

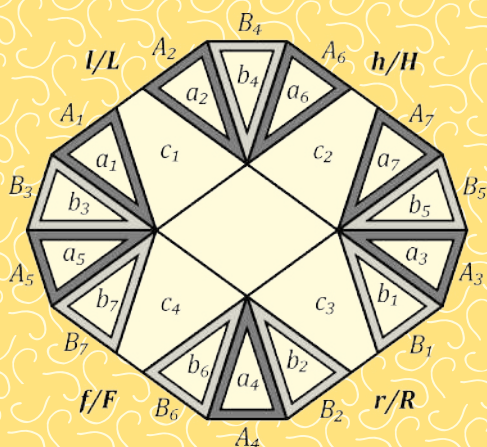
Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok

Informatika rovattal

Támogassa lapunk kiadását
adója **1%-ával** – **18157444-2-43**

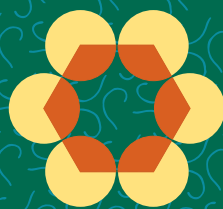


Kép a P. 5658-as fizika feladathoz



Az FCP struktúrája

Beszámoló az idei EGMO versenyről | Újabb bonyolult
összegek és szorzatok, 3. rész | Beszélgetés a 98 éves
Obádovics Gyulával | Felhívás a Forráspont
Fizikátáborra | Az FCP matematikájáról



KöMaL

75. évfolyam
5. szám
2025.
május



EGMO 2025



A guide (Shpendi Deva), Kocsis Anett (helyettes csapatvezető), Hodossy Réka, Keresztély Zsófia, Zhai Yufan, Elekes Dorottya, Kiss Melinda Flóra (csapatvezető), Jankó Zsuzsanna, Csahók Tímea és Szabó Kornél (koordinátorok)

Prizern



Prizern – látkép az erődből



Pristina



KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE

ALAPÍTOTTA: ARANY DÁNIEL 1894-ben

75. évfolyam 5. szám

Budapest, 2025. május

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta. ÁRA: 1450 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

<i>Freud Róbert</i> : Újabb bonyolult összegek és szorzatok, 3. rész	258
<i>Mágori Marcell, Víg Viktor</i> : Egy Rubik-kocka variánsról II.	262
Gács András díj, 2025.	267
Beszámoló a 2025. évi EGMO versenyről	268
<i>Birkás György</i> : Beszélgetés Obádovics Gyulával	273
<i>Fonyóné Németh Ildikó, Fonyó Lajos</i> : Megoldásvázlatok a 2025./4. szám matematika gyakorló feladatsorához	279
Matematika C gyakorlatok megoldása (1842.) .	285
Gratulálunk Oláh Verának, lapunk korábbi főszerkesztőjének!	286
A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok (859–863.)	287
A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (862–863., 1858–1862.)	288
A B pontversenyben kitűzött feladatok (5462–5469.)	289
Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (908–910.)	290
Informatikából kitűzött feladatok (663–666.) ..	291
Fizika gyakorlatok megoldása (873., 874., 876., 879., 880.)	297
Fizika feladatok megoldása (5610., 5616., 5619., 5626., 5631.)	303
Felhívás a Forráspont Fizikátaborra	313
Fizikából kitűzött feladatok (441., 889–892., 5652–5660.)	313
Problems in Mathematics	317
Problems in Physics	319

Főszerkesztő: KORÁNDI JÓZSEF

Fizikus szerkesztő: VANKÓ PÉTER

Műszaki szerkesztő: FRIED KATALIN

Borító: BURGHARDT ZSUZSA

Kiadja: MATFUND ALAPÍTVÁNY

Alapítványi képviselő: KÓS RITA

Felelős kiadó: KATONA GYULA

Nyomda: OOK-PRESS Kft.

Felelős vezető: SZATHMÁRY ATTILA

INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A matematika bizottság vezetője:

HERMANN PÉTER

Tagjai: BÁN-SZABÓ ÁRON, BÍRÓ BÁLINT, CZETT MÁTYÁS, GYENES ZOLTÁN, HUJTER BÁLINT, IMOLAY ANDRÁS, KISS GÉZA, KÓS GÉZA, KOZMA KATALIN ABIGÉL, LOVAS MÁRTON, ÖKÖRDI PÉTERNÉ, PACH PÉTER PÁL, PAULOVSIC ZOLTÁN, RATKÓ ÉVA, SZTRANYÁK ATTILA, VÍGH VIKTOR

A fizika bizottság tiszteletbeli elnöke:

HOLICS LÁSZLÓ

Vezetője: SZÉCHENYI GÁBOR

Tagjai: BARANYAI KLÁRA, GNÄDIG PÉTER, HONYEK GYULA, OLOSZ BALÁZS, SZÁSZ KRISZTIÁN, VÍGH MÁTÉ, VLADÁR KÁROLY, WOYNAROVICH FERENC

Az informatika bizottság vezetője:

SCHMIEDER LÁSZLÓ

Tagjai: LÓCZI LAJOS, SIEGLER GÁBOR, TÓTH TAMÁS

Fordítók: GYENES ZOLTÁN, TASNÁDI ANIKÓ

Nyelvi korrektor: ANDICS ÁGNES

Szerkesztőségi titkár: ONDINÉ SZABÓ SÁRA

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest,
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
Telefon: +36 20 320-1143

A lap megrendelhető a
<https://komalujsg.myshoprenter.hu>
oldalon keresztül.

Előfizetési díj egy évre: 12 000 Ft
Kéziratokat nem őrzünk meg és nem küldünk vissza.
Minden jog a KöMaL tulajdonosaié.
E-mail: szerk@komal.hu
Internet: <http://www.komal.hu>

This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 20 320-1143
or on the Internet:
<https://komalujsg.myshoprenter.hu>.
A Lapban megjelenő hirdetések tartalmáért
felelősséget nem vállalunk.



Újabb bonyolult összegek és szorzatok, 3. rész

A KöMaL előző, 2025 áprilisi számában jelent meg további négy feladat, amelyekben bizonyos összegek, illetve szorzatok kiszámítása volt a cél, de az Olvasónak érdemes a néhol vázlatos vagy hiányzó lépéseket önállóan végiggondolnia. A megoldások során hivatkozunk a márciusi számban az ott közölt feladatok után szereplő útmutatásokra is.

$$5. \sum_{j=0}^{n-1} \cos \left(\frac{(2j+1)\pi}{2n+1} \right).$$

Megoldás. Komplex számokat használunk. Legyen S a kérdéses összeg, $\alpha = \pi/(2n+1)$ és $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$. Ekkor $z^{2n+1} = -1$ és S a valós része az alábbi T összegnek:

$$\begin{aligned} T &= z + z^3 + z^5 + \dots + z^{2n-1} = \frac{z - z^{2n+1}}{1 - z^2} = \frac{z + 1}{1 - z^2} = \frac{1}{1 - z} = \\ &= \frac{1 - \bar{z}}{|1 - z|^2} = \frac{1 - \cos \alpha + i \sin \alpha}{(1 - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha + i \sin \alpha}{2 - 2 \cos \alpha}. \end{aligned}$$

$$\text{Így } S = \operatorname{Re}(T) = \frac{1 - \cos \alpha}{2(1 - \cos \alpha)} = \frac{1}{2}.$$

$$6. \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{m}{j} \binom{k-j}{n}.$$

Megoldás. A váltakozó előjel a logikai szitaformulát sugallja. Tekintsük a következő feladatot: Az $\{1, 2, \dots, k\}$ halmaznak hány olyan n elemű részhalmaza van, amely tartalmazza az $1, 2, \dots, m$ számok mindegyikét.

Ez azt jelenti, hogy a többi $k - m$ szám közül kell választanunk $(n - m)$ -et. Tehát $\binom{k-m}{n-m}$ ilyen részhalmaz van.

Ugyanezt szitával is megkaphatjuk. Ha az $1, 2, \dots, m$ számok közül j darabról tudjuk, hogy hiányoznak, akkor ez a j szám $\binom{m}{j}$ -féle lehet, és ilyenkor mind az n számot a többi $k - j$ szám közül kell választani. Így a logikai szitaformula éppen a keresett váltakozó előjelű összeget adja. Ennek értéke tehát $\binom{k-m}{n-m}$.

7. $\sum_{j|n} \sigma(j) \varphi \left(\frac{n}{j} \right)$, ahol $\sigma(j)$ a j pozitív osztóinak az összege és $\varphi(j)$ az Euler-féle φ -függvény, azaz az $1, 2, \dots, j$ egészek között a j -hez relatív prímek száma.

Megoldás. Definíció szerint $\sigma(k) = \sum_{d|k} d$. Szükségünk lesz még a $\sum_{s|k} \varphi(s) = k$ összefüggésre. Ez abból következik, hogy az $\frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, \frac{k}{k}$ törtek száma egyrészt

k , másrészt az egyszerűsítés után minden $s \mid k$ -ra az s nevezőjű törtek száma éppen $\varphi(s)$.

A feladatot ügyes összeg-átrendezéssel oldjuk meg:

$$\begin{aligned}\sum_{j \mid n} \sigma(j) \varphi\left(\frac{n}{j}\right) &= \sum_{j \mid n} \left(\sum_{d \mid j} d \right) \varphi\left(\frac{n}{j}\right) = \sum_{d \mid n} d \left(\sum_{d \mid j \mid n} \varphi\left(\frac{n}{j}\right) \right) = \\ &= \sum_{d \mid n} d \left(\sum_{s \mid \frac{n}{d}} \varphi(s) \right) = \sum_{d \mid n} d \cdot \frac{n}{d} = nd(n),\end{aligned}$$

ahol $d(n)$ az n pozitív osztóinak a száma.

$$8. a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^n \sigma(j)}{n^2}.$$

Megoldás. Ismét összeg-átrendezéssel oldjuk meg a feladatot. Mivel a természetesen adódó út nem vezet célhoz, egy újabb trükköt is be kell majd vetnünk.

Felhasználjuk bizonyítás nélkül, hogy a négyzetszámok reciprokösszege $\pi^2/6$, azaz

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{d=1}^k \frac{1}{d^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (16)$$

Szükségünk lesz még arra is, hogy az n -nél nem nagyobb pozitív egészek reciprokösszege n -nel osztva 0-hoz tart, azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{d=1}^n \frac{1}{d}}{n} = 0. \quad (17)$$

Ennek igazolásához vegyük észre, hogy

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 2 \cdot \frac{1}{2} = 1, \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} < 4 \cdot \frac{1}{4} = 1,$$

és általában is,

$$\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}-1} < 2^k \cdot \frac{1}{2^k} = 1. \quad (18)$$

Legyen $2^r \leq n < 2^{r+1}$. Ekkor (18) alapján

$$\sum_{d=1}^n \frac{1}{d} \leq \sum_{k=0}^r 1 = r+1, \text{ tehát } \frac{\sum_{d=1}^n \frac{1}{d}}{n} \leq \frac{r+1}{2^r}. \quad (19)$$

Teljes indukcióval könnyen adódik, hogy (pl.) $r \geq 6$ -ra $\frac{r+1}{2^r} < \frac{1}{2^{r/2}}$. Ez (19) alapján igazolja (17)-et.

Rátérünk a feladat megoldására. Legyen $S_n = \sum_{j=1}^n \sigma(j)$, írjuk be a $\sigma(j) = \sum_{d|j} d$ összefüggést, és rendezzük át az összeget:

$$S_n = \sum_{j=1}^n \sigma(j) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{d|j} d \right) = \sum_{d=1}^n d \left(\sum_{d|j \leq n} 1 \right) = \sum_{d=1}^n d \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor.$$

Mivel $\frac{n}{d} - 1 < \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \leq \frac{n}{d}$, ezért

$$\sum_{d=1}^n d \left(\frac{n}{d} - 1 \right) < S_n \leq \sum_{d=1}^n d \cdot \frac{n}{d}. \quad (20)$$

Itt $\sum_{d=1}^n d \cdot \frac{n}{d} = n^2$ és $\sum_{d=1}^n d = n(n+1)/2$, így (20) átírható az

$$n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} < S_n \leq n^2$$

alakba. Innen

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} < \frac{S_n}{n^2} \leq 1.$$

Ebből csak az látszik, S_n/n^2 nagyjából $1/2$ és 1 közé esik, de nem derül ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n/n^2$ határérték, sőt annak létezése sem.

Ugyanakkor a komplementer osztók segítségével már működni fog ugyanez a módszer. Mivel $d | j \iff \frac{j}{d} | j$, ezért $\sigma(j) = \sum_{d|j} \frac{j}{d}$. Így

$$S_n = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{d|j} \frac{j}{d} \right) = \sum_{d=1}^n \left(\sum_{j=ds \leq n} \frac{j}{d} \right) = \sum_{d=1}^n \left(\sum_{s=1}^{\lfloor n/d \rfloor} s \right) = \sum_{d=1}^n \frac{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor (\lfloor \frac{n}{d} \rfloor + 1)}{2}.$$

Az egész részeket a szokásos módon becsülve

$$\sum_{d=1}^n \frac{(\frac{n}{d} - 1) \frac{n}{d}}{2} < S_n = \sum_{d=1}^n \frac{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor (\lfloor \frac{n}{d} \rfloor + 1)}{2} \leq \sum_{d=1}^n \frac{\frac{n}{d} (\frac{n}{d} + 1)}{2},$$

azaz

$$\frac{n^2}{2} \sum_{d=1}^n \frac{1}{d^2} - \frac{n}{2} \sum_{d=1}^n \frac{1}{d} < S_n \leq \frac{n^2}{2} \sum_{d=1}^n \frac{1}{d^2} + \frac{n}{2} \sum_{d=1}^n \frac{1}{d}$$

adódik. Ez azt jelenti, hogy

$$\left| \frac{S_n}{n^2} - \frac{1}{2} \sum_{d=1}^n \frac{1}{d^2} \right| \leq \frac{1}{2n} \sum_{d=1}^n \frac{1}{d}. \quad (21)$$

Ha n tart a végtelenhez, akkor (21) jobb oldala (17) alapján 0-hoz, a bal oldali $\frac{1}{2} \sum_{d=1}^n \frac{1}{d^2}$ összeg pedig (16) szerint $\pi^2/12$ -höz tart. Tehát a feladatban kért határérték

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

8 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^n r(j)}{n}$, ahol $r(j)$ a j előállításainak a száma két négyzetszám összegeként; pl. $r(3) = 0$; $r(5) = 8$, mert $5 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2$; $r(4) = 4$, mert $4 = (\pm 2)^2 + 0^2 = 0^2 + (\pm 2)^2$.

Megjegyzés. A feladat arra keresi a választ, hogy egy pozitív egész átlagosan hányféleképpen áll elő két egész szám négyzetének összegeként.

Megoldás. Az $r(j)$ függvényre pontos (bonyolult) képlet létezik (lásd pl. [2]), ez azonban egyáltalán nem segítené a feladat megoldásában. Ehelyett egy kis geometriát használunk. A fő észrevétel az, hogy a számlálóban szereplő $R(n) = \sum_{j=1}^n r(j)$ összeg éppen az origó körüli $\sqrt{n}$ sugarú K körben az origón kívüli egész koordinátájú pontok, azaz rácspontok száma. Minden rácspont köré egy egységnyi területű négyzetet rajzolva, egy olyan Q alakzatot (cikkcakkos határvonalú sokszöget) kapunk, amelynek a T területe éppen a rácspontok száma, azaz $R(n) + 1$. Mivel Q elég jól illeszkedik a K körhöz, ezért várhatóan a területük is közel van egymáshoz. Ez azt jelenti, hogy az $R(n)$ összeg jó közelítéssel $(\sqrt{n})^2 \pi = n\pi$. Így a keresett $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R(n)}{n}$ határérték π . (Ugyanez a gondolatmenet szerepelt [1]-ben is a 7. feladat megoldásánál.)

Ez a heurisztikus okoskodás a következőképpen tehető precízzé. A rácspontok körüli kis négyzetek mindegyike teljesen benne van az origó körüli $\sqrt{n} + (1/\sqrt{2})$ sugarú körben, így

$$R(n) + 1 = T \leq \pi \left(\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = \pi \left(n + \sqrt{2n} + \frac{1}{2} \right). \quad (22)$$

Ugyanígy a rácspontok körüli kis négyzetek teljesen lefedik az origó körüli $\sqrt{n} - (1/\sqrt{2})$ sugarú kört, így

$$R(n) + 1 = T \geq \pi \left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = \pi \left(n - \sqrt{2n} + \frac{1}{2} \right). \quad (23)$$

A (22) és (23) egyenlőtlenségek alapján

$$\left| \frac{R(n) + 1}{n} - \pi \right| \leq \sqrt{\frac{2}{n}} + \frac{1}{2n}. \quad (24)$$

Mivel (24) jobb oldala, valamint a bal oldalon $1/n$ tart a 0-hoz, ha n tart a végtelenhez, így a keresett $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R(n)}{n}$ határérték π .

Meglepőnek tűnhet, hogy a 8. feladat mindkét számelméleti kérdésére adott válaszban megjelent a π . Azonban ez is csak azt mutatja, hogy a matematika különböző területei ezer szállal kötődnek egymáshoz, és így alkotnak egy egységes egészt.

Irodalom

- [1] Freud Róbert: Mire jó (időnként) a dolgok elbonyolítása, 1. rész, KöMaL 1994. december, 481–484; 2. rész, KöMaL 1995. január, 1–6.
- [2] Freud Róbert – Gyarmati Edit: Számelmélet, 7.5.1 Tétel, <https://freud.web.elte.hu>

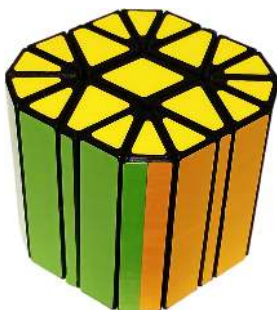
Freud Róbert



Egy Rubik-kocka variánsról II.

Az előző számban a cikk első részében bemutatottuk a Floppy Comet Cube-ot (röviden FCP-t), amely egy Rubik-kocka variáns. Szóltunk a tervezési folyamatról, és megismerkedtünk a játék belső mechanikájával. Ebben a részben immár az FCP megértésére törekszünk, egyúttal a példáján keresztül bemutatva, mi módon lehet egy ilyen bűvös kockát matematikai eszközökkel vizsgálni.

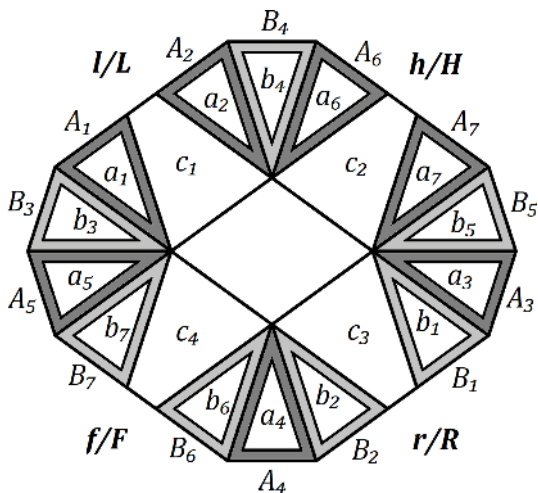
Az FCP leírása



1. ábra

Az elkészült kockának 19 (valódi) alkatrésze van, ezek közül egy rombusz alapú hasáb a kocka „magja”. Ezt négy, szimmetrikus trapéz alapú hasáb veszi körül, amelyekre lapközepekként, vagy szimplán közepekként hivatkozunk majd, jelük c_1, c_2, c_3 és c_4 a 2. ábra szerint. A helyüket nem tudják elhagyni, de 180 fokkal elfordulva „fejre állhatnak” – ezt a továbbiakban úgy mondjuk, hogy megváltoztatják az orientációjukat. (Az FCP-n minden „értelmes” forgatás 180° egész számú többszöröse, így a továbbiakban „forgatáson” mindig 180° -os forgatást értünk.)

Végül van 14 darab sarki elem, mindegyik háromszög alapú hasáb, amelyeket a Rubik-kockával való analógia miatt éleknek fogunk nevezni. Egy ilyen él-elem lehet-



2. ábra. Rögzítsük a kocka térbeli helyzetét a kirakott állapotban, és vezessük be az itt látható jelöléseket.

séges pozícióit gondosan megvizsgálva azt figyelhetjük meg, hogy egy hét hosszúságú utat jár be; és megállapíthatjuk, hogy a 14 él két pályába rendeződik. Az A és B pályán belül az élek tetszőlegesen permutálódhatnak, de a két pálya egymástól *idegen*, vagyis az A pálya egyik eleme sem kerülhet át a B pályára, és persze a B elemei sem az A -ra. Bármely élre is igaz, hogy egy öt tartalmazó elforgatás megváltoztatja az orientációját. A 2. ábra jelöléseit használva az A pálya elemei: $a_1, a_2, \dots, a_7$, míg a B pálya elemei: $b_1, b_2, \dots, b_7$. Meg kell különböztessük az egyes elemekhez tartozó pozíciókat is: a kirakott állapotban lévő FCP p_i elemének pozícióját P_i jelöli.

Jelölje továbbá l, h, r és f a megfelelő lapokat az ábra szerint. Az ezeken végrehajtható forgatásokra mindig a megfelelő nagybetűkkel hivatkozunk, azaz pl. R az r lap 180 fokos elforgatását jelöli.

A következő táblázat összefoglalja az L, H, R, F forgatások hatását az élekre és a közepekre. Az éleknél a két pályát külön oszlopokban tüntettük fel. A közepeken az orientációváltást $*$ jelzi. Az élek között minden esetben páronkénti cserék, úgynevezett transzpozíciók történnek.

	A	B	C_1	C_2	C_3	C_4
L	$A_1 \leftrightarrow A_2, A_5 \leftrightarrow A_6$	$B_3 \leftrightarrow B_4$	$*$			
H	$A_2 \leftrightarrow A_3, A_6 \leftrightarrow A_7$	$B_4 \leftrightarrow B_5$		$*$		
R	$A_3 \leftrightarrow A_4$	$B_1 \leftrightarrow B_2, B_5 \leftrightarrow B_6$			$*$	
F	$A_4 \leftrightarrow A_5$	$B_2 \leftrightarrow B_3, B_6 \leftrightarrow B_7$				$*$

1. táblázat. A forgatások definíciói

Vizsgáljuk meg közelebbről az A és B pályákat. Megfigyelhetjük, hogy minden élre maximum két lap forgatása lehet hatással, például A_2 -ből L és H tudja elmozgatni az ott levő alkatrészt. Sőt, mindkét pályának van két-két „zsákutcája” is, ezekből a pozíciókból csupán egy forgatás vezet ki: A_1 -re csak L , A_7 -re csak H , B_1 -re csak R , míg B_7 -re csupán F van hatással. Ezek alapján a két pályát elképzelhetjük, mint egy-egy utat: $A_1 - A_2 - A_3 - A_4 - A_5 - A_6 - A_7$, illetve $B_1 - B_2 - B_3 - B_4 - B_5 - B_6 - B_7$. Itt két pozíciót akkor kötöttünk össze, ha egy forgatással az egyikből a másikba közvetlenül átvihető az ott lévő elem. Észrevehetjük, hogy az A és B pályák elemei tetszőleges pozícióban csak egyféle orientációt vehetnek fel, tehát pl. az a_1 elem az A_2 pozícióban csak egyféle (a konkrét példában fordított) orientációban lehet. Ez nyilvánvalóan következik a pályák imént leírt szerkezetéből.

Az FCP lehetséges állapotai

A következőkben megvizsgáljuk, milyen lehetséges állapotai vannak az FCP-nek. Ehhez tekintsük (például) az A pályát (a B az 1. táblázatból kiolvashatóan teljesen analóg módon viselkedik), és az egyszerűség kedvéért ebben a szakaszban a_i elem helyett írjunk csak i -t.

Mivel a pályán az elemek orientációja minden pozícióban kötött, így elég azt figyelni, hogy melyik elem melyik pozícióban van. Ezt viszont leírhatjuk egyetlen rendezett számhettel, aminek első (A_1) helyére írjuk az első pozícióban lévő elem sorszámát, második (A_2) helyére a második pozícióban lévő elem sorszámát, és így tovább. Például $(3, 1, 7, 4, 2, 5, 6)$ azt jelenti, hogy az A_1 helyen a 3 elem van, az A_2 helyen az 1, és így tovább. Mivel minden elem pontosan egy helyen van, ezért egy ilyen rendezett számhetesre gondolhatunk az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számok egy permutációjaként is. (A bevezetett jelölés is a permutációknál megszokott.)

Rögzítsük az A pálya elemeinek egy permutációját, és nézzük meg, mondhatunk-e valamit a közepek orientációiról. Ehhez bevezetjük az inverzió fogalmát: akkor mondjuk, hogy egy permutációban az i és j elemek inverzióban állnak, ha $i < j$, de a permutációban j megelőzi i -t. Például a $\pi = (3, 1, 7, 4, 2, 5, 6)$ permutációban a 2 és 7 inverzióban vannak, mert $2 < 7$, de a 7 a harmadik pozícióban áll, a 2

pedig az ötödikben. Egy permutáció összes inverzióban álló elempárjainak számát a permutáció inverziószámának nevezzük. Például a π permutáció inverziószáma 7. Nyilvánvaló módon az alapállapotban mindkét pályán 0 az inverziószám.

Az Olvasóra bízunk annak meggondolását, hogy egy transzpozíció, azaz a permutációban két elem felcserélése, a permutáció inverziószámának a paritását mindig megváltoztatja. Például π -ben felcserélve a 3-at és az 5-öt a $\pi' = (5, 1, 7, 4, 2, 3, 6)$ permutációt kapjuk, amelynek az inverziószáma 10 – valóban megváltozott a paritás.

Figyeljük most meg az 1. táblázatot. Az L és H forgatások összességében nem változtatják meg az A pályán lévő elemek permutációjának inverziószámának paritását, hiszen két-két transzpozícióból állnak. Az R és F forgatások viszont igen, s mivel ezek megváltoztatják a c_3 , illetve c_4 orientációját, így ha az A pályát leíró permutáció inverziószáma páros, akkor c_3 és c_4 közepek vagy mindketten alapállapot szerinti orientációban vannak, vagy mindketten fordítottban. Hasonlóan, ha az A pályát leíró permutáció inverziószáma páratlan, akkor c_3 és c_4 közül pontosan az egyik van alapállapot szerinti orientációban, míg a másik fordítottban.

Ugyanezt meggondolva a B pálya esetén azt kapjuk, hogy bármely lehetséges elrendezéshez a közepek konfigurációi közül csak 4-nek valamelyike tartozhat. Jóval nehezebb megmutatni, hogy mindkét pályán (egymástól függetlenül) előállhat minden permutáció, és ezekhez a közepek mind a 4 – elvileg lehetséges – konfigurációja is elérhető. Ezt például úgy igazolhatjuk, ha mutatunk egy megoldási algoritmust, amely bármely ilyen állapotból kirakja az FCP kockát. Ilyen algoritmus létezik, de bemutatni ebben az írásban terjedelmi okokból nincs lehetőségünk. Egy ilyen algoritmus birtokában bármely kiindulási helyzetből bármely másik helyzet elérhető.



3. ábra. A Floppy Cube

Ezek után ahhoz, hogy megkapjuk az FCP összes állapotainak számát, szorozzuk össze az élek lehetséges permutációit a közepek konfigurációinak számával, ami

$$(7!)^2 \cdot 4 = (7! \cdot 2)^2 = 101\,606\,400 \approx 10^8.$$

Hogy ezt a számot kontextusba helyezzük: az előző KöMaL-ban is megmutatott $1 \times 3 \times 3$ -as Floppy Cube 192, míg a $3 \times 3 \times 3$ -as Rubik-kocka körülbelül $4 \cdot 10^{19}$ lehetséges állapottal rendelkezik.

Az FCP gráfja

A Rubik-kocka variánsok mindegyikéhez természetes módon rendelhető egy gráf: ennek csúcsait a játék különböző állapotai adják, és két állapotot éllel kötünk össze, ha egy (elemi) lépéssel egymásba vihetők. Egy ilyen gráf a definíciója miatt mindig összefüggő. A gráffal modellezhető játékokkal a 2024. októberi KöMaL-ban már foglalkoztunk, érdemes lehet az itt következőket összevetni az ott leírtakkal.

Az FCP esetén minden lehetséges állapotból négyféle lépésünk lehet – L , B , R vagy F –, ezért az FCP gráfjában minden csúcs foka 4 (azaz a gráf 4-reguláris), így a gráfban az élek száma a csúcsok számának kétszerese, tehát

$$(7!)^2 \cdot 8 = 203\,212\,800.$$

A C_i közepeknek 16-féle konfigurációja lehetséges. Mivel minden forgatás pontosan egy közepet fordít át, ezért az FCP gráfja természetes módon egy 16-részes gráf.

Minden állapotban a kiindulástól eltérő orientációjú közepek száma vagy páros, vagy páratlan, vagyis az átfordult közepek számának paritását figyelve az állapotok két halmazba oszthatók. Ugyanakkor minden él különböző paritással rendelkező állapotokat köt össze, vagyis csak olyan él van, ami az előbbi két halmaz között megy, tehát a gráf páros gráf.

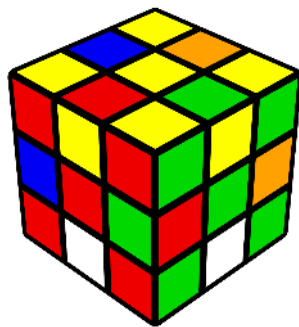
Az eddigieket összefoglalja a következő állítás.

Állítás. Az FCP gráfja egy páros, 4-reguláris, összefüggő egyszerű gráf, aminek $(7!)^2 \cdot 4$ csúcsa, és $(7!)^2 \cdot 8$ éle van.

A következő gráfelméleti fogalom, amit vizsgálunk, az átmérő. (Példáinkban csak összefüggő és véges gráfokkal dolgozunk.) Két csúcs távolságán az őket összekötő (egyik) legrövidebb út hosszát értjük. Véges, összefüggő gráfokra ez így jól definiált. Ez a fogalom a játékok gráfjai esetén különösen fontos, hiszen lényegében azt jelenti, legkevesebb hány lépésből lehet biztosan kirakni a játékot. Természetesen egy gráffal modellezhető játék esetén előfordulhat, hogy a kirakott állapot nem végpontja egy átmérőnek (azaz maximális hosszúságú útnak) sem, és így az átmérőnél kevesebb lépésből is biztosan megoldható a játék, de az FCP esetén könnyen látható, hogy az állapotok „egyenrangúak”, és így minden állapot végpontja átmérőnek.

A korábban említett Floppy Cube gráfja 192 csúcsot tartalmaz, némi munkával kézzel is megrajzolható, átmérője mindössze 8. Természetesen a Rubik-kocka gráfja kapta a legnagyobb publicitást. Az átmérőjét a nemzetközi szakirodalom „Isten számaként” (God’s number) emlegeti. Nagyjából 30 évnyi intenzív, számítógéppel támogatott kutatás eredményeként 2010-ben Tomas Rokicki, Herbert Kociemba, Morley Davidson és John Dethridge igazolta, hogy a hagyományos Rubik-kocka gráfjának átmérője 20. Egy jól ismert példa egy olyan állapotra, amely a kirakott állapottól a lehető legmesszebb, pontosan 20 távolságra van, az úgynevezett „superflip” pozíció. Itt mind a 12 él orientációt vált, lásd 4. ábra. (A Rubik-kocka gráfjáról ajánljuk az Olvasónak a <https://www.cube20.org/> oldalt.)

Az FCP gráfjának lényegesen kevesebb csúcsa van, mint a Rubik-kockának, ezért átmérője „erőből” kiszámolható, a teljes gráfot viszonylag gyorsan bejárhatjuk. Egy mai csúcsteljesítményű asztali számítógépen egy jól optimalizált program néhány perc alatt lefut. Egy ilyen program részletes futási eredményeit foglalja össze a 2. táblázat, amelyből az is kiolvasható, hogy az FCP gráfjának átmérője 30 – meglepően nagy.



4. ábra. $3 \times 3 \times 3$ Superflip: minden él orientációt váltott

távolság	új pozíciók száma	bejárt pozíciók száma
1	4	5
2	10	15
3	24	39
4	58	97
5	140	237
6	322	559
7	716	1275
8	1574	2849
9	3408	6257
10	7238	13495
11	15152	28647
12	31358	60005
13	64364	124369
14	130446	254815
15	261356	516171
16	515399	1031570
17	996312	2027882
18	1877502	3905384
19	3433084	7338468
20	6004694	13343162
21	9898008	23241170
22	14946631	38187801
23	19611824	57799625
24	20490304	78289929
25	15064492	93354421
26	6685369	100039790
27	1451712	101491502
28	112226	101603728
29	2604	101606332
30	68	101606400

2. táblázat. A szélességi keresés eredménye

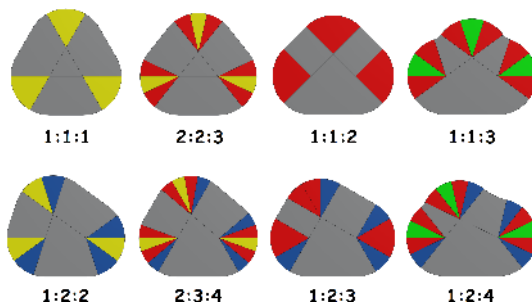
Lehetséges általánosítások

Végezetül megvizsgáljuk, lehetséges-e olyan általánosítás, ahol az FCP rombusz alakú magját (alapját) kicseréljük egy alkalmas konvex sokszög alapú hasábra. Vegyük észre, hogy a hasáb magassága nem lényeges, és azt is, hogy a lapok forgástengelyei szükségképpen mind egy síkba esnek, és a forgatások szöge továbbra is 180° . Ennek az a következménye, hogy a probléma átírható 2 dimenzióba, ahol minden tengelyes forgatás olyan tengelyes tükrözésnek felel meg, ahol a tengely a megfelelő lapközép trapézának szimmetriatengelye.

Egy konkrét K sokszög esetén a cikk első részében bemutatottakhoz hasonlóan kiegészíthetjük a szükséges vágásokkal a sokszöget. Ahhoz, hogy (legalább elméletben) működőképes konstrukciót kapjunk, szükséges, hogy csupán véges sok új vágást ejtsünk.

Elemi geometriai gondolatmenettel megmutatható, hogy páratlan oldalszámú húrsokszögek, valamint hűrnégyszögek esetén mindig elegendő véges sok vágást hozzáadnunk, így ezekből mindig elméletileg megvalósítható játékokat kapunk. Gyakorlatilag öt, vagy annál több csúcsú alap esetén – esetleg néhány speciális esettől eltekintve – a fizikai megvalósítás már nem tűnik könnyen kivitelezhetőnek, mivel nagyon sok és nagyon kis szögű élet kapnánk.

Már háromszög alap esetén is több, egymástól lényegesen különböző játékokat kaphatunk, az összes lehetséges variációt bemutatjuk az 5. ábrán.



5. ábra. A lehetséges pályák háromszög alap esetén a belső szögek aránya szerint.

A cikk első részét azzal kezdtük, hogy a Rubik-kocka a világ legnépszerűbb logikai játéka, amelynek sikere a mai napig töretlen. Rubik Ernő eredetileg oktatási célból kezdett a kocka fejlesztésébe, és bátran kijelenthetjük, hogy törekvéseit siker koronázta. A Rubik-kockát és variánsait tanulmányozva a matematika számos területét bebarangolhatjuk: az algebra, az algoritmuselmélet, a geometria, a gráfelmélet és a kombinatorika alapfogalmai természetes módon kerülnek elő, köztük akár olyanok is, amelyek egy elsősorban középiskolásoknak szóló cikk keretein már túlmutatnak (pl. koszorúszorzat, permutációcsoport, Cayley-gráf). Sokunknak talán ebben is rejlik a kocka csodája: absztrakt matematikai struktúrákat, fogalmakat „tapogathatunk meg”, és valóban játszva tanulhatunk.

Mágori Marcell, Vígh Viktor

Gács András díj, 2025



2025-ben Vígh Viktor, lapunk matematikai szerkesztőbizottságának tagja kapta a Gács András díjat, amelyet az idei Matematikus Hangverseny napján vehetett át. A díjat olyan fiatal, egyetemi matematikus oktatók nyerhetik el, akik tudományos teljesítményük mellett kiemelkedő oktatói tevékenységükkel is motiválják a hallgatókat.

Az elismeréshez szívből gratulálunk!



Beszámoló a 2025. évi EGMO versenyről



Az idei Európai Lány Matematika Diákolimpiát (EGMO) 2025. április 11. és 17. között tartották Koszovóban, Pristina városában. A versenyen 56 ország 219 diákja vett részt (köztük 35 európai ország 135 diákja). A versenyzők két versenynapon 3-3 feladat megoldásában mérték össze tudásukat. Mindkét feladatsorra négy és fél óra állt a versenyzők rendelkezésére. A magyar csapat szép eredménnyel, egy

arany-, két ezüst- és egy bronzéremmel tért haza, amivel a versenyzők az összes ország között a 8., a 35 európai ország között pedig a 4. helyet szerezték meg.

Az eredmények:

Keresztély Zsófia (Budapest, Szent István Gimnázium) 28 ponttal aranyérmet,

Hodossy Réka (Balassagyarmat, Balassagyarmati Balassi Bálint Gimnázium) 23 ponttal ezüstérmet,

Zhai Yufan (Budapest, Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn.) 22 ponttal ezüstérmet,

Elekes Dorottya (Budapest, Fasori Evangélikus Gimnázium) 18 ponttal bronzérmet szerzett.

Ezúton is köszönjük a Gondolkodás Öröme Alapítvány támogatását!

A versenyzők beszámolójából betekintést nyerhetünk az esemény néhány részletébe is

Április 11. hajnalában indult a repülők, majd egy bécsi átszállás után délelőtt megérkeztünk Prishtinába. Bécsben már a pristinai gépre várakozó utasok fele az EGMO-ra ment, így több ország küldöttségével együtt utaztunk a verseny városába. A repülőtérrel a szállásunkra vittek minket, de a koordinátorok külön hotelbe kerültek, így Melindáéktól egyelőre búcsút vettünk. Mi többiek – Anett és a négy versenyző – ugyanabban a hotelben kaptunk szállást.

Az első napon nem volt központi program, csak a városban néztünk körül. Az némileg meglepett minket, hogy a guide-unknak (aki Shpendi Deva volt) kísérnie

kellett minket, ha sétálni akartunk. Ezt először kicsit cikinek éreztük, mert nem akartuk Shpendit ezzel fárasztani, de a séta végül egészen jóra sikeredett, a beszélgetések során jobban megismertük Koszovót és Shpendit is.

A második napon zajlott le a verseny ünnepélyes megnyitója. Egy kisebb zenekar szolgált felütésként, majd meghallgattunk néhány beszédet, többek között egy koszovói volt EGMO versenyzőtől is. A tavalyihoz hasonlóan megnéztünk egy videót a csapatok érkezéséről, majd egyesével szólították az országokat, amelyre a megnevezett ország csapata zászlóval állt fel a közönségtérben, a többiek megujjongva megtapsolták őket. Ezután visszabuszoztunk a szállásra.

A program szerint a másnap 8:30-kor kezdődött a verseny, ezért mindegyikünk hamar lefeküdt, hogy a korai felkelésre kipihent legyen. Később azonban kiderült, hogy simán aludhattunk volna két órával többet is.

A busz némi késéssel indult el. 7:40-re értünk a versenyhelyszínre, majd egy kétórás kinti várakozás vette kezdetét, ami olyan hosszas volt, hogy tisztán éreztük, amint a hőmérséklet a napfelkeltevel 6 fokról 10 fokra emelkedett. Az unalom sok formában jelent meg a 250-nél is több emberben. Volt aki fekvőtámaszokat nyomott, volt, aki táncolt, napozott, nyújtott, aludt stb. Zsófi és Nancy Lana del Rey számokat énekeltek teljes hamissággal.

Mire végre beengedtek, új szabályzatokkal szembesültünk. Íme a tiltott tárgyak listája: számológép, egyéb elektronikus eszköz, szögmérő, írott vagy nyomtatott papír, nem átlátszó kulacs (de az EGMO kulacs, amire ez igaz volt, kivétel), zsepi és betét.

Elkezdődött a verseny. Mivel sokat iszunk, mosdóba is kell mennünk. Magasba emeljük a „toilet” kijelzésű papírt, majd megvárjuk, amíg az egyik segítő idejön. Ő elővesz egy tollat és egy papírt, amelyen rajta van a többi wc-re menő listája. Eljött a nagy pillanat, amikor a te nevedet is rá fogják írni e nemes listára. Látod, amint végigvonja tekintetét a hosszú listán, érzed a percekét, amelyeket majd várni fogsz, hogy mosdóba mehess. De aztán hirtelen megfordítja a lapot, és a túloldalára írja a neved.

90 perc – ennyit sejtessz, hogy ennyi perc kerülsz te sorra. De szerencsére amikor a piros „help” papírt felemeled, kivételt tesznek, és soron kívül kiengedtek.

Az utolsó egy órában rengetegszer bejelentették az időt, az utolsó 40 percben már ötpercenként szólalt meg a hangszóró, a végén pedig már szinte percenként, ami szinte mindenkit felbosszantott. Szerencsére második versenynapon minden hibát és hiányosságot kijavítottak. Nem volt se irdatlan hosszú sor, se túlzottan gyakori időbemondás, se bácsi, aki tapsolva és ujjával csattintva parancsolgatott verseny közben. Még zsepiket is vettek, hogy a versenyzőknek osztogathassák.

Az első napon egyikünk sem tudta megoldani a hármas geo feladatot, de mint később kiderült, az egész versenyen összesen is csak 11 ember oldotta meg. A lobbiban ebédeltünk, ahol svédasztalos étkezés volt és mocktaileket is adtak, amelyek nagyon finomak voltak.

Ebéd után visszautaztunk a hotelbe, és egy nagy tervet akartunk véghezvinni: elmegyünk a 10 percre lévő Hotel Siriusba úszni, ahol Zsófi szerint volt medence. Végülis egy fárasztó versenynap után kellett valami még fárasztóbb is, hogy este jól tudjunk aludni.

Nem szóltunk Shpendinek, mert abból, hogy milyen szigorúan szabálytartónak kellett lennünk eddig, arra következtettünk, hogy úgyse fog elengedni. Korábban megtörtént már, hogy a csapat Shpendi tájékoztatása nélkül indult el kisebb egy expedícióra, amely során egy útkereszteződésnél pont Shpendivel sikerült összefutni. Extrakínos volt a helyzet. Így most próbáltunk óvatosan sétálni az utcákon. Nem a maffiától, nem a gyanús alakoktól és nem is a kóborkutyáktól tartottunk, hanem Shpenditől.

Nagy szerencsénkre Shpendi észrevétele nélkül érkezünk meg a Hotel Siriusba. Balszerencsénkre amint beléptünk a kapun, egy guide elénk lépett, és megkérdezte, melyik országból vagyunk. Mindegyikünkön rajta volt a bagde így nem tudtunk kamuzni. Megkérdezte aztán, hogy ebbe a hotelbe vagyunk-e beosztva. Minden kiderült, és telefonált is Shpendinek, aki ezután több üzenetet is küldött a csoportba, amit meg se mertünk nézni.

Lebukás után jött a magyarázás fázisa, amivel a lehető legkisebbre próbáltuk csillapítani Shpendi bosszúját. Azt mondtuk tehát, hogy valójában az angol csapatot jöttünk meglátogatni. Ezt félig elhitték, aztán Zsófi gyorsan üzent Aanya Goyalnak, aki az angol csapat tagja, a többiek meg reménykedtek, hogy nem veszik észre a felsőnkől kilógó fürdőruha részletet és a táskánkban lapulól törölközőt. Megkérdezték, hogy melyik hotelba tartozunk és az milyen messze van. Azzal próbáltuk menteketni magunkat, hogy mondtuk, hogy csak tíz perc sétára. De a guide erre azt mondta, hogy ez elég nagy távolság, és szólnunk kellett volna Shpendinek.

Aanya Goyal gyorsan a hadszíntérre érkezett és kimentett minket a guide-okkal körbevett lobbiból. A hotel éttermének teraszán telepedtünk le, és eddigre már Anett is megérkezett. Már elhúzódott az idő, és lassan közeledett a közös nagy vacsora, ami héttől kilencig tart. Aanya Goyal szerint nem is volt medence a hotelben, amire nagyon csalódottak lettünk.

Már elfáradtunk a drámai cselekményekben, és elkezdtünk azon filozofálni, hogyan lógjuk el az esti vacsorát. Írtunk Shpendinek, hogy nem akarunk menni, de Shpendi szilárdan kijelentette, hogy erre mennünk kell, és elintézik, hogy kilencre vagy korábban tényleg visszaérünk a hotelbe. Ez egy viszonylag hitelben szegényes kijelentés volt, ugyanis eddig minden program egy óra időeltolódással történt, szinte azt hinné az ember, igazából az Egyesült Királyság időzónája szerint tervezték meg.

A második versenynapra szintén fél hétre kellett kelni, így fontos volt az alvás, de ugyanakkor Shpendi idegeit sem akartuk tovább feszegetni. Ezért úgy döntöttünk, hogy lemegyünk a buszhoz, próbálkozunk még, ha nem egyeznek bele, akkor mindenképp elkövetelünk egy taxit, ami kilenc előtt a hotelbe visz. De végül a guide beleegyezett, hogy ne menjünk a vacsorára.

A sok történés után egy parkba mentünk sétálni, ezúttal Anett is csatlakozott hozzánk. Jól esett a fák között bolyongani egy picit, kitisztult lélekkel és elmével mentünk vissza a hotelbe, és másnap kipihenten indultunk a versenyhelyszínhez.

A második versenynap után Zsófi és Nancy nagyon izgultak, mert úgy érezték, éppen a ponthatáron vannak. Aznap nem is csináltunk semmit, a hotelban maradtunk.

A következő napon Prizrenbe mentünk várost látogatni, ami két óra buszozásra volt Prishtinától. Sétáltunk egy ideig a hangulatos városban, majd felmáshztunk a hegyen a Prizren Fortressig.

Az úton egy fagyjárussal futottunk össze, akinél sajnos nem lehetett kártyával fizetni. Olyan szomorkodó arccal néztünk a fagyira, hogy egy járőkelő három eurót ajándékozott nekünk, hogy vehessünk magunknak.

Ezenkívül Zsófi – Nancy közreműködésével – megtanulta kínaiul azt, hogy „跪下，叫爸爸”, aminek a fordítására mindenki rákereshet. Ezt harsogták szinte egész úton, majd egy kínai versenyzőn tesztelték a mondat pontosságát. Ez sikeresen megtörtént, a kínai lány döbbenten rájuk nézett, ezután néhány szót váltottak, majd egy-egy ajándékot adott Zsófinak és Nancynek.

Az erődbe érve egy kicsit üldögéltünk, nézelődtünk, viszonylag nyugis időt töltöttünk el. Aztán visszatértünk a szállásra, az út alatt derültek ki a pontszámok. De egyikünknek sem volt nete, csak Nancynek, így az ő adatát használtuk, de neki is 5 százalékon volt a telefonja, ami a két órás buszutat csodák folytán túlélte. Így végig tudtuk követni a pontállásokat, aminek sok értelme nem volt, mert másnap reggel derültek csak ki a végleges pontszámok.

A stresszes szituációk után következő nap a Prishtina Mallt látogattuk meg, ahol eléggé meglepődtünk a sok szórakozási lehetőségtől. Volt bowling, gokart, arcade játékok és szabadulós szoba is. Főleg bowlingoztunk, de pár percet az arcade-nál is töltöttünk.

Ezután került sor a záróceremóniára, benne a díjátadásra. Rövidebb ideig tartott, mint gondoltuk, és a magyar csapat minden tagja felkerült a színpadra egyszer, hogy átvegye az érmét. Vacsoráztunk, beszélgettünk. A brazil csapatban volt egy magyar lány is, aki egész jól beszélt magyarul, vele is váltottunk pár szót.

Hajnali kettőkor indultunk a reptérre, és megint gond nélkül érkeztünk a célállomásra. Röviden búcsút vettünk egymástól, és mindenki sok érdekes emlékekkel gazdagodva indult el hazafelé.



A jövő évi verseny Franciaországban lesz 2026. áprilisában. A válogatási folyamat és a felkészítő program részleteiért a <https://cms.renyi.hu/olimpiak/> oldal EGMO fülét érdemes figyelni 2025. július közepétől. ☺ Bátran jelentkeztek, a felkészülésbe szívesen várunk minden olyan lányt, akit érdekel a versenyen való részvétel lehetősége vagy csak szeretne több időt tölteni komolyabb matematika-feladatok megoldásával.



Kiss Melinda Flóra, Kocsis Anett
az EGMO felkészítő csapat nevében

Az EGMO 2025 feladatai

Első nap, 2025. április 13. vasárnap

1. feladat. Egy pozitív egész N -re legyenek $c_1 < c_2 < \dots < c_m$ azok az N -nél kisebb pozitív egészek, amelyek relatív prímek N -hez. Keressük meg az összes $N \geq 3$ számot, amelyre

$$\text{luko}(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

minden $1 \leq i \leq m-1$ -re.

Az $\text{luko}(a, b)$ az a legnagyobb pozitív egész szám, amely osztja a -t és b -t. Az a és b egészek relatív prímek, ha $\text{luko}(a, b) = 1$.

2. feladat. Pozitív egészek végtelen, monoton növekvő $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ sorozatát centrálisnak nevezzük, ha minden pozitív egész n esetén a sorozat első a_n tagjának átlaga egyenlő a_n -nel.

Mutassuk meg, hogy létezik egy pozitív egészekből álló, végtelen $b_1, b_2, b_3, \dots$ sorozat úgy, hogy minden $a_1, a_2, a_3, \dots$ centrális sorozatra végtelen sok olyan pozitív egész n van, amelyre $a_n = b_n$.

3. feladat. Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, a B, D, E , és C pontok egy egyenesre esnek ebben a sorrendben úgy, hogy $BD = DE = EC$. Az AD és AE szakaszok felezőpontjai legyenek rendre M és N . Tegyük fel, hogy az ADE háromszög hegyesszögű, és legyen H a magasságpontja. Legyenek a P és Q pontok rendre a BM , illetve CN egyeneseken úgy, hogy D, H, M és P páronként különbözőek és egy körön helyezkednek el, valamint E, H, N , és Q páronként különbözőek és egy körön helyezkednek el. Bizonyítsuk be, hogy P, Q, N és M egy körön helyezkednek el.

Egy háromszög magasságpontja a magasságvonalainak a metszéspontja.

Második nap, 2025. április 14. hétfő

4. feladat. Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, amelyre $AB \neq AC$, a beírt körének középpontját jelölje I . A BI és CI egyenesek az ABC háromszög körülírt körét rendre a $P \neq B$, illetve $Q \neq C$ pontokban metszik. Az R és S pontokat vegyük fel úgy, hogy $AQRB$ és $ACSP$ paralelogrammák legyenek (úgy, hogy $AQ \parallel RB$, $AB \parallel QR$, $AC \parallel SP$ és $AP \parallel CS$). Legyen T az RB és SC egyenesek metszéspontja. Bizonyítsuk be, hogy R, S, T és I egy körön helyezkednek el.

5. feladat. Legyen $n > 1$ egy egész szám. Egy $n \times n$ -es tábla konfigurációjában az n^2 mező mindegyike tartalmaz egy nyilat, amely vagy felfelé, vagy lefelé, vagy balra, vagy jobbra mutat. Adott kezdő konfigurációra Turbó, a csiga a tábla egyik mezőjéből indul és mezőről mezőre lépked. Minden lépésben Turbó egy négyzetnyit lép abban az irányban, amelyre a mezőjében levő nyíl mutat (ezzel lehet, hogy lelép a tábláról). Minden lépés után a nyilak az összes mezőben elfordulnak 90° -kal az óramutató járásával ellenkező irányban. Egy mezőt jónak nevezünk, ha abból a mezőből kiindulva Turbó a tábla minden mezőjét pontosan egyszer érinti anélkül,

hogyan elhagyná a táblát, és a végén a kiinduló mezőjébe ér vissza. Határozzuk meg az n függvényében a jó mezők maximális számát az összes lehetséges kezdő konfigurációban.

6. feladat. Egy 2025×2025 -ös tábla minden mezőjébe egy nemnegatív valós szám van írva úgy, hogy minden sorban a számok összege 1, és minden oszlopban a számok összege 1. Legyen r_i a legnagyobb szám az i -edik sorban, és legyen $R = r_1 + r_2 + \dots + r_{2025}$. Hasonlóan, legyen c_i a legnagyobb szám az i -edik oszlopban, és legyen $C = c_1 + c_2 + \dots + c_{2025}$. Mi a lehető legnagyobb értéke $\frac{R}{C}$ -nek?

Beszélgetés Obádovics Gyulával



Március 14-én, a pi-napon a 98 éves Obádovics Gyula az SZTE Bolyai Intézet vendége volt. Több generáció is felnőtt „Matematika” című zsebkönyvén, amely a mai napig 22 kiadásban jelent meg. A szerzővel Birkás György beszélgetett. Itt a beszélgetésnek csak egy rövid, szerkesztett változatát tudjuk közölni, de a teljes beszélgetés megtekinthető és meghallgatható a Bolyai Intézet YouTube-csatornáján: <https://youtu.be/Dop4b1C2pEU?si=FGvfSWxHo43KHVdc>



Birkás György: Hogy alakult ki az érdeklődésed a matematika iránt?

Obádovics Gyula: 100 pengőbe került volna Baján a beiratkozás a gimnáziumba, így engem nagyapám öt pengőért beíratott a polgáriskolába, mondván, hogy 80 pengőért egy tehenet is meg tudna venni. Így lettem polgáriskolai első osztályos tanuló. Négy évet letudtam, utána tanítóképzőbe iratkoztam be, de én nem akartam tovább tanulni... Én a két nagyapámtól annyi mindent megtanultam a mezőgazdaságból, hogy én otthon akartam maradni. Csak az a baj volt, hogy a bátyám, aki négy évvel idősebb volt, már otthon maradt, és nekem azt mondták, hogy mit gondolsz, 12 hold föld eltart majd titeket? Szerencsémre találkoztam az egyik osztálytársammal a polgáriskolából. Ő azt mondta, hogy az apja vitéz, és ő

is katona szeretne lenni. 18 éves korában önkéntes katona lenne, és mivel érettségivel karpaszományosként gyorsabban lehet haladni a katonaságnál, hát iratkozzunk be egy olyan iskolába, ahol érettségit lehet kapni. Az egyik ilyen egy közgazdasági technikum jellegű iskola volt, de onnan úgy kirúgtak bennünket, hogy a lábunk sem érte a földet, mondván, hogy hol vannak a szülők. Merthogy mindössze tizen-négy évesek voltunk. De szemben volt a líceum és tanítóképző a Szegedi úton. Hát menjünk oda, mondta az osztálytársam, merthogy ő úgyis csak érettségizni akar. Hát így lettem lícista Baján a bajai líceum és tanítóképzőben. Véletlenül.

1946-ra négyen maradtunk, akik leérettségiztünk, mind a négyen beiratkoztunk egyetemre. Ketten a bányászati és az erdészeti egyetemet végezték el, én pedig nyelvésznek szerettem volna beiratkozni. Mert rengeteg verset írtam, regényt is írtam, és úgy gondoltam, hogy a nyelvész felel meg nekem a legjobban. Az osztályfőnök is azt mondta, hogy az lesz a legjobb. Az igaz, hogy görög és latin érettségi is kellett volna ahhoz, hogy az akkori Pázmány Péter Tudományegyetemnek rendes hallgatója lehessenek. A dékáni hivatalban egy fiatal titkár elmondta, hogy rendkívüli hallgatónak így is beiratkozhatok, aztán majd szeptember-október-november tájékán tanfolyamon végezzem el a két tárgynak az anyagát. Én ezt nem vállaltam, de erre azzal vigasztalt meg, hogy ha matematika, fizika és egy idegen nyelvből vizsgázok, akkor reálszakos gimnáziumi érettségivel már lehetek rendes hallgató, és kérhetek segítyt meg tandíjmentességet. Mert rendkívüli hallgatóként semmit. Így hát december 17-én a Mester utcai Fáy András Gimnáziumban tettem különbözeti vizsgát matematikából, fizikából és egy idegen nyelvből. Így aztán lett egy gimnáziumi érettségim, és attól kezdve vidáman éltem mint rendes hallgatója az akkori Pázmány Péter Tudományegyetemnek.

B. Gy.: Olyanoktól tanultál mint Rényi Alfréd, Riesz Frigyes, Fejér Lipót, Turán Pál. Tudnál mesélni róluk?

O. Gy.: Talán kettőt emelnék ki közülük, a Lipi bácsi az egyik, Fejér Lipót. A 45–46-os évre gondoljunk. A kettős előadó mellett volt egy szoba, ő gyakorlatilag ott lakott, onnan sétált át a terembe. Aztán szétnézett, a kalapot, a kabátot fönnhagyta magán. Az ablak nem üveg volt, hanem papír. Ha véletlenül valamelyik hallgató barátunk hirtelen becsapta az ajtót, akkor kirepült a papír, és akkor újra kellett szalonnát keresni, hogy az új papírt átdörgöljük, hogy legalább egy kicsit áttetsző legyen. Lipi bácsi néha elment az ablakhoz, és kinézve motyogott valamit. Akkor észrevettük, hogy jó lesz odafigyelni, mert valamilyen tétel valami van mögötte, amit érdemes megnézni. Gyakorlatilag az a heti két óra egy ilyen oda-vissza szóló beszélgetés volt. Én egy fél év alatt másfél oldalnyi anyagot tudtam leírni az előadásából, ami a Fourier-sorokat tartalmazta, mert a többi az történelem volt.

Lipi bácsinál vizsgázni öröm volt. Gondolom, róla mindenki ismeri azt a történetet, hogy valamikor, még Kolozsváron, véletlenül valakit megbuktatott. És amikor rákérdeztek az Akadémián, hogy Lipi bácsi, te ugye sose buktattál meg senkit, erre azt mondja, hogy de igen, és még most is fáj azért a lelmem, hogy megbuktattam egyet Kolozsváron. Vizsgázni nála öröm volt, mert a kérdései olyanok voltak, amelyekre ragyogóan lehetett az ő stílusában jól elmondani a dolgokat, és annak ő nagyon örült. És akkor azt mondta, „Ezt is tudja!”. A negyedik év végén egy bizottság előtt szigorlatot kellett tennünk, a bizottság Lipi bácsiból, Fejes-Tóth Lászlóból

és Hajós Györgyből állt. A Laurent-sorokat kaptam először, azt meg éppen előtte öt perccel néztem meg, hogy micsoda. Akkor gyönyörűen szépen elmondtam neki, és rögtön ment tovább, Palotás, Szabó. . . , Lipi bácsi meg minden egyes alkalommal egy jó feleletnél mondja a Hajósnak, hogy „Ezt is tudja!” Mind a hárman kitűnőt kaptunk. Hát. . .

A Lipi bácsi mellett még hadd mondjam el Riesz Frigyesről, hogy ő Szegedről többször pályázott Budapestre, de két alkalommal is elutasították és nem nevezték ki az akkori Pázmány Péter Tudományegyetemre rendes tanárnak, és ez borzasztóan bántotta őt. Sértődékeny ember volt. Amikor másodéves voltam, akkor sikerült neki áthelyeztetnie magát Budapestre. Az előadására én kíváncsi voltam, hogy végre valami modernet, a klasszikus matematika mellett valami újat is fogunk hallani. Rábeszéltem a barátaimat is, az első előadáson vagy 80-an voltunk őt meghallgatni. Nekitámaszkodott a katedrának és mondja a szöveget, hogy „ x . . . , ja ezt már felhasználtam, jelöljük y -nal. . . ” Megy tovább, „nem, az y nem, ezt jelöljük z -vel. . . ” A táblára semmit sem írt, a levegőben mondta el, a tételekre hivatkozott, francia tételekre még a tetejébe. Hogy ezt ott olvassuk, ezt amott olvassuk. Azt nem tudtuk, hogy az x -ből a végén hogy lett z vagy y vagy t , de csak úgy fejbe jelezte, hogy hát nem, ezt már fölhasználtam, ehelyett jelöljük ezt így. Szóval ez az első előadás olyan volt, ami elzavarta a népet. A 80-ból öten maradtunk a következő előadáson. Akkor a bölcsész hallgatók egyesületében rábeszéltek engem, hogy valakivel menjek el hozzá, és beszéljünk vele, hátha Szegeden van neki jegyzete, hogy azt meg megszereznénk, hogy legalább tudjuk, hogy az a tétel, amire hivatkozik. Mivel akkor még nem is működött az egyetemi könyvtár, azt sem tudtuk, hol lehet utánanézni az anyagnak, amelyre ő hivatkozik.

El is mentem kettesben a Hegyi Bandival, és megpróbáltuk nagyon szépen elmondani, hogy miért szeretnénk ezt a tárgyat. És többen is, mindenki meghallgatná. Ha van jegyzet, járuljon hozzá, hogy azt a bölcsész hallgatók egyesülete megvásárolja, és akkor abból majd megtanuljuk azt, amit addig nem tudhattunk. Mert a Lipi bácsi nem adta elő azokat a tételeket. Hát néz, néz ránk, néz. Nem értem, azt mondja, nem értem. Csak azt nem tudtuk, hogy mit nem ért. Aztán a végén megtudtuk, hogy Szegeden ő amikor fölült a villamosra, átgondolta, hogy milyen előadást fog tartani, és ezért azt mikor elmonda, senki nem szólalt fel elene, hogy zavaros az előadás, nem lehet érteni. Összenéztünk, hogy mit lehet itt tenni. Hát itt nincs tovább.

Matematikából alapvizsgán mindkettőnket hozzá osztottak be. Megnéztem az órát, mondom, van egy óra, biztos le tudok vizsgázni. Mert akkor ment a vonatom, és a lányok Baján már vártak. Úgyhogy gyorsan le fogok vizsgázni. Ad egy tételt. Gyorsan elkezdtem írni a táblára. „Hol olvasta?” Mondom a Szász Pál könyvét. Nem tudom ismert-e még, a klasszikus analízisnek a kétkötetes könyve. Ad megint egy tételt, megint elkezdtem. „Hol olvasta?” Mondom, a Szász Pali bácsi könyvében. Megint ad egy tételt. 50 percen keresztül úgy 8-10-15 tételről beszélgettünk így. Én akkor félreálltam a táblától, jött a Bandi barátom, ugyanígy. Már nem győztem kivárni, elmegy a vonatom. Otthagytam hát, mondom, majd szeptemberben beírja a jegyet. Amikor szeptemberben elmentem hozzá, egy üres lapot tolt elém, és akkor egyenlőtlenségek témában elkezdtünk beszélni. Úgy megörültem, hogy csoda. Na

végre, egy kicsit matematikával is foglalkozunk! Ő szerette az egyenlőtlenségek témáját, külön előadása is volt, ragyogó, helyben voltam. És akkor odaír egy elégségest. Gyorsan összeadtam fejben az összes eredményemet, hogy ez elég-e ahhoz, hogy megkapjam a teljes kedvezményt, vagy sem. Kiderült, hogy elég, erre kifordultam, és otthagytam. Úgyhogy összességében egy elégségesem van nekem tőle.

B. Gy.: Nem sok ember van, akinek köznevesül a neve. Mondjuk példának ott van Récamier vagy Röntgen. De „az Obádovics”-ot is úgy emlegetjük, hogy mindenki tudja például ebben a teremben, hogy miről van szó. Hogy lehet az, hogy akkor még névtelenül, ismeretlenül ki tudtál adni egy ilyen könyvet?

O. Gy.: Ez úgy indult, hogy már középiskolás koromban is mindig volt akit, tanítani kellett matematikára, mindig fel kellett négy-öt tagot készíteni úgy, hogy azért legalább egy kettes-hármas dolgozatot tudjanak írni. Tehát gyakorlatilag a polgáritól kezdve a tanítóképzőn keresztül mindig kellett, hogy – magyarrá fordítva! – mondjam el azt, amit a tanár bácsi úgy mondott el, hogy nem értettük. Az volt a rögeszmém, hogy biztos el lehet mondani úgy is, hogy megérthető legyen. Na, így indult az egész. Utána jöttek azok a korszakok a nehézipari műszaki egyetemen. Rám bízta az esti tagozatot, itt vagy 300 beiratkozó volt, ennyi ifjút kellett megtanítanom a matematikára fél év alatt. És hát ezek között, ugye, voltak olyanok is, akiknek négy elemije volt meg, plusz két hónapos előkészítéssel. És akkor tanítsd meg őket, olyan szintre felhozva, hogy utána az egyetemi tananyagot is el lehessen már mondani nekik úgy, hogy megértsék. De ezt egy év alatt sikerült mindig elérnem, kivéve egy-két negyvenévest. Elsőéves hallgatóként jegyzeteket írtam matematika-fizika-kémiából, egymás után többet is. Meg kidolgozott példatárakat csináltam öt éven keresztül.

Aztán a Műszaki Kiadó egy pályázatot írt ki középiskolai matematikai összefoglaló témában. Erre megírtam 24 oldalt a középiskola matematika tananyagából egyszerűen, érthető formában, és beküldtem. És valami miatt engem választottak, hogy írjam meg a teljes könyvet.

De emiatt a könyv miatt majdnem kirúgtak az egyetemről. Én akkor egyszerű adjunktus voltam a matematikai tanszéken. Volt persze tanszékvezetőnk is, de azt a 24 oldalt, ami alapján megbíztak, hogy írjak egy könyvet, én magam írtam, és nem az egyetem vagy a tanszék nevében küldtem be, hanem a saját nevemben. Eszembe sem jutott, hogy a hagyomány az úgy szól, hogy a tanszékvezető láb-jegyzetben köszöni meg azoknak a munkát, akik valójában elvégzik, de a mű az ő neve alatt jelenik meg. Eszembe sem jutott nekem, hogy a tanszékvezető nevével kéne megjelentetnem valamit, amit én írtam. Hát odarendelt a dékán a személyzeti osztály beszélgetőszobájába, ott volt a tanszékvezető meg az egyik tanszéki dolgozó. Tehát ott hárman a lellemre beszéltek, hogy kérjem vissza a kéziratot és a tanszékvezetővel együtt átdolgozva jelentessük meg. Én pedig majdnem elröhgöttem magam, mert akkorra már régen ólombetűsen kiszedték. Még elmenetemben is utánam szóltak, hogy ezt még megbánod. Aztán amit bánhattam, az annyi volt, hogy jutalmat nem kaptam, mondván, hogy én úgyis jól keresek.

17 000 forintot kaptam az első kéziratért, ami körülbelül egy éves fizetés volt akkor. De akkoriban, amikor megjelent a százezredik példány, volt egy olyan rendelet,

hogy nemcsak a teljes kézirat ellenértékét kell kifizetni, hanem annak a dupláját is. Hát a Kossuth-díjnál nagyobb összeget kaptam. Ami azt jelentette, hogy meg tudtam venni egy Skoda 445-ös autót, ami akkor 65 000 forint volt. Erre az irigység teteje az egeket verte, mert az volt a második autó az egyetemen.

B. Gy.: Nem véletlen a sikere, és most a 21. kiadásnál tart. Mit kellett változtatni az egyes kiadásokban? Mert azért a matematika tananyag is változott.

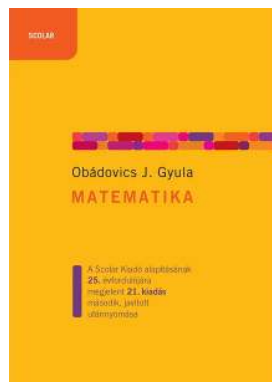
O. Gy.: A veszekedés még az első kiadás előtt kezdődött, amikor én azt mondtam, hogy hát a technikumiaknál ott van, ugye, a differenciál- és integrálszámítás is, a gimnáziumban pedig ezt egyszer kihagyták, majd újra visszavették, megint kihagyták, megint visszavették... Hát, mondom, én ilyen játékba nem megyek bele. Vagy olyat írok, amit egyértelműen lehet használni, vagy nem. Végül nagy-nagy vita után sikerült elérnem, hogy olyan lett a könyv valóban, amit lehetett használni, és „magyarra fordítva” a klasszikus tételeket, hogy megértse az egyszerű, magyarul beszélő ember is.

Azt itt mindenki tudja, hogy 45-től napjainkig hányféle reform volt a középiskolában. Azt mind végig kellett írni, és én hol hozzábigyesztettem, hol nem. A középiskolai tananyagban vektoralgebra például nem volt. Komplex számok nem volt. Analitikus geometria – olyan formában, ahogy én megértettem ezt a hallgatóimmal –, nem volt. Ezt mind szépen beleírtam, és megjelent a kis könyvemben. Mit ad Isten, két vagy három év múlva a középiskolai tananyagban megjelent a vektoralgebra, mert a fizikát mégis csak könnyebben meg lehet értetni vektoralgebrai formákkal, mint csak skalárisan. Bevettem a valószínűségszámítást – addig nem volt –, jé, hát az is középiskolai tananyag lett. Tehát ilyen apró lépésekkel visszacsempésztem három olyan témát, ami közben kimaradt, majd visszavették, megint kimaradt, visszavették. A könyv viszont állandó maradt. A technikumoknak nem volt külön könyve, de ebben benne volt a differenciál- és integrálszámítás, meg a vektoralgebra, meg a mechanikához szükséges minden tananyag. Úgyhogy ezt a könyvet használták, ami igazán nagy szerencse volt.

B. Gy.: Mesélted, hogy az egyik kiadásnál nem engedték javítani, és erre alapítottál egy könyvkiadót.

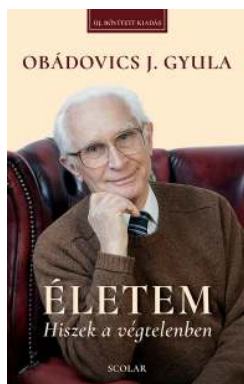
O. Gy.: A Műszaki Kiadó a 10. vagy 11. kiadást harminc- meg negyvenezer példányban adta ki egyszerre. De annyi reform volt már a középiskolákban, hogy mondtam, ez már beporosodott, így nem lehet még egyszer kiadni. De mivel elfogyott a könyv, ők ki akarták adni, én viszont nem járultam hozzá, úgyhogy két év kihagyás volt. A vejem meg a lányom is matematika-fizika szakon végzett, azt mondtuk csinálunk inkább egy kiadót. Kölcsönkértünk másfél millió forintot, mert a nyomdának az egyharmad részét azonnal ki kellett fizetni... Három hónap alatt annyi könyvet eladtunk, hogy ki tudtuk fizetni a kölcsönt, és elindulhatott a Scolar Könyvkiadó.

B. Gy.: Talán kevesen tudják rólad, hogy regényt is írtál...



O. Gy.: Meg verseket is írtam. Igen, mert irodalmár szerettem volna lenni. De az nem lehettem, így kényszerből matematikus lettem... Gyakorlatilag három könyvem meg egy verseskötetem jelent meg. Na, meg az Életem című önéletrajzi könyvem. Azt volt a legnehezebb megírni.

B. Gy.: Ezt az idézetet mindenképpen szerettem volna így a végén felolvasni a könyvedből: „mindig szerettem volna elérni, hogy a politikusokat ültessék be egy-két matematikaóraóra hadd lássák, hogy tétel csak akkor lesz a sejtésből, állításból, ha azt olyan bizonyítással tudom érvényessé tenni, aminek felhasználásával a világon bárki ugyanarra az eredményre jut. De az, hogy valaki állít valamit ma az ország gazdasági helyzetéről, holnap meg az ellenkezőjét jelenti, az számomra borzalom.”



O. Gy.: Sajnos én szoktam rögzíteni magamnak a politikai eredményeket, amelyeket végighallgatok, végignézek. Hogy lehet egyik nap kimondani valamit – közgazdasági vagy filozófiai, mindegy – szembenézve, és annak a tökéletes ellenkezőjét másnap? Ha valami matematikai állítást kimondok, akkor vagy tudom igazolni, vagy nem tudom igazolni. Sejtés lehet, de hogyha azt én lépésről lépésre bizonyítani tudom, akkor a világon bárhol, bármelyik normálisan gondolkodó ember logikai lépésekkel ugyanarra az eredményre kell, hogy eljusson. Na, egy ilyen követelmény valószínűleg sose lesz megvalósítható a politikusoknál. De azért be kéne ültetni őket egy-egy matematikaóraóra.

B. Gy.: Láttalak egy videón az egyik dédunokáddal versenyt futni. Ha jól tudom országos bajnok vagy atlétikában.

O. Gy.: Jaj, hát az egyik dédunokáim édesanyja testnevelőszakos tanár. És ez a két gyerek, ahogy oda ért Szárszóra, mondja, hogy papa, gyerünk fussunk a Balatonig. Tőlünk 140 méter a Balaton, és hát ezt csináltam éveken keresztül, hogy fussunk a Balatonig. Persze a betyárok lehagytak mindig, de azért hajlandók voltak futni velem. És az egyik lemérte titokban, hogy mennyi az az idő, amit én futok, és akkor azt mondta, papa hát ezzel világbajnok lehetnél. Így alakult ki, hogy a végén 100 métert kellett futni.

B. Gy.: De futásban 100 méteren országos szenior bajnok vagy, Gyula bácsi.

O. Gy.: Megnéztem a tribünről, hogy úristen, mondom, ilyen hosszú a 100 méter? Nálam otthon a 140 mintha rövidebb lenne. A lényeg az, hogy lefutottam a 100 métert...

B. Gy.: Hallottuk, hogy nagyon sokan megérték a 98–100 évet a családban. El lehetne árulni legalább itt szűk körben, hogy mi a hosszú élet titka?

O. Gy.: Amikor lefutottam ezt a 100 métert, akkor naponta három-négy újságíró is meglátogatott, és erről faggatott. És a hosszú élet titka az az volt... , hogy hat éves korom óta én dolgozom, és vörösbort iszok. Erre majd hanyatt estek ijedtükben. Mondtam, ez tényleg így van. Az újságírók rosszul jártak, mert a hosszú élet titkát ilyen értelemben csak így lehetett megtudni.

A szeretet a legdöntőbb, ezt most őszintén mondom, a szeretet a legdöntőbb. Az, hogy tudjál szeretni, tudd átadni a szeretetet, és fokozatosan még kapjad vissza a szeretetet. Aki ezt végig tudja így csinálni, és átérzi, és hát van ilyen kapcsolata, az tudja, hogy ez biztos, hogy így van. Úgyhogy én ezt merem most is mondani. Hogy igazán szeressük egymást. Ez a lényeg.

B. Gy.: Szerintem tökéletes végszó, köszönjük szépen.

Birkás György

Megoldásvázlatok a 2025./4. szám matematika gyakorló feladatsorához



I. rész

1. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak vagy hamisak. Indokoljuk a választ.

a) $\frac{1}{3-\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}-2} = 5,$ (5 pont)

b) $\left(\frac{5^x + 5^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{5^x - 5^{-x}}{2}\right)^2 = 1,$ (4 pont)

c) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{256}.$ (3 pont)

Megoldás. a) Az $\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ átalakítás alapján gyöktelenítve a nevezőket:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3-\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \\ & = (3+\sqrt{8}) - (\sqrt{8}+\sqrt{7}) + (\sqrt{7}+\sqrt{6}) - (\sqrt{6}+\sqrt{5}) + (\sqrt{5}+2) = 3+2 = 5. \end{aligned}$$

Az állítás igaz.

b) Az $u^2 - v^2 = (u+v)(u-v)$ azonosság alapján

$$\left(\frac{5^x + 5^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{5^x - 5^{-x}}{2}\right)^2 = 5^x \cdot 5^{-x} = 1.$$

Az állítás igaz.

c) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} = 2 \cdot \sqrt[3]{2} + 3 \cdot \sqrt[3]{2} = 5 \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{250} \neq \sqrt[3]{256}.$ Az állítás hamis.

2. A pozitív egész számokból álló véges nemüres H halmaz elemeinek legalább a fele páros, legalább a kétharmada 3-mal osztható, és legalább a hathetede 7-tel osztható.

a) Igazoljuk, hogy ekkor a számok között kell lenni 42-vel osztható számnak is. (7 pont)

b) Adjuk meg az összes olyan kétjegyű pozitív egész számot, amelynek ugyanannyi osztója van, mint a 42-nek. (Beleértve a 42-t is.) (6 pont)

Megoldás. a) Legyen $|H| = n$ ($n \in \mathbb{N}^+$). Az adott halmazrészekbe tartozó elemek száma rendre legalább $\frac{1}{2}n$, $\frac{2}{3}n$, $\frac{6}{7}n$. Ezek összege $\frac{85}{42}n > 2n$. Ne feledjük azonban, hogy lehetnek elemek, amelyeket többször is számoltunk. Ha az összes elemet többször – de csak kétszer – számoltuk volna, akkor is azt kapnánk, hogy az elemek száma nagyobb, mint n .

Ennek figyelembevételével a H halmaz elemei között kell lennie olyannak is, amelyik egyszerre osztható 2-vel, 3-mal és 7-tel is, így 42-vel is.

b) A $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ felbontás alapján $d(42) = (1+1)(1+1)(1+1) = 8$.

A keresett kétjegyű számok prímtényezős felbontása lehet p_1^7 , $p_1^3 p_2$, $p_1 p_2 p_3$, ahol p_1, p_2, p_3 egymástól páronként különböző prímszámok.

Az egyes típusoknak megfelelő kétjegyű számok:

- p_1^7 típusú kétjegyű szám nincs, mivel $2^7 > 100$,
- $p_1^3 p_2$ típusú: $2^3 \cdot 3 = 24$, $2^3 \cdot 5 = 40$, $2^3 \cdot 7 = 56$, $2^3 \cdot 11 = 88$, $3^3 \cdot 2 = 54$,
- $p_1 p_2 p_3$ típusú: $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$, $2 \cdot 3 \cdot 11 = 66$, $2 \cdot 3 \cdot 13 = 78$, $2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$.

3. Egy háromszög szögei számtani sorozatot alkotnak. Két oldalának hossza 5 és 7 egység. Mekkora a háromszög harmadik oldala? (13 pont)

Megoldás. Legyenek a háromszög szögei $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, ahol $\alpha = \beta - \delta$ és $\gamma = \beta + \delta$ ($0 < \delta < \beta$). Ekkor $(\beta - \delta) + \beta + (\beta + \delta) = 180^\circ$ miatt $\beta = 60^\circ$.

Ezután 3 esetet vizsgálhatunk.

1. eset. Ha a 60° -os szöggel szemkötti oldal 5 egység hosszú, akkor a koszinusztétel felhasználásával $5^2 = 7^2 + x^2 - 2 \cdot 7 \cdot x \cdot \cos 60^\circ$, amiből $x^2 - 7x + 24 = 0$.

Ennek az egyenletnek nincs valós megoldása.

2. eset. Ha a 60° -os szöggel szemkötti oldal 7 egység hosszú, akkor $7^2 = 5^2 + x^2 - 2 \cdot 5 \cdot x \cdot \cos 60^\circ$, amiből $x^2 - 5x - 24 = 0$, $x_1 = 8$ és $x_2 = -3$.

A megfelelő megoldás az $5 < 7 < 8$ nagyságrend alapján az $x = 8$ érték.

3. eset. Ha a 60° -os szöggel szemkötti oldal x egység hosszú, akkor $x^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ$, amiből $x^2 = 39$, $x_1 = \sqrt{39}$ és $x_2 = -\sqrt{39}$.

A megfelelő megoldás az $5 < \sqrt{39} < 7$ nagyságrend alapján az $x = \sqrt{39}$ érték.

Tehát a háromszög harmadik oldalának hossza 8 vagy $\sqrt{39}$ egység lehet.

4. Egy k kör O középpontja az $A(1;1)$ és $B(7;13)$ pontokat összekötő e egyenesen van. A kör a $4x + 3y = 42$ egyenletű f egyenest abban az E pontban érinti, amelynek ordinátája 6.

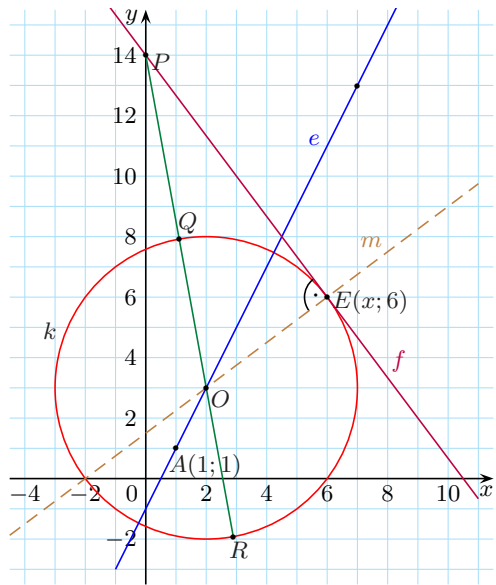
a) Írjuk fel a k kör egyenletét. (9 pont)

b) Az f egyenes y tengellyel alkotott P metszéspontját a k kör O középpontjával összekötve a kapott egyenes a Q és R pontokban metszi a k kört. Mekkora a $PQ \cdot PR$ szorzat értéke? (4 pont)

Megoldás. a) Az e egyenes egyenlete az $\overrightarrow{AB}(6; 12)$, $\mathbf{v}_e(1; 2)$, $A(1; 1)$ alapján $e: 2x - y = 1$.

Az $E(x; 6) \in f$ pont első koordinátáját kiszámolva $4x + 3 \cdot 6 = 42$, amiből $x = 6$, így $E(6; 6)$. Az f -re E pontban merőleges $OE = m$ egyenes egyenlete az $\mathbf{n}_f(4; 3) = \mathbf{v}_m$, $E(6; 6) \in m$ alapján $m: 3x - 4y = -6$.

Az $O = e \cap m$ pont koordinátáit a $\begin{cases} 2x - y = 13 \\ x - 4y = -6 \end{cases}$ egyenletrendszer megoldásaként kapjuk. Eredményként az $x = 2$, $y = 3$, $O(2; 3)$ értékek adódnak. Ennek figyelembevételével: $\overrightarrow{OE}(4; 3)$, $r = |\overrightarrow{OE}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, $k: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$.



b) Az f és az y tengely $P(0; y)$ metszéspontjára $4 \cdot 0 + 3y = 42$, amiből $y = 14$ és $P(0; 14)$ adódik.

Mivel $\overrightarrow{PE}(6; -8)$, $|\overrightarrow{PE}| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10$, ezért a szelőtétel alapján:

$$PQ \cdot PR = PE^2 = 100.$$

II. rész

5. Egy forgáskúp alapkörének sugara megegyezik a kúp magasságával. A forgáskúpba olyan egyenes körhengert írunk, amelynek a magassága megegyezik az alapkörének átmérőjével. Számítsuk ki, hogy a henger térfogata, illetve felszíne hány százaléka a kúp térfogatának, illetve felszínének. (16 pont)

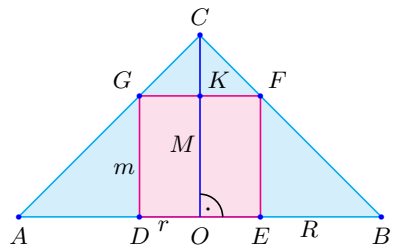
Megoldás. A henger, illetve a kúp alapkörének sugarát és magasságát rendre r , m , illetve R , M -mel jelölve $M = R$ és $m = 2r$.

A két test forgástengelyre illeszkedő síkmetszetét vizsgáljuk, és az ábra szerinti jelöléseket alkalmazzuk.

Az ábra alapján $CKF\Delta \sim COB\Delta$, mivel megfelelő oldalai párhuzamosak. A hasonlóság alapján: $\frac{KF}{OB} = \frac{KC}{OC}$. Ebből

$$\frac{r}{R} = \frac{M - m}{M} = \frac{R - 2r}{R}, \quad 0 = R^2 - 3Rr = R(R - 3r).$$

Mivel $R > 0$, ezért $R - 3r = 0$, azaz $R = 3r$.



A kapott eredményeket felhasználva:

$$\frac{V_{\text{henger}}}{V_{\text{kúp}}} = \frac{r^2 \pi m}{\frac{R^2 \pi M}{3}} = \frac{2r^3 \pi}{\frac{R^3 \pi}{3}} = \frac{2r^3 \pi}{\frac{27r^3 \pi}{3}} = \frac{2}{9} = 0,2.$$

Tehát a henger térfogata 22,22%-a a kúp térfogatának.

A forgáskúp alkotójának nagysága:

$$a = \sqrt{R^2 + M^2} = \sqrt{2}R.$$

Így

$$\begin{aligned} \frac{A_{\text{henger}}}{A_{\text{kúp}}} &= \frac{2r\pi(r+m)}{R\pi(R+a)} = \frac{2r\pi(r+2r)}{R\pi(R+\sqrt{2}R)} = \\ &= \frac{6r^2\pi}{R^2\pi(\sqrt{2}+1)} = \frac{6r^2\pi}{9r^2\pi(\sqrt{2}+1)} = \frac{2}{3(\sqrt{2}+1)} \approx 0,2761. \end{aligned}$$

Tehát a henger felszíne 27,61%-a a kúp felszínének.

6. a) Dia egy majálison részt vesz egy dartsjátékban. A tábla három koncentrikus körből áll, amelyek átmérője rendre 15, 30 és 45 cm. Ha a dobó játékos nyíla a belső körben landol, akkor nyer 12 eurót, ha a középső körgyűrűbe érkezik, akkor veszít 6 eurót, ha pedig a külső szektorba talál be, akkor nyer 3 eurót. A játékosok mindig eltalálják a táblát. Ha Dia nyíla ugyanakkora valószínűséggel fúródik be a tábla minden egyes pontjába, akkor hány eurót kell fizetnie a részvételért ahhoz, hogy számára a játék igazságos legyen (azaz a nyeremény várható értéke egyenlő a részvételi díjjal)? (11 pont)

b) Ha a tábla szektorait a piros, kék, zöld, sárga és fehér színekkel jelölik meg, akkor hányféle olyan színezés lehetséges, ahol a szomszédos tartományok különböző színűek, és a táblán nem szerepel egyszerre a piros, fehér és zöld szín? (5 pont)

Megoldás. a) Az egyes szektorokba érkezés esélye arányos a tartományok területével. $T_{\text{belső}} = \frac{15^2\pi}{4} = \frac{225\pi}{4}$, $T_{\text{középső}} = \frac{30^2\pi}{4} - \frac{15^2\pi}{4} = \frac{675\pi}{4}$, $T_{\text{külső}} = \frac{45^2\pi}{4} - \frac{30^2\pi}{4} = \frac{1125\pi}{4}$. Így $T_{\text{belső}} : T_{\text{középső}} : T_{\text{külső}} = 1 : 3 : 5$, és emiatt az egyes szektorokba érkezés esélye: $\frac{1}{9}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{5}{9}$.

Dia megnyerhető pénzének várható értéke:

$$E_{\text{nyeremény}} = \frac{1}{9} \cdot 12 + \frac{3}{9} \cdot (-6) + \frac{5}{9} \cdot 3 = 1.$$

A játék igazságos, ha a várható nyeremény és a részvételi díj összege 0. Így a részvételi díjnak 1 eurónak kellene lennie.

b) A tábla olyan színezéseinek száma, amikor a szomszédos szektorok különböző színűek $5 \cdot 4 \cdot 4 = 80$. Ezek között $3! = 6$ olyan eset van, amikor a tartományok jelölése a piros, fehér, zöld színekkel történik. Ennek figyelembevételével a megfelelő esetek száma $80 - 6 = 74$.

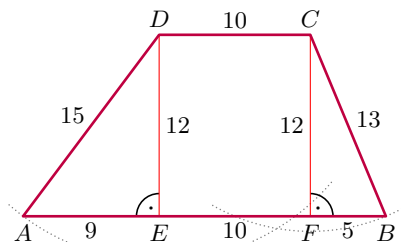
7. a) Egy trapéz párhuzamos oldalainak egyike 10, szárai 13 és 15, magassága 12 egység hosszú. Mekkora lehet a negyedik oldal? (12 pont)

b) Egy konvex érintőnégyyszög három oldalának hossza 10, 13 és 15 egység. Milyen hosszú lehet a negyedik oldal? (4 pont)

Megoldás. a) A Pitagorasz-tétel alapján felhasználjuk, hogy ha egy derékszögű háromszög átfogója 15, egyik befogója 12, akkor a másik befogó 9; illetve, ha az átfogó 13, az egyik befogó 12, akkor a másik befogó 5 egység hosszúságú.

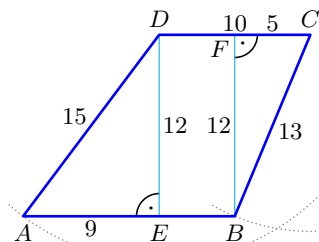
A megadott oldalhosszakkal és magassággal az alábbi 3-féle trapéz szerkeszthető:

1. eset:



$$AB = AE + EF + FB = 9 + 10 + 5 = 24.$$

2. eset:



$$EB = DF = 5,$$

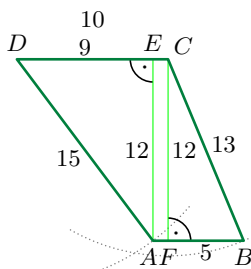
$$AB = AE + EB = 9 + 5 = 14.$$

3. eset:

$$EC = DC - DE = 10 - 9 = 1,$$

$$AF = EC = 1,$$

$$AB = AF + FB = 1 + 5 = 6.$$



Tehát a trapéz negyedik oldala 6, 14 vagy 24 egység hosszúságú lehet.

b) A konvex érintőnégyyszög szemközti oldalainak összege egyenlő. Attól függően, hogy az ismeretlen oldal melyik ismert oldallal szemben található, az alábbi eseteket kapjuk:

i) Ha $10 + d_1 = 13 + 15$, akkor $d_1 = 18$.

ii) Ha $13 + d_2 = 10 + 15$, akkor $d_2 = 12$.

iii) Ha $15 + d_3 = 10 + 13$, akkor $d_3 = 8$.

Tehát a négyszög negyedik oldala 8, 12 vagy 18 egység hosszúságú lehet.

8. Andris a Vidámpark céllövöldéjében játszik. Egymás után vonulnak el előtte a célpontok, és mindegyiket egymástól függetlenül, azonos valószínűséggel találja el. (Mivel Andris jó lövő, ezért $p > 0,5$.)

- a) Ha 4 lövésből 0,1536 valószínűséggel talál el 2 célpontot, akkor milyen eséllyel talál Andris egy lövése során? (5 pont)
- b) Milyen valószínűséggel lő le Andris 4 lövésből legalább 1 célpontot? (4 pont)
- c) A 4 lövésből várhatóan hány találata lesz Andrisnak? (2 pont)
- d) Legalább hány lövést kell leadni Andrisnak, hogy legalább 99,99% biztonsággal legyen lövései között sikertelen? (5 pont)

Megoldás. a) Vezessük be az X valószínűségi változót Andris 4 lövésből álló találatainak leírására. A keresett valószínűséget i darab találat esetén $P(X = i)$ -vel jelölve:

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} p^2 (1-p)^2 = 0,1536, \quad [p(1-p)]^2 = 0,0256.$$

Ebből $p, 1-p \in [0; 1]$ miatt $p(1-p) = 0,16, 0 = p^2 - p + 0,16, p_1 = 0,8$ vagy $p_2 = 0,2$.

A feladat feltétele alapján $p = 0,8$.

b) $P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,2^4 = 0,9984$.

c) $M(X) = n \cdot p = 4 \cdot 0,8 = 3,2$.

d) A szükséges lövések számát jelöljük n -nel. Ha Andris legalább 99,99%-os eséllyel ad le rossz lövést, akkor legfeljebb 0,01% valószínűséggel találja el az összes célpontot, azaz:

$$0,8^n \leq 0,0001,$$

$n \cdot \lg 0,8 \leq \lg 0,0001, n \geq \frac{\lg 0,0001}{\lg 0,8} \approx 41,28$. Tehát a szükséges kísérletek száma legalább 42.

9. a) Határozzuk meg az a valós paraméter értékét úgy, hogy az

$$f: \mathbb{R} \setminus \{4\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x-4}{a+1} - \frac{a-3}{x-4}$$

függvénynek legyen zérushelye. (6 pont)

b) $a = 1$ esetén adjuk meg az f függvény lokális szélsőértékeit. (10 pont)

Megoldás. a) Az $f(x)$ értelmezhetősége miatt $a \neq -1$.

A zérushelyet vizsgálva:

$$f(x) = \frac{x-4}{a+1} - \frac{a-3}{x-4} = 0.$$

Ez alapján

$$(x-4)^2 = (a+1)(a-3).$$

Mivel $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$, ezért

$$0 < (x-4)^2 = (a+1)(a-3).$$

A kapott másodfokú egyenlőtlenséget a -ra megoldva $a < -1$ vagy $a > 3$ adódik.

Tehát az f függvénynek van zérushelye, ha $a \in]-\infty; -1[\cup]3; \infty[$.

b) $a = 1$ esetén $f(x) = \frac{x-4}{2} + \frac{2}{x-4}$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$).

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele $f'(x) = 0$, azaz

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{(x-4)^2} = 0.$$

Ebből

$$(x-4)^2 = 4,$$

$$|x-4| = 2,$$

$$x-4 = -2 \quad \text{vagy} \quad x-4 = 2,$$

$$x_1 = 2 \quad \text{vagy} \quad x_2 = 6.$$

A szélsőérték létezését és annak típusát a második derivált alapján vizsgálva:

$$f''(x) = \frac{4}{(x-4)^3},$$

$$f''(2) = -\frac{1}{2} < 0,$$

$$f''(6) = \frac{1}{2} > 0.$$

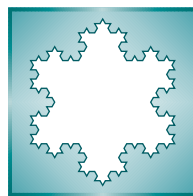
Tehát az $x = 2$ az $f(x)$ függvény lokális maximumhelye, a lokális maximum értéke pedig $f(2) = -2$.

Az $x = 6$ az $f(x)$ függvény lokális minimumhelye, a lokális minimum értéke pedig $f(6) = 2$.

Fonyóné Németh Ildikó, Fonyó Lajos

Keszthely

Matematika C gyakorlatok megoldása



C. 1842. Oldjuk meg a valós számok halmazán a $9^x + (6x - 23) \cdot 3^x + 5x^2 - 39x + 76 = 0$ egyenletet.

Javasolta: *Bencze Mihály* (Brassó)

Megoldás. Az $y = 3^x$ jelölés bevezetése után oldjuk meg az x paraméterű, y -ra nézve másodfokú egyenletet a megoldóképlet alkalmazásával:

$$\begin{aligned} y_{1,2} &= \frac{-(6x-23) \pm \sqrt{(6x-23)^2 - 4(5x^2 - 39x + 76)}}{2} = \\ &= \frac{-(6x-23) \pm \sqrt{16x^2 - 120x + 225}}{2} = \frac{-6x + 23 \pm \sqrt{(4x-15)^2}}{2} = \\ &= \frac{-6x + 23 \pm (4x-15)}{2}. \end{aligned}$$

Ebből $y_1 = -x + 4$ és $y_2 = -5x + 19$.

1. eset: $3^x = -x + 4$.

Mivel az $f(x) = 3^x$ valós számokon értelmezett függvény szigorúan monoton nő, illetve a $g(x) = -x + 4$ valós számokon értelmezett függvény szigorúan monoton csökken, így a két függvény grafikonjának legfeljebb egy metszéspontja van, vagyis az egyenletnek legfeljebb egy megoldása van. Az $x = 1$ pedig megoldás.

2. eset: $3^x = -5x + 19$.

Az előzőekhez hasonlóan mivel az $f(x) = 3^x$ valós számokon értelmezett függvény szigorúan monoton nő, illetve a $g(x) = -5x + 19$ valós számokon értelmezett függvény szigorúan monoton csökken, így a két függvény grafikonjának legfeljebb egy metszéspontja van, vagyis az egyenletnek legfeljebb egy megoldása van. Az $x = 2$ pedig megoldás.

Ellenőrzések:

$$3^1 + (6 \cdot 1 - 23) \cdot 3^1 + 5 \cdot 1^2 - 39 \cdot 1 + 76 = 0,$$

$$3^2 + (6 \cdot 2 - 23) \cdot 3^2 + 5 \cdot 2^2 - 39 \cdot 2 + 76 = 0.$$

Pánovics Máté (PTE Gyak. Ált. Isk., Gimn. és Óvoda Babits M. Gimn., 12. o. t.)
dolgozata alapján

Megjegyzés. Lényegében mindegyik megoldásban bevezetésre került az $y = 3^x$ jelölés, amellyel az egyenlet a következő alakba írható át:

$$y^2 + (6x - 23) \cdot y + 5x^2 - 39x + 76 = 0.$$

A megoldás folyamatának második lépéseként vagy szorzattá alakították az egyenlet bal oldalát, vagy megoldóképlettel megoldották mint egy paraméteres, y -ra nézve másodfokú egyenlet.

A megoldás befejezéséhez az x -re nézve exponenciális tagot is tartalmazó egyenleteket a bennük szereplő kifejezések monotonitására történő hivatkozással – amelyhez használhattak deriválást, vagy egyszerű függvénytani megfigyeléseket is a második lépéstől függetlenül – oldották meg. A megoldások ellenőrzésével tették végül teljessé a megoldást.

A feladatra összesen 43 versenyző és csapat küldött megoldást. 5 pontos 14, 4 pontos 21, 3 pontos 4, 2 pontos 1. 1 pontot 0, 0 pontot pedig 3 versenyző kapott.

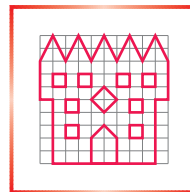


**Gratulálunk Oláh Verának,
lapunk korábbi főszerkesztőjének!**

Oláh Verát a tudomány népszerűsítése érdekében kifejtett eredményes újságírói munkásságának elismeréseként a Magyar Tudományos Akadémia Elnöksége Akadémiai Újságírói Díjban részesítette, amelyet 2025. május 5-én vett át Freund Tamás elnöktől az MTA 199. közgyűlésének megnyitóján.

Ez alkalomból is gratulál, és további jó egészséget, eredményes munkát kíván a KöMaL szerkesztősége.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok (859–863.)



K. 859. Egy nyelvtanfolyamért előre kifizettem már 25 000 forintot, de még fizetnem kell érte annyit, amennyit abban az esetben kellene még fizetnem, ha az előleg feleannyi lett volna, mint amennyit most még fizetnem kell. Hány forintba kerül ez a nyelvtanfolyam összesen?

Javasolta: *Kozma Katalin Abigél, Győr*

K. 860. Anna és Boglárka egy másfél méter átmérőjű kör alakú étkezőasztalnál játszik. Anna leteszi az asztalra a 42×30 cm-es téglalap alakú papírlapját, Boglárka pedig rárakja az ugyanekkora lapját úgy, hogy a két lap egy-egy átlója pontosan illeszkedik egymásra, ám a lapok nem fedik teljes egészében egymást és nem lógnak le az asztalról. Az asztallap hány százalékát fedi le így a két lap?

Javasolta: *Kozma Katalin Abigél, Győr*

K. 861. Egy nyolcfős baráti társaság szeretne maguk között tarokkbajnokságot rendezni. Minden partiban pontosan négyen vesznek részt, továbbá bármely két játékos azonos számú partiban játszik együtt. Bizonyítsuk be, hogy több mint 13 parti fog lezajlani.

Javasolta: *Paulovics Zoltán, Budapest*

K/C. 862. a) Mutassuk meg, hogy az alábbi tört minden pozitív egész n szám esetén egyszerűsíthető, azaz a számlálója és a nevezője nem relatív prím:

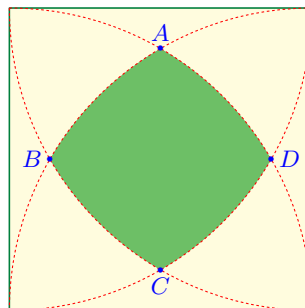
$$\frac{6n^2 + 13n + 6}{15n^2 + 22n + 8}.$$

b) Melyek azok a pozitív egész n számok, amelyekre a $\frac{2n+3}{5n+4}$ tört nem egyszerűsíthető, azaz a számlálója és a nevezője relatív prím?

Javasolta: *Bíró Bálint, Eger*

K/C. 863. A **K. 860.** feladatban szereplő Anna a négyzet alakú virágoskertjének közepére tulipán-ágyást készít. A mellékelt ábrán látható $ABCD$ síkidom belsejébe tulipánhagymákat ültet, a kert többi részére liliomokat. Az ágyást szegélyező körívek középpontjai a négyzet csúcsai, sugaruk hossza egyenlő a négyzet oldalhosszával. Mekkora a területe Anna tulipánágyásának, ha az egész virágoskert 100 m^2 területű?

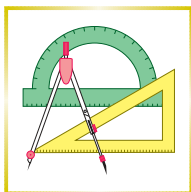
Javasolta: *Kozma Katalin Abigél, Győr*





Beküldési határidő: 2025. június 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (862–863., 1858–1862.)

Feladatok 10. évfolyamig

K/C. 862. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

K/C. 863. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

Feladatok mindenkinek

C. 1858. Tomi megszámozott 30 kártyát 1-től 30-ig, majd elővett 10 borítékot, és az összes kártyát beletette azokba. Minden borítékba legalább 2, de legfeljebb 4 kártya került. Ezután minden borítékra ráírta a benne lévő kártyákon szereplő számok összegét, és az összegek szerint csökkenő sorrendbe rendezte azokat. Mi lehet a legkisebb, illetve legnagyobb szám a sorrendben harmadik borítékban?

Javasolta: *Czett Máttyás*, Budapest

C. 1859. Egy nem szabályos háromszög oldalainak hossza a , b , c , amelyekre $a + b = 2c$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög beírt körének középpontját a súlyponttal összekötő szakasz párhuzamos a háromszög valamelyik oldalával.

német versenyfeladat

C. 1860. Tekintsünk egy pozitív egész számokból álló mértani sorozatot. Igazoljuk, hogy bármely *három* egymást követő sorozattag kontraharmonikus közepe egész szám. Állapítsuk meg, mitől függ ennek az egész számnak a paritása.

Az $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitív valós számok $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$ kontraharmonikus közepén a következő kifejezést értjük:

$$C(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}.$$

Javasolta: *Unyi Tamás*, Szada

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1861. Az $ABCDE$ gúla alaplappja a 12 egység oldalú $ABCD$ négyzet. Tudjuk, hogy az E csúcs alaplappra eső merőleges vetülete az $ABCD$ négyzet körülírt körére esik, továbbá, hogy $BE = CE$, valamint $AE = 18$. Határozzuk meg a gúla térfogatát.

Javasolta: *Bíró Bálint*, Eger

C. 1862. $n (> 2)$ gyerek hintázni szeretne a játszótér két hintájával, amelyeket nem különböztetünk meg. Kitalálták, hogy párosával fognak hintázni úgy, hogy mindenki mindegyik társával együtt hintázik egyszer, két percet. Minden hintázás után a hintázóknak le kell szállniuk, és átadni a hintákat egy olyan párosnak, akik még nem hintáztak együtt. (Olyan gyerek, aki most szállt ki a hintából, nem lehet az új párban.) Végrehajtható-e ez a terv?

Németh László, Fonyód ötlete alapján

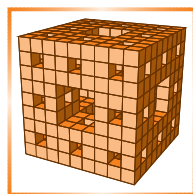


Beküldési határidő: 2025. június 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5462–5469.)



B. 5462. Ábel valamilyen sorrendben leírta egy sorba a pozitív egész számokat 1-től n -ig. Bármely pozitív egész szám 1-től $\frac{n(n+1)}{2}$ -ig előáll a leírás sorrendjében egymást követő leírt számok összegeként. Mi lehet az n ?

(4 pont)

Javasolta: Füredi Erik, Budapest

B. 5463. Adott a pozitív körüljárású $ABCD$ négyzet. Szerkesztendő olyan, szintén pozitív körüljárású, BEF szabályos háromszög, amelynek F csúcsa a B kezdőpontú, C -t tartalmazó félegyenesre esik, és amelyre $EAF \leq 45^\circ$ teljesül.

(3 pont)

Javasolta: Vigh Viktor, Sándorfalva

B. 5464. Legyen $k > 1$ egész szám. Mutassuk meg, hogy az $a_n = n^2 + n + 1$ sorozatnak végtelen sok olyan eleme van, amely a sorozat k különböző tagjának szorzatával egyenlő.

(4 pont)

Javasolta: Holló Gábor, Budapest

B. 5465. Legyenek AA' , BB' , CC' átmérők az ABC hegyesszögű, nem szabályos háromszög köré írt körben. Legyen az A' pontnak a BC egyenesre vett tükörképe A_1 , a B' -nek az AC -re vett tükörképe B_1 , a C' -nek az AB -re vett tükörképe pedig C_1 . Mutassuk meg, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög hasonló az ABC háromszöghöz.

(5 pont)

Javasolta: Kocsis Szilveszter, Budapest

B. 5466. Egy háromszög oldalainak hossza a , b és c . Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{(b+c)^2}{a^2+bc} + \frac{(c+a)^2}{b^2+ca} + \frac{(a+b)^2}{c^2+ab} \geq 6.$$

(5 pont)

Crux Mathematicorum

B. 5467. Bizonyítsuk be, hogy bármely a , b páratlan pozitív egészek esetén az $(a + b + 7)^7 - a^7 - b^7$ kifejezés értéke 168-cal osztva 7 maradékot ad.

(3 pont)

Javasolta: *Hujter Mihály*, Budapest

B. 5468. Legyen az ABC hegyesszögű háromszög beírt körének sugara r , körülírt körének sugara R és a talpponti háromszögébe írt kör sugara ϱ . Mutassuk meg, hogy $r \geq \sqrt{R\varrho}$.

(6 pont)

Javasolta: *Vígh Viktor*, Sándorfalva

B. 5469. Bergengóciában három város van, A , B és C , ezekben összesen 2025 ember lakik. Az idei évtől kezdve minden év végén A lakosságának a fele átköltözik B -be, B -ének a harmada C -be, és C -ének a negyede A -ba (ha az átköltözők száma bármely esetben nem lenne egész, akkor felfelé van kerekítve). Igazoljuk, hogy néhány év eltelte után egyik város lélekszáma sem fog változni.

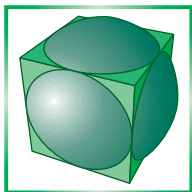
(6 pont)

Javasolta: *Váli Benedek*, Budapest



Beküldési határidő: 2025. június 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (908–910.)

A. 908. Legyen $n \geq 2$ egész szám. Piroska és a farkas egy olyan játékot játszanak, amelyben az $\{1, 2, \dots, n\}$ számokat színezik pirosra és kékre. Piroska minden körben mond egy (i, j) párt, ahol $1 \leq i < j \leq n$ és még i és j is színezetlen, majd farkas ezek egyikét kékre, a másikat pirosra színezi. A játék akkor ér véget, amikor az $\{1, 2, \dots, n\}$ számok közül legfeljebb egy kivétellel minden szám meg lett színezve. Mutassuk meg, hogy létezik egy olyan n -től nem függő $c > 0$ valós szám, és létezik Piroskának olyan stratégiája, amellyel biztosan el tudja érni, hogy a játék során valamikor legyenek olyan $1 \leq a \leq b \leq n$ számok, hogy az $\{a, a + 1, \dots, b\}$ halmazban legalább $c \cdot \sqrt[n]{n}$ -nel több szám legyen pirosra színezve, mint kékre.

Javasolta: *Pálvölgyi Dömötör*, Budapest

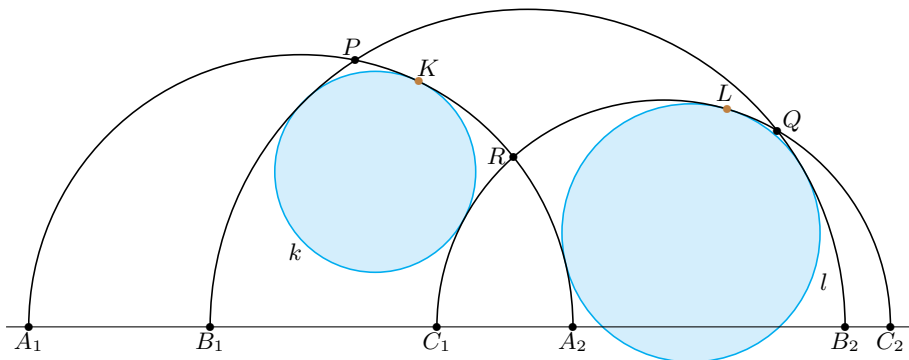
A. 909. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges N pozitív egész számhoz lehet találni olyan n pozitív egész számot, hogy az $n^3 - 1$ bármely két különböző prímtényezőjének legalább N legyen a különbsége.

A. 910. Adottak az $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ pontok ebben a sorrendben egy egyenesen. Az A_1A_2 és B_1B_2 átmérőjű félkörök P -ben, a B_1B_2 és C_1C_2 átmérőjű félkörök Q -ban, és a C_1C_2 és A_1A_2 átmérőjű félkörök R -ben metszik egymást. A k ,

l körök mindhárom félkört érintik az ábrán látható módon. Jelöljük k és az A_1A_2 átmérőjű félkör érintési pontját K -val, míg l és a C_1C_2 átmérőjű félkör érintési pontját L -lel.

Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{A_1R \cdot B_1P \cdot B_2Q \cdot C_2R}{A_2R \cdot B_1Q \cdot B_2P \cdot C_1R} = \frac{A_1K \cdot C_2L}{A_2K \cdot C_1L}.$$



Javasolta: Bán-Szabó Áron (Budapest)



Beküldési határidő: 2025. június 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



Informatikából kitűzött feladatok (663–666.)



I. 663. Egy színházban sokféle előadást játszanak, de naponta csak legfeljebb egyet. Az előadásokat sorszámmal jelöljük. A színészek érdekesnek nevezik azokat az időszakokat, amikor többféle darabot játszanak, és fárasztónak, amikor kevés félét vagy éppen nincs előadás.

Készítsünk programot *i663* néven, amely a napi előadások ismerete alapján megadja a legérdekesebb és a legfárasztóbb K napos időszakot.

A program standard bemenetének első sorában N a napok száma ($1 \leq N \leq 730$), M az előadások száma ($1 \leq M \leq 100$) és K a vizsgált időszak hossza ($1 \leq K \leq N$) szerepel. A következő sorban az egyes napok előadásainak sorszáma kerül, vagy 0, ha aznap nem volt előadás.

A programnak a standard kimenet első sorába annak a K napos időszak első napjának sorszámát kell írnia, amely a legérdekesebb, a második sorba, amely a legfárasztóbb volt. Több megoldás esetén a legkorábbit adjuk meg.

Példa a bemenetre:	Kimenet:
12 5 4	8
5 3 2 2 1 0 2 4 2 3 5 5	3

Magyarázat: **pirossal** jelölve a legérdekesebb és **zölddel** a legfárasztóbb időszak.

Beküldendő egy tömörített *i663.zip* állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

(10 pont)

I. 664. Ez a feladat a márciusi számban megjelent **I. 657.** feladat folytatása, amelyben a sík négy, különböző x koordinátájú pontja közül az első kettőn, az első hármon, illetve a négy ponton átmenő legfeljebb első-, másod-, illetve harmadfokú polinom együtthatóit kellett kiszámolni. Ezek képletét a **C8**, **C10** és **C12** cellákban kellett megjeleníteni.

Ezen polinomokat szeretnénk közös koordináta-rendszerben ábrázolni.

1. Nyissuk meg a helyes eredményeket adó saját, vagy a mintamegoldás táblázatát!

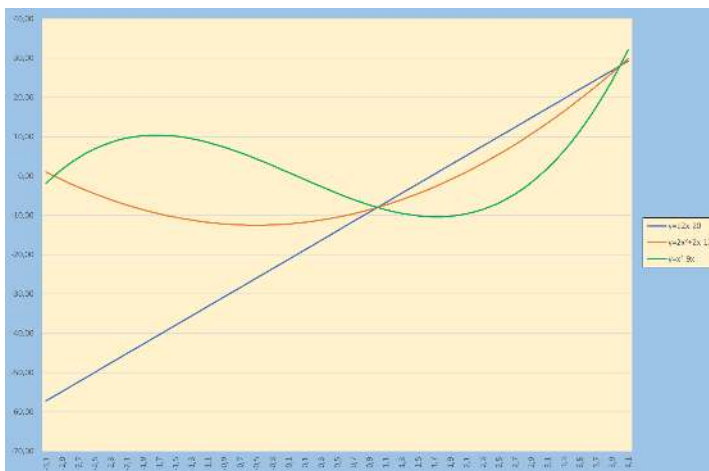
	A	B	C	D	E	F
1	Pontok	x	y			
2	P	1	-8	P(1;-8)	-3,0	
3	Q	4	28	Q(4;28)	4,0	
4	R	-3	0	R(-3;0)	-3,1	
5	S	-1	8	S(-1;8)	4,1	
6						
7	Polinomok:					
8	az első két ponton átmenő:	12x-20				
9						
10	az első három ponton átmenő:	2x ² +2x-12				
11						
12	a négy ponton átmenő:	x ³ -9x				

2. Ha a **B2:C5** tartomány mind a nyolc cellája a feltételeknek megfelelő szám-
adatot tartalmaz, és megvannak a függvényképletek is, jelenítsük meg a négy
 x koordináta felhasználásával
 - (a) az **E2** cellában az x koordináták minimumát és az **E4** cellában az **E2**
értékénél 0,1-del kisebb értéket,
 - (b) az **E3** cellában az x koordináták maximumát és az **E5** cellában az **E3**
értékénél 0,1-del nagyobb értéket.
 - (c) Az **E2:E5** tartomány celláinak értéke egy tizedes pontossággal jelenjen
meg.

- Hozzunk létre egy új munkalapot *grafadat* néven, ennek **A2**-es cellájában hivatkozással jelenítsük meg az előbb kiszámolt **E4** cella értékét.
- Az **A3** cellába kerüljön az előbb az **E2** cellába kiszámolt érték, majd töltsük fel az **A** oszlop celláit 0,1-del növekvő értékekkel mindaddig, amíg elérjük az imént kiszámolt **E5** cellabeli értéket.
- Az **A1**-es cellába kerüljön „ x ”, a **B1:D1** cellákba a három polinom képlete a minta szerint.
- A **B2:D202** tartomány celláiban számítsuk ki a három polinom adott x értékhez tartozó helyettesítési értékét.
- A kiszámolt értékekre állítsunk be két tizedes pontosságú megjelenítést.

	A	B	C	D	E
1	x	$y=12x-20$	$y=2x^2+2x-12$	$y=x^3-9x$	
2	-3,1	-57,20	1,02	-1,89	
3	-3	-56,00	0,00	0,00	
4	-2,9	-54,80	-0,98	1,71	
5	-2,8	-53,60	-1,92	3,25	
6	-2,7	-52,40	-2,82	4,62	
7	-2,6	-51,20	-3,68	5,82	
8	-2,5	-50,00	-4,50	6,88	
9	-2,4	-48,80	-5,28	7,78	
10	-2,3	-47,60	-6,02	8,53	
11	-2,2	-46,40	-6,72	9,15	
12	-2,1	-45,20	-7,38	9,63	
13	-2	-44,00	-8,00	10,00	
14	-1,9	-42,80	-8,58	10,27	
15	-1,8	-41,60	-9,12	10,44	
16	-1,7	-40,40	-9,62	10,51	
17	-1,6	-39,20	-10,08	10,48	
18	-1,5	-38,00	-10,50	10,35	
19	-1,4	-36,80	-10,88	10,12	
20	-1,3	-35,60	-11,22	9,79	
21	-1,2	-34,40	-11,52	9,36	
22	-1,1	-33,20	-11,78	8,83	
23	-1	-32,00	-12,00	8,20	
24	-0,9	-30,80	-12,18	7,47	
25	-0,8	-29,60	-12,32	6,64	
26	-0,7	-28,40	-12,42	5,71	
27	-0,6	-27,20	-12,48	4,68	
28	-0,5	-26,00	-12,50	3,55	
29	-0,4	-24,80	-12,48	2,32	
30	-0,3	-23,60	-12,42	1,00	
31	-0,2	-22,40	-12,32	-0,41	
32	-0,1	-21,20	-12,18	-1,89	
33	0	-20,00	-12,00	-3,25	
34	0,1	-18,80	-11,78	-4,62	
35	0,2	-17,60	-11,52	-6,00	
36	0,3	-16,40	-11,22	-7,38	
37	0,4	-15,20	-10,88	-8,75	
38	0,5	-14,00	-10,50	-10,12	
39	0,6	-12,80	-10,08	-11,49	
40	0,7	-11,60	-9,62	-12,86	
41	0,8	-10,40	-9,12	-14,23	
42	0,9	-9,20	-8,58	-15,60	
43	1	-8,00	-8,00	-17,00	
44	1,1	-6,80	-7,38	-18,43	
45	1,2	-5,60	-6,72	-19,90	
46	1,3	-4,40	-6,02	-21,41	
47	1,4	-3,20	-5,28	-22,97	
48	1,5	-2,00	-4,50	-24,58	
49	1,6	-0,80	-3,68	-26,25	
50	1,7	0,40	-2,82	-27,98	
51	1,8	1,60	-1,92	-29,77	
52	1,9	2,80	-1,00	-31,62	
53	2	4,00	0,00	-33,53	
54	2,1	5,20	0,98	-35,51	
55	2,2	6,40	1,92	-37,56	
56	2,3	7,60	2,82	-39,68	
57	2,4	8,80	3,68	-41,87	
58	2,5	10,00	4,50	-44,13	
59	2,6	11,20	5,28	-46,47	
60	2,7	12,40	6,02	-48,88	
61	2,8	13,60	6,72	-51,37	
62	2,9	14,80	7,38	-53,93	
63	3	16,00	8,00	-56,57	
64	3,1	17,20	8,58	-59,28	
65	3,2	18,40	9,12	-62,07	
66	3,3	19,60	9,62	-64,93	
67	3,4	20,80	10,08	-67,87	
68	3,5	22,00	10,50	-70,88	
69	3,6	23,20	10,88	-73,97	
70	3,7	24,40	11,22	-77,13	
71	3,8	25,60	11,52	-80,37	
72	3,9	26,80	11,78	-83,68	
73	4	28,00	12,00	-87,07	
74	4,1	29,20	12,18	-90,53	
75	4,2	30,40	12,32	-94,07	

- A *grafadat* munkalap **A:D** tartományának értéket tartalmazó celláit szegélyezzük, az **A1:D1** tartomány celláinak tartalmát formázzuk a minta szerint.
- Ábrázoljuk a függvényeket közös koordináta-rendszerben a mintának megfelelően egy új, diagram típusú, *graf* nevű munkalapon.



10. Munkánkat mentjük *poligraf* néven a program alapértelmezett formátumában.

Új segédszámításokat a *grafadat* munkalapon az **E** oszloptól jobbra végezhetünk. A megoldásban saját függvény vagy makró nem használható.

Beküldendő egy tömörített *i664.zip* állományban a táblázatkezelő munkafüzet, illetve egy rövid dokumentáció, amelyben szerepel a megoldáskor alkalmazott táblázatkezelő neve, verziószáma.

(10 pont)

I. 665. A Bujtor István (szerepe Ötvös Csöpi) névelvel fémjelzett Csöpi-filmek adataiból álló adatbázis szerepelt a 2023. októberi középszintű érettségi gyakorlati feladatai között. Ezt az adatbázist használjuk ebben a feladatban.

Az adatbázis a következő táblákat tartalmazza:

Táblák:

film (*id, cím, év, hossz*)

<i>id</i>	A film azonosítója (szám), ez a kulcs
<i>cím</i>	A film címe (szöveg)
<i>év</i>	A film készítésének éve (szám)
<i>hossz</i>	A film hossza percekben megadva (szám)

szereplo (*id, színész, szerep*)

<i>id</i>	A szereplő azonosítója (szám), ez a kulcs
<i>színész</i>	Az adott szerepben játszó színész neve (szöveg) Ha egy színész más filmekben eltérő szerepet játszott, akkor a neve többször előfordul.
<i>szerep</i>	Az adattábla nem tartalmaz azonos nevű különböző színészeket. Az adott színész által játszott szerep neve, leírása (szöveg) Egy filmben egy színész nem játszott több szerepet.

stab (*id*, *filmid*, *szereploid*)

id Azonosító (szám), ez a kulcs

filmid A film azonosítója (szám)

szereploid Az adott film szereplőjének azonosítója (szám)



Rögzítsük a következő feladatokat megoldó SQL parancsokat a feladatok végén zárójelben megadott névvel a *csopi_megoldas.sql* nevű állományban. A javítás során csak ennek az állománynak a tartalma lesz értékelve. Ügyeljünk arra, hogy a lekérdezