}m(a_2 - a_1).$$

Ezeket a kifejezéseket (1) és (2)-be behelyettesítve, és az egyenleteket rendezve:

$$ma_1 = mg + \frac{1}{2}m(a_2 - a_1) - \frac{1}{2}ma_1 \quad \Rightarrow \quad 4a_1 = 2g + a_2,$$

$$ma_2 = mg - \frac{1}{2}m(a_2 - a_1) \quad \Rightarrow \quad 3a_2 = 2g + a_1.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$a_1 = \frac{8}{11}g \quad \text{és} \quad a_2 = \frac{10}{11}g.$$

Mivel a rendszer kezdetben nyugalomban volt, a korongok sebességének aránya megegyezik a gyorsulások arányával:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{5}{4},$$

tehát az alsó korong sebessége a nagyobb. (5) és (6) alapján a szöggyorsulások:

$$\beta_1 = \frac{a_1}{r} = \frac{8}{11} \frac{g}{r},$$

$$\beta_2 = \frac{a_2 - a_1}{r} = \frac{2}{11} \frac{g}{r}.$$

A szögsebességek aránya megegyezik a szöggyorsulások arányával:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{1}{4},$$

tehát a felső korong szögsebessége a nagyobb, 4-szerese az alsó korong szögsebességének.

Tóth Hanga Katalin (Kecskeméti Bányai Júlia Gimn., 11. évf.)

25 dolgozat érkezett. Helyes 18 megoldás. Kicsit hiányos (3–4 pont) 5, hiányos (1 pont) 1, hibás 1 dolgozat.

P. 5612. 25 °C-os nitrogéngázzal 1000 J hőt közlünk, miközben állandó hőmérsékleten kitágul. Ezután a gázt adiabatikusan tágitjuk, amelynek hatására 0 °C hőmérsékletre hűl. Ugyanebbe a végállapotba juthattunk volna, ha a gázt először adiabatikusan, majd izotermikusan tágitjuk. Mennyi hőt kellene ebben az esetben közölni a gázzal az izoterm folyamat során?

(4 pont)

Közli: Széchenyi Gábor, Budapest

I. megoldás. A kezdeti állapotban a gáz nyomása, térfogata és hőmérséklete p_1 , V_1 és $T_1 = 298$ K, a végállapotban pedig p_2 , V_2 és $T_2 = 273$ K.

A feladatban először leírt folyamat:

$$p_1, V_1, T_1 \xrightarrow{\text{izoterm}} p_{k1}, V_{k1}, T_1 \xrightarrow{\text{adiabatikus}} p_2, V_2, T_2.$$

Az izoterm folyamat során a hőfelvétel megegyezik a gáz által végzett munkával, értékét pedig megadja a feladat:

$$(1) \quad Q_1 = W_{g1} = p_1 V_1 \ln \left(\frac{V_{k1}}{V_1} \right) = 1000 \text{ J.}$$

Az adiabata folyamatra fennáll:

$$(2) \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_{k1}}{V_2} \right)^{\kappa-1},$$

ahol κ a fajhőhányados.

A második folyamat:

$$p_1, V_1, T_1 \xrightarrow{\text{adiabatikus}} p_{k2}, V_{k2}, T_2 \xrightarrow{\text{izoterm}} p_2, V_2, T_2.$$

Az adiabata folyamatra fennáll:

$$(3) \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_{k2}} \right)^{\kappa-1}.$$

Az izoterm folyamat során a felvett hő megegyezik a gáz által végzett munkával:

$$(4) \quad Q_2 = W_{g2} = p_2 V_2 \ln \left(\frac{V_2}{V_{k2}} \right).$$

Az egyesített gáztörvény alapján:

$$(5) \quad p_2 V_2 = \frac{T_2}{T_1} p_1 V_1,$$

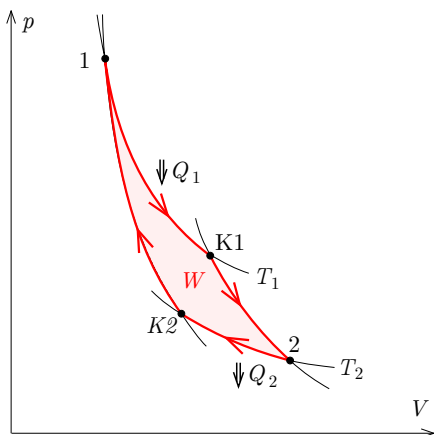
(2) és (3) összevetéséből:

$$(6) \quad \left(\frac{V_{k1}}{V_2} \right)^{\kappa-1} = \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_{k2}} \right)^{\kappa-1} \Rightarrow \frac{V_{k1}}{V_2} = \frac{V_1}{V_{k2}} \Rightarrow \frac{V_2}{V_{k2}} = \frac{V_{k1}}{V_1},$$

és végül (4), (5), (6) és (1) felhasználásával:

$$Q_2 = p_2 V_2 \ln \left(\frac{V_2}{V_{k2}} \right) = \frac{T_2}{T_1} p_1 V_1 \ln \left(\frac{V_{k1}}{V_1} \right) = \frac{T_2}{T_1} Q_1 = 916 \text{ J.}$$

Az *Entrópiatagadók* csapat: Budai Máté, Nacsá Domán
(Gyula, Erkel F. Gimn., 11. évf.)



II. megoldás. Fordítsuk meg a feladat szövegében másodszer leírt $1 \rightarrow K2 \rightarrow 2$ folyamatot. Így az elsőnek leírt $1 \rightarrow K1 \rightarrow 2$ folyamattal együtt egy Carnot-körfolyamatot kapunk (ábra). A megadott Q_1 a felső, T_1 hőmérsékletű hőtartályból felvett hővel, a keresett Q_2 nagysága pedig az így kialakított körfolyamatban a T_2 hőmérsékletű hőtartálynak leadott hőmennyiséggel egyezik meg.

A Carnot-körfolyamat hatásfoka:

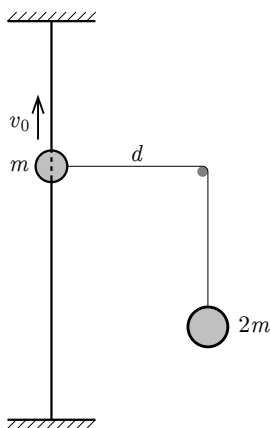
$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

amiből a keresett Q_2 hőmennyiség:

$$Q_2 = \frac{T_2}{T_1} Q_1 = 916 \text{ J.}$$

Tóth-Túri Bence (Gödöllői Török Ignác Gimn., 11. évf.)

22 dolgozat érkezett. Helyes 12 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 3, hiányos (1–2 pont) 4, hibás 3 dolgozat.



P. 5618. Egy m tömegű gyöngyöt fűztünk egy elegendően hosszú, függőleges helyzetű, rögzített, feszes drótra, amelyhez egy fonalat erősítettünk. A fonalat, az ábra szerint egy vízszintes rúdon átvettünk, és függőleges darabjának végéhez egy kicsiny, $2m$ tömegű nehezéket rögzítettünk. A rúd a dróttól d távolságra van. A gyöngyhez kapcsolódó fonalszál vízszintes helyzetében a gyöngynek felfelé mutató, $v_0 = \sqrt{2gd}$ nagyságú kezdősebességet adunk.

a) A gyöngy legfelső helyzetének a kiindulási ponttól való távolsága legyen f , a legalsó helyzetének a kiindulási ponttól való távolsága pedig ℓ . Mekkora az ℓ/f hányados?

b) Mekkora a fonálban ébredő erő a gyöngy legfelső helyzetében és a kiindulási ponton való áthaladáskor?

(A súrlódás mindenhol elhanyagolható.)

(5 pont)

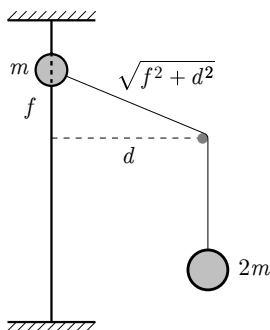
Közli: Zsigri Ferenc, Budapest

Megoldás. a) Számítsuk ki f -et és ℓ -et d függvényében. A kezdeti állapotban a gyöngy $v_0 = \sqrt{2gd}$ sebességgel mozog fölfelé, a nehezék sebessége pedig éppen nulla, hiszen ez a lehetséges legmélyebb pontja. Ez a helyzet legyen a helyzeti energiák

nullpontja mindkét test esetében. Így a rendszer teljes mechanikai energiája:

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 = mgd.$$

A szélső helyzetekben mindkét test sebessége nulla, hiszen mozgásuk ekkor irányt vált. Az 1. ábrán a felső helyzetet ábrázoltuk, de az alsó helyzetről ugyanilyen ábra készíthető. Ez alapján a rendszer mechanikai energiája ebben a helyzetben:



1. ábra

$$E_1 = mgf + 2mg\left(\sqrt{f^2 + d^2} - d\right),$$

ahol kihasználtuk, hogy a fonál nyújthatatlansága miatt a nehezeék elmozdulása felfelé megegyezik a fonál gyöngy és rúd közötti szakaszának megváltozásával. A mechanikai energia megmaradása miatt $E_1 = E_0$. Ezzel f -re másodfokú egyenletet kapunk, amelyet megoldva:

$$mgd = mgf + 2mg\left(\sqrt{f^2 + d^2} - d\right),$$

$$3d - f = 2\sqrt{f^2 + d^2},$$

$$3f^2 + 6df - 5d^2 = 0,$$

$$f = \left(-1 \pm \sqrt{\frac{8}{3}}\right)d.$$

Mivel $f > 0$, a két gyök közül a pozitív a helyes:

$$f = \left(\sqrt{\frac{8}{3}} - 1\right)d.$$

A legalsó helyzetre pontosan ilyen egyenleteket írhatnánk fel, csak f helyére mindenhol $-\ell$ -et kéne írunk. Így a másodfokú egyenlet negatív gyöke éppen $-\ell$ -et adja meg, amiből:

$$\ell = -\left(-1 - \sqrt{\frac{8}{3}}\right)d = \left(\sqrt{\frac{8}{3}} + 1\right)d.$$

A keresett hányados tehát:

$$\frac{\ell}{f} = \frac{\sqrt{\frac{8}{3}} + 1}{\sqrt{\frac{8}{3}} - 1} = \frac{\sqrt{8} + \sqrt{3}}{\sqrt{8} - \sqrt{3}} \approx 4,16.$$

b) Tekintsük először a legfelső helyzetet, rajzoljuk be a testekre ható erőket (2. ábra). A gyöngyre ható erők közül csak a függőleges erőkkel foglalkozunk, hiszen a gyöngy csak függőlegesen mozoghat. (A kötélerő vízszintes komponensét kiegyenlíti a rúdban ébredő kényszererő, amelyet az ábrára be se rajzoltunk.) Ebből az állapotból – ahol a testek pillanatnyi sebessége nulla – mindkét test

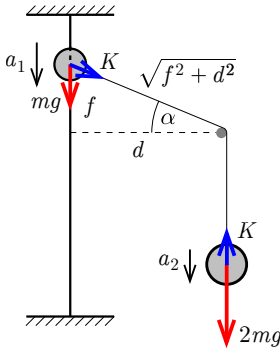
lefelé gyorsulva indul el, így a gyorsulásokat lefelé vesszük pozitívnak. A gyöngyre ható kötélrő függőleges (rúddal párhuzamos) komponense $K \sin \alpha$, ahol α a fonál vízszintessel bezárt szöge. A 2. ábra alapján:

$$\sin \alpha = \frac{f}{\sqrt{f^2 + d^2}} \approx 0,535.$$

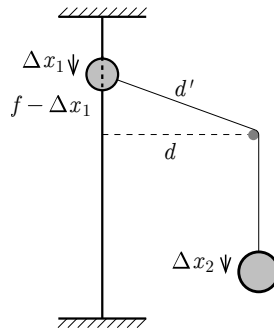
A mozgásegyenletek:

$$(1) \quad ma_1 = mg + K \sin \alpha,$$

$$(2) \quad 2ma_2 = 2mg - K.$$



2. ábra



3. ábra

K meghatározásához szükségünk van a két gyorsulás közötti kapcsolatra. Tekintsük a legfelső helyzet elérése után nagyon kis Δt idővel lévő pillanatot ($\Delta t \rightarrow 0$). A legfelső helyzetben mindkét test áll, $v_1 = v_2 = 0$, így a $\Delta x = \frac{1}{2}a(\Delta t)^2$ összefüggés szerint a gyorsulásaik aránya megegyezik a testek által a rövid Δt idő alatt megtett Δx utak arányával. Legyen a gyöngy elmozdulása lefelé Δx_1 . Ekkor a ferde fonálszakasz hossza a 3. ábra alapján:

$$d' = \sqrt{(f - \Delta x_1)^2 + d^2} \approx \sqrt{f^2 - 2f\Delta x_1 + d^2},$$

ahol a közelítésben elhanyagoltuk a $(\Delta x_1)^2$ tagot. Ez alapján a neheze elmozdulása lefelé:

$$\begin{aligned} \Delta x_2 &= \sqrt{f^2 + d^2} - \sqrt{f^2 - 2f\Delta x_1 + d^2} = \sqrt{f^2 + d^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2f\Delta x_1}{f^2 + d^2}} \right) \approx \\ &\approx \sqrt{f^2 + d^2} \left(1 - \left(1 - \frac{f\Delta x_1}{f^2 + d^2} \right) \right) = \frac{f\Delta x_1}{\sqrt{f^2 + d^2}}, \end{aligned}$$

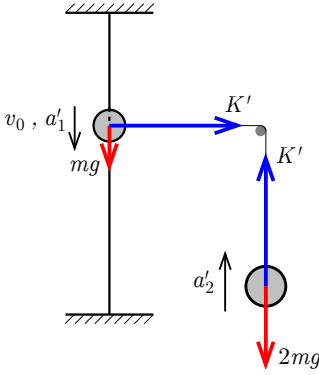
ahol felhasználtuk, hogy $\sqrt{1 + \varepsilon} \approx 1 + \frac{1}{2}\varepsilon$, ha $\varepsilon \ll 1$. Tehát

$$(3) \quad \frac{a_2}{a_1} = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{f}{\sqrt{f^2 + d^2}} = \sin \alpha.$$

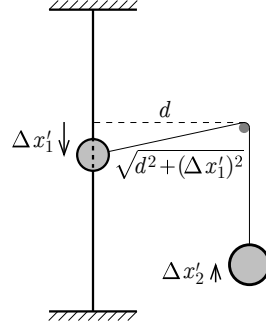
Az (1), (2) és (3) egyenletekből álló egyenletrendszert megoldva a keresett fonálerő:

$$K = \frac{2(1 - \sin \alpha)}{1 + 2 \sin^2 \alpha} mg \approx 0,592 mg.$$

Vizsgáljuk ezután a kiindulási ponton való áthaladást (4. ábra).



4. ábra



5. ábra

Ekkor a gyöngy az energiamegmaradás miatt ismét $v_0 = \sqrt{2gd}$ sebességgel mozog. A gyöngyre függőleges irányban csak a nehézségi erő hat, így $a'_1 = g$. (A gyöngy gyorsulását lefelé tekintjük pozitívna, és a továbbiakban az első, lefelé történő áthaladást vizsgáljuk. A megoldás azonban ugyanez a kiindulási helyzetben felfelé áthaladás esetére is.) A nehezék ekkor eléri legmélyebb helyzetét, így pillanatnyi sebessége nulla és felfelé gyorsul. A nehezékre felírt mozgásegyenlet:

$$(4) \quad 2ma'_2 = K' - 2mg.$$

Most tekintsük ismét a vizsgált helyzet után nagyon kis Δt idővel lévő pillanatot ($\Delta t \rightarrow 0$). Legyen a gyöngy által ezalatt megtett út $\Delta x'_1$, a nehezéké pedig $\Delta x'_2$. Az 5. ábra alapján:

$$\Delta x'_2 = \sqrt{d^2 + (\Delta x'_1)^2} - d = d \sqrt{1 + \frac{(\Delta x'_1)^2}{d^2}} - d \approx d \left(1 + \frac{(\Delta x'_1)^2}{2d^2} \right) - d = \frac{(\Delta x'_1)^2}{2d},$$

ahol ismét felhasználtuk, hogy $\sqrt{1 + \varepsilon} \approx 1 + \frac{1}{2}\varepsilon$, ha $\varepsilon \ll 1$. A két elmozdulást azonban felírhatjuk a következőképpen is:

$$\begin{aligned} \Delta x'_1 &= \sqrt{2gd} \Delta t + \frac{g}{2} (\Delta t)^2, \\ \Delta x'_2 &= \frac{a'_2}{2} (\Delta t)^2. \end{aligned}$$

A három összefüggés alapján

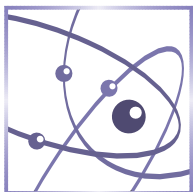
$$a'_2 = \frac{2\Delta x'_2}{(\Delta t)^2} = \frac{(\Delta x'_1)^2}{d(\Delta t)^2} = 2g + \frac{g}{d} \sqrt{2gd} \Delta t + \frac{g^2}{4d} (\Delta t)^2 \approx 2g,$$

hiszen $\Delta t \rightarrow 0$ miatt a második és harmadik tag elhanyagolható az első mellett. Ebből (4) alapján a fonálerő:

$$K' = 2m(a_2' + g) = 6mg.$$

Simon János Dániel (Career Academy South Bend, 11. évf.)

19 dolgozat érkezett. Helyes Simon János Dániel megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 3, hiányos (1–3 pont) 15 dolgozat.



Fizikából kitűzött feladatok

M. 440. Hajtogassunk papírrepülőt, majd mérjük meg a siklózszámát! Törekedjünk arra, hogy minél hosszabb szakaszon süllyedjen egyenletesen.

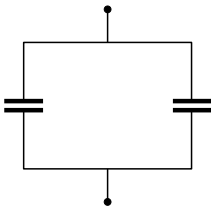
(6 pont)

Közli: *Széchenyi Gábor*, Budapest

G. 885. Egy optikai üvegszál magjának törésmutatója 1,6, míg a borításáé 1,5. Legfeljebb mekkora szöget zárhat be az optikai szál tengelyével egy fénysugár az üvegszálon belül, hogy teljes visszaverődés jöjjön létre a szál belsejében? A tengelyhez képest legfeljebb mekkora szöggel érkezhethet a fénysugár levegőből az üvegszál tengelyre merőleges belépési sík közepére?

(3 pont)

G. 886. Az ábrán látható két egyforma, párhuzamosan kapcsolt síkkondenzátort 200 V-ra töltjük, majd lekapcsoljuk a feszültségforrást. Ezután az egyik kondenzátor lemeztávolságát megkétszerezzük, a másikat megfelezzük. (A lemezek között levegő van.)



a) Hányszorosára változik az eredő kapacitás?

b) Mekkora lesz a feszültség?

c) Hány százalékkal változik az egyes kondenzátorok elektrosztatikus energiája?

(4 pont)

G. 887. Egy acélgolyó átmérője 0°C -on 4,160 cm, egy alumíniumlemezben lévő, lézervágási technikával készült kör alakú lyuk átmérője pedig ugyancsak 0°C -on 4,150 cm.

A lineáris hőtágulási együtthatók: $\alpha_{\text{Al}} = 2,4 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{K}}$ és $\alpha_{\text{acél}} = 1,2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{K}}$. (A hőtágulási együtthatók hőmérsékletfüggésétől tekintsünk el.)

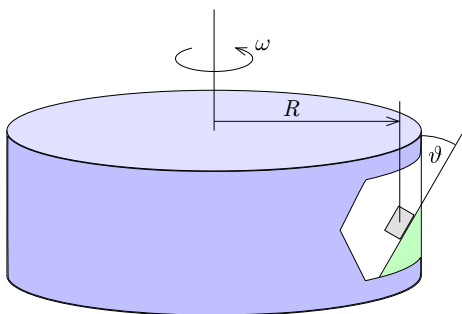
a) Mekkora az acélgolyó hőmérséklete, amikor éppen átfér a $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ -os alumíniumlemezen lévő lyukon?

b) Mekkora az alumíniumlemez hőmérséklete, amikor a kivágáson éppen átfér a $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ -os acélgolyó?

c) Mekkora az a közös hőmérséklet, aminél a lyuk és a golyó átmérője egyforma?

(4 pont)

G. 888. Egy vidámparkban egy hatalmas, forgó henger belsejében a henger palástjánál elhelyezett ferde felülethez tapadnak az emberek. A henger sugara $R = 5\text{ m}$, a tapadási súrlódási együttható $\mu = 0,25$, a ferde felület az ábrán látható módon $\vartheta = 30^{\circ}$ -os szöget zár be a függőlegessel.



a) Legalább és legfeljebb mennyi lehet a henger szögsebessége, hogy az emberek se lefelé, se felfelé ne csússzanak?

b) Mekkora lehet a súrlódási együttható, hogy akármilyen kicsiny szögsebesség-nél se csússzanak lefelé az emberek?

c) Mekkora lehet a súrlódási együttható, hogy akármilyen nagy szögsebesség esetén se csússzanak felfelé az emberek?

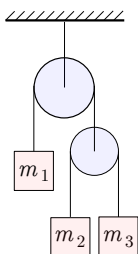
(4 pont)

P. 5643. Az m tömegű vízzel telt vödört felhúzzuk a h mélységű kerekes kútból, miközben a kötel egyenletesen feltekeredik az M tömegű hengerre. A legtetejéről elengedjük a vödört. Mekkora gyorsulással esik le a vödör? Mennyi idő múlva és mekkora sebességgel csapódik a vízbe a vödör? A henger egyenletes tömegeloszlású, a vízzel telt vödört pontszerű testnek tekinthetjük, a kötel tömegét elhanyagolhatjuk.

Adatok: $m = 11\text{ kg}$, $M = 8\text{ kg}$, $h = 5\text{ m}$.

(4 pont)

Közli: Cserti József, Budapest



P. 5644. Milyen egyetlen, m tömeggel kellene helyettesíteni az ábrán szereplő jobb oldali csigát és a rajta lévő tömegeket, hogy az m_1 tömegű test ugyanúgy mozogjon, mint az eredeti elrendezésben? Hanyagoljuk el a csigák tömegét és a súrlódást.

(4 pont)

Közli: Siposs András, Budapest

P. 5645. Egy motoros 36 km/h sebességgel hajt be egy félkör alakú, „vissza-fordító” kanyarba. Az aszfalt és a kerekek közötti tapadási súrlódási együttható 0,58. A motoros mindvégig egy 40 m sugarú köríven tartja járművét (pontosabban a motor és a motoros közös tömegközéppontját), és közben végig egyenletesen növeli annak sebességét.

a) Legfeljebb hány m/s-mal növelheti a motoros másodpercenként a sebességét?

b) Mekkora sebességre gyorsulhat fel a versenyző a kanyar végére?

c) Hogyan változik a motoros függőlegessel bezárt szöge a kanyarban?

(5 pont)

Közli: Kis Tamás, Heves

P. 5646. Űrutazást terveznek a Marsra. Az űrhajó a Földet elhagyva olyan ellipszis pályára áll, amely érinti a két bolygópályát, perihéliumába esik a felszállás, aphéliumába pedig a megérkezés. A visszaút hasonló ellipszispályán történik. Az induláshoz mindkét esetben ki kell várni, amíg a két bolygó megfelelő helyzetbe kerül. Mennyi ideig tart az oda-, illetve visszaút, és legalább mennyi időt fognak a Marson tölteni? A bolygópályákat tekintsük azonos síkban fekvő köröknek, a Mars keringési ideje 687,0 földi nap.

(5 pont)

Közli: Vladár Károly, Kiskunhalas

P. 5647. Egy villanybojler néhány óra alatt melegíti fel a 20 °C-os (szobahőmérsékletű) vizet 60 °C-ra. Ha ezután egyáltalán nem folytatunk melegvizet, és a készüléket lekapcsoljuk a hálózatról, a víz hőmérséklete kb. 7 nap alatt csökken 40 °C-ra. Ha melegen tartjuk a bojlerben a vizet, de nem használjuk, akkor hány napos elektromos fogyasztás kerül ugyanannyiba, mint a szobahőmérsékletű víz egyszeri felmelegítése? (Feltételezhetjük, hogy a bojler hőleadása arányos a víz és a környezet hőmérséklet-különbségével.)

(5 pont)

Közli: Gnädig Péter, Vácduka

P. 5648. Legyen a térben N különálló pont. Minden pontot kössünk össze az összes többivel azonos R ellenállásokkal. Mennyi az eredő ellenállás két tetszőleges pont között?

(5 pont)

Közli: Baranyai Klára, Veresegyház

P. 5649. Péter -4 dioptriás szemüveget hord, és így olyan tárgyakat képes tisztán látni, amelyek legalább 25 cm távolságra vannak. Milyen távolságra lévő tárgyakat lát Péter tisztán, ha leveszi a szemüvegét?

(4 pont)

Közlő: Széchenyi Gábor, Budapest

P. 5650. Egy kis démon standard állapotú (100 kPa, 25°C) héliumgázban kijelöl egy 1 nm oldalhosszúságú kocka alakú térrészt, és időről időre megszámolja, hány atom magja található a térfogatban. Milyen valószínűséggel talál nulla, egy vagy két atommagot a kocka alakú tartományban?

(5 pont)

Példatári feladat nyomán

P. 5651. Egy szigetelt, egyenletesen σ felületi töltéssűrűséggel rendelkező szabályos háromszög alakú lap minden oldala $\sqrt{2}a$ hosszúságú. Mekkora az elektromos térerősség értéke abban a pontban, amely minden csúcsponttól a távolságra helyezkedik el?

(6 pont)

KVANT feladat

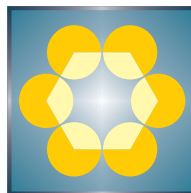


Beküldési határidő: 2025. május 15.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS (Volume 75. No. 4. April 2025)



Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 222): **K. 854.** Uncle János makes the following statements about himself: “When I was born, my mother was more than 20 years old. If we add 1 to both digits of her age at that time, and swap the two digits of the resulting number, we get the current age of my mother. My mother is in good health, and she is not yet 90 years old. I’m 56 years old.” Find the age of the mother of Uncle János when he was born. **K. 855.** Three ships left the dock at the same time. One ship was travelling north, and the other two were travelling southeast. All three ships arrived at their first stop at the same exact time. The pair travelling in the same direction split up, one of them kept travelling southeast, but the other one started in the direction of the third ship that was stationary at its first stop. Once again, they’ve reached their destination at the same exact time. In what direction should the two ships being at the same place travel to reach the second destination of the ship that was travelling southeast all along? (Proposed by: *Katalin Abigél Kozma*, Győr) **K. 856.** We have a bag filled with red, blue, and green marbles. The total number of the marbles is 25. There is a paper attached to the bag containing the following statements: • There are more blue marbles than red in the bag. • The total number of the red and blue marbles is 22. • The difference between the number of the red and the number of the blue marbles is less than the number of green marbles. • There are more blue marbles, than the red and the green marbles combined.

• There are two colors with the same number of marbles in the bag. We know that exactly one of these five statements is false. What can be the possible number of marbles of each color? (Proposed by: *Mátyás Czett*, Budapest) **K/C. 857.** For which real numbers x, y will inequality $x^2 + y^2 \geq (x+1)(y-1)$ hold? For which real numbers will equality hold? (Proposed by: *Bálint Bíró*, Eger) **K/C. 858.** We drew four small blue squares in a 4×1 rectangle according to the diagram (see page 223). Find the ratio of the area of a single blue square and the 4×1 rectangle. (Proposed by: *Bálint Bíró*, Eger)

New exercises for practice – competition C (see page 224): **Exercises up to grade 10: K/C. 857.** See the text at Exercises **K. K/C. 858.** See the text at Exercises **K. Exercises for everyone: C. 1853.** Some researchers are observing a team of fifty bumblebees buzzing on a flowery sandbank. They excitedly note that each bumblebee collected pollen from exactly four types of flowers before flying off. In fact, they also recorded that each bumblebee chose a different set of four flowers, but all 50 bumblebees visited a common baby’s-breath. Prove that the bumblebees collected pollen from at least 9 different types of flowers. (Proposed by: *Zoltán Paulovics*, Budapest) **C. 1854.** Circles k_1 and k_2 intersect each other in points A and B such that circle k_2 passes through center K of circle k_1 . Let’s choose point S on circle k_2 such that S is closer to point A than to point B , and it’s not in the interior of circle k_1 . Let line BS intersect circle k_1 at point D for the second time, and let line AD intersect circle k_2 at point T for the second time. Prove that KT is perpendicular to BS . (Greek competition problem) **C. 1855.** 19 drones flew over enemy territory following the security protocol requiring the distances of all pairs of drones being different. Since the drones were hacked, they start to fire at each other: each one eliminates the drone that is the nearest to them. (We suppose that each drone managed to fire, the drones can be considered points, and the drones only explode after all the shots reached their goals.) Will there be a survivor among the drones? What is the maximum number of bullets a drone can be hit by from the same plane (that also contains the given drone)? (Proposed by: *Zoltán Paulovics*, Budapest)

Exercises upwards of grade 11: C. 1856. Prove the following inequality for every triangle (using the usual notations for the sides and the angles): $a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma \geq \frac{a+b+c}{3} (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)$. When will the equality hold? (Proposed by: *Gábor Holló*, Budapest) **C. 1857.** Find all triples of positive prime numbers p, q and r that satisfy the system of equations $p + q = r + 1$, $p \cdot r = q^2 + 6$. (German competition problem)

New exercises – competition B (see page 225): **B. 5454.** Positive integers $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2024}, a_{2025}$ are chosen such that fractions $\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \frac{a_3}{a_4}, \dots, \frac{a_{2024}}{a_{2025}}$ have pairwise different values. At least how many of the numbers must be different? (4 points) (Proposed by: *Attila Sztranyák*, Budapest) **B. 5455.** Let P be the intersection of lines AB and CD , where $ABCD$ is a convex quadrilateral. Let points M and N be the midpoints of the diagonals. Prove that the area of triangle PMN equals one quarter of the area of quadrilateral $ABCD$. (4 points) (Proposed by: *Sándor Róka*, Nyíregyháza) **B. 5456.** Which can be the smallest and the largest of numbers $a^{\log_b c}, b^{\log_c a}, c^{\log_a b}$, provided that $1 < a < b < c$? (3 points) (Proposed by: *Bálint Hujter*, Budapest) **B. 5457.** The angles of a triangle are $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, and its longest side is of unit length. Prove that the triangle is obtuse if and only if the reciprocal of its area is more than $2(\tan \alpha + \tan \beta)$. (4 points) (Proposed by: *Mihály Hujter*, Budapest) **B. 5458.** Let I be the incenter of triangle ABC , and let $AB < AC$. The perpendicular to AI passing through I intersects line BC at P , and line segment AP intersects the circumcircle of triangle ABC at Q for the second time. Prove that IQ is perpendicular to AP . (5 points) (Proposed by: *Géza Kós*, Budapest) **B. 5459.** Find all functions $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ satisfying $f(x) + f(y) = \frac{f(x+2y) + f(2x-y)}{5}$ for all rational numbers x, y . (5 points) (Proposed by: *Erik Füredi*, Budapest) **B. 5460.** In acute triangle ABC let D, E and F denote the feet of the altitudes from A, B and C , respectively. Let line DE intersect circle ABC at points G, H . Similarly, let line DF intersect circle ABC at points

I, J . Prove that the radical axis of circles EIJ and FGH passes through the orthocenter of triangle ABC . (6 points) (Proposed by: *Viktor Csaplár, Bátorkeszi*) **B. 5461.** Prove that for any positive integers a, b, c and d there exists infinitely many positive integers n for which $a^n + bc$ and $b^{n+d} - 1$ are not relatively primes. (6 points) (Proposed by: *Géza Kós, Budapest, based on IMO2024/2*)

New problems – competition A (see page 226): **A. 905.** We say that a strictly increasing sequence of positive integers $n_1, n_2, \dots$ is *non-decelerating* if $n_{k+1} - n_k \leq n_{k+2} - n_{k+1}$ holds for all positive integers k . We say that a strictly increasing sequence $n_1, n_2, \dots$ is *convergence-inducing*, if the following statement is true for all real sequences $a_1, a_2, \dots$: if subsequence $a_{m+n_1}, a_{m+n_2}, \dots$ is convergent and tends to 0 for all positive integers m , then sequence $a_1, a_2, \dots$ is also convergent and tends to 0. Prove that a non-decelerating sequence $n_1, n_2, \dots$ is convergence-inducing if and only if sequence $n_2 - n_1, n_3 - n_2, \dots$ is bounded from above. (Proposed by: *András Imolay, Budapest*) **A. 906.** Let $\mathcal{V}_c$ denote the infinite parallel ruler with the parallel edges being at distance c from each other. The following construction steps are allowed using ruler $\mathcal{V}_c$: • the line through two given points; • line l' parallel to a given line l at distance c (there are two such lines, both of which can be constructed using this step); • for given points A and B with $|AB| \geq c$ two parallel lines at distance c such that one of them passes through A , and the other one passes through B (if $|AB| > c$, there exists two such pairs of parallel lines, and both can be constructed using this step). On the perimeter of a circular piece of paper three points are given that form a scalene triangle. Let n be a given positive integer. Prove that based on the three points and n there exists $C > 0$ such that for any $0 < c \leq C$ it is possible to construct n points using only $\mathcal{V}_c$ on one of the excircles of the triangle. *We are not allowed to draw anything outside our circular paper. We can construct on the boundary of the paper; it is allowed to take the intersection point of a line with the boundary of the paper.* (Proposed by: *Áron Bán-Szabó, Budapest*) **A. 907.** 2025 light bulbs are operated by some switches. Each switch works on a subset of the light bulbs. When we use a switch, all the light bulbs in the subset change their state: bulbs that were on turn off, and bulbs that were off turn on. We know that every light bulb is operated by at least one of the switches. Find the biggest number k for which we can surely turn on at least n light bulbs. *(Based on an OKTV problem)*

Problems in Physics

(see page 250)

M. 440. Fold a paper air-plane and measure the lift-to-drag ratio. Try to make it sink evenly over as long a distance as possible.

G. 885. The refractive index of the core of an optical fibre is 1.6 and that of the cladding is 1.5. What can the maximum angle between a ray of light and the axis of the optical fibre be in order to produce total reflection inside the fibre? A light ray enters from air into the glass fibre at the centre of the cross sectional plane of the fibre, which is perpendicular to the symmetry axis of the fibre. What is the maximum angle of incidence of the light ray? **G. 886.** Two identical parallel plate capacitors are connected in parallel, as shown in the figure. They are charged to 200 V and then the voltage source is disconnected. Then the distance between the plates of one of the capacitors is doubled and that of the other is halved. (There's air between the plates.) *a)* By what factor does the equivalent capacitance of the system change? *b)* What will the voltage be? *c)* By what percentage does the energy stored in each capacitor change? **G. 887.** A steel ball has a diameter of 4.160 cm at 0°C , and a circular hole in an aluminium sheet, made by laser cutting technology, has a diameter of 4.150 cm at 0°C . The coefficients of linear expansion are: $\alpha_{\text{Al}} = 2.4 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{K}}$ and $\alpha_{\text{steel}} = 1.2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{K}}$. (Ignore the temperature dependence of the

coefficients of thermal expansion.) *a)* What is the temperature of the steel ball when it is just passing through the hole in the 0°C aluminium plate? *b)* What is the temperature of the aluminium sheet when a steel ball of temperature 0°C can just fit through the hole? *c)* What is the common temperature at which the hole and the ball have the same diameter? **G. 888.** In an amusement park inside a giant rotating cylinder, people cling to a slant surface attached to the cylinder's mantle. The radius of the cylinder is $R = 5\text{ m}$, the coefficient of static friction is $\mu = 0.25$, and the slant surface makes an angle of $\vartheta = 30^{\circ}$ with the vertical as shown *in the figure*. *a)* What is the minimum and maximum angular speed of the cylinder so that people do not slide up or down? *b)* What is the coefficient of friction such that people do not slip off at any small angular velocity? *c)* What is the coefficient of friction such that people do not slide upwards at any angular velocity?

P. 5643. A bucket of water of mass m is pulled up from a water well of depth h , while the rope is wound evenly on the cylinder of mass M . The bucket is released from the top. With what acceleration does the bucket fall? After how long and at what speed does the bucket hit the water? The cylinder has a uniform mass distribution, the bucket full of water can be considered as a point-like body, the mass of the rope can be neglected.

Data: $m = 11\text{ kg}$, $M = 8\text{ kg}$, $h = 5\text{ m}$. **P. 5644.** With what single mass m should the pulley with the two masses on the right *in the figure* be replaced so that the body with mass m_1 moves in the same way as it did originally? Neglect the mass of the pulleys and friction.

P. 5645. A motorcyclist drives at 36 km/h into a semi-circular "reverse" curve. The coefficient of static friction between the asphalt and the wheels is 0.58 . The motorcyclist keeps his vehicle (more precisely, the centre of gravity of the motorcycle and the biker) on a circular arc of radius 40 m , while increasing its speed uniformly. *a)* At most by how many m/s can the motorcyclist increase his speed? *b)* To what speed can the rider accelerate at the end of the turn? *c)* How does the rider's angle with the vertical vary in the semi-circular turn? **P. 5646.** A space trip to Mars is planned. The spacecraft leaves the Earth and enters into an elliptical orbit that touches both planets' orbits. The spacecraft is at perihelion when it is launched and it is at aphelion when it arrives. The return journey follows a similar elliptical orbit. In both cases, departure requires waiting until the two planets are in the correct position. How long will it take to get there and back, and at least how much time will they spend on Mars? Consider the orbits as circles in the same plane, the orbital period of Mars is 687.0 Earth days. **P. 5647.** An electric water boiler heats up water from 20°C (room temperature) to 60°C in a few hours. If you then do not use hot water at all and disconnect the appliance from the mains, the temperature of the water will drop to 40°C in about 7 days. If we keep the water warm in the boiler but do not use it, how many days of electricity consumption will cost the same as heating up the room temperature water once? (It can be assumed that the heat dissipation of the boiler is proportional to the temperature difference between the water and the environment.)

P. 5648. Consider N distinct points in the space. Connect each point to all the others with the same resistors of resistance R . What is the equivalent resistance between any two points? **P. 5649.** Peter wears glasses with a power of -4 dioptres and can see objects that are at least 25 cm away clearly. How far away can Peter see objects clearly when he takes off his glasses? **P. 5650.** There is a little demon in a sample of helium gas, which is at standard temperature and pressure. The little demon selects a cube with side length of 1 nm and counts from time to time the number of nuclei of atoms in the cube. What is the probability of finding zero, one or two nuclei in the cubic region? **P. 5651.** Each side of an insulated equilateral triangle-shaped sheet with uniform surface charge density σ has a length of $\sqrt{2}a$. What is the value of the electric field strength at the point which is at a distance of a from each vertex?

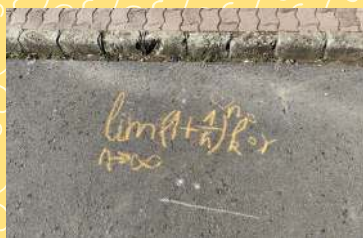
Képek a Matek az utcán rendezvényekről



Lapunk szerzője, Freud Róbert a Blaha Lujza téri rendezvényen



Nők és a Matematika



Aszfaltrajzok Debrecenben



Győri kincsesládák



Matek Oázis Nagykanizsán



A budapesti Vasarely múzeum udvarán

KöMaL Nyári Fizika Tábor – előzetes tájékoztatás

Kedves kitaláló KöMaL Versenyzők, kedves fizika iránt érdeklődő Diákok! Örömmel értesítünk Benneteket, hogy az elmúlt évek hagyományát követve, idén is megrendezésre kerül a **KöMaL Nyári Fizika Tábor június 29. (vasárnap) és július 5. (szombat)** között a szép természeti környezetet biztosító Dombóvár-Gunaras üdülőfaluban a 9–12. osztályt végző középiskolás diákok számára.

A táborban (külön tanárokkal és programmal) részt vesz a nemzetközi matematikai diákolimpiára készülő „matematikus csapat” is.

A tábor költségének nagy részét (szállás + napi háromszori étkezés, fürdőbelépő, jutalmak, előadók tiszteletdíja, stb.) pályázati forrásból biztosítja a MATFUND Alapítvány. A táborba való utazást mindenkinek önállóan kell megoldania.



A mindig remek hangulatú táborban öt napon keresztül tudjátok próbára tenni, fejleszteni fizikatudásotokat, miközben új barátokat szerezhetek a csapatmunka során. A táborszervezők minden nap egy-egy érdekes mérési, numerikus és néhány elméleti példa kiadásával tesztelik a csapatok felkészültségét, persze mindezt nyári hangulatban. Az esti órák csoportos beszélgetésekkel szoktak

telni, ahol a középiskolai oktatásból kimaradt területekbe is betekintést nyerhetnek az ez iránt érdeklődő táborozók, megtanulhatják például a deriválás vagy az integrálás alapjait. Az izzasztó feladatmegoldás mellett persze számos egyéb programmal is készülünk, melyek nem maradhatnak ki a KöMaL nyári táborából, mint a strandolás, túrázás, krumpliágyú kipróbálása, forrasztás, társasozás, labdajátékok, és a közös éneklés a tábortűz körül.



Ha a fentiek meghozták a kedveteket vagy már „rég” táborozók vagytok, szeretettel várjuk a jelentkezéseket, találkozunk a táborban!

A KöMaL feladatmegoldóknak a jelentkezési lapokat és további tájékoztatást május közepén fogjuk kiküldeni, a jelentkezéseket május 31-ig várjuk.

A program támogatói:



AIT-BUDAPEST



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



Nemzeti Kulturális Alap



ELTE
EÖTVÖS LORÁNC
TUDOMÁNYOS EGYETEM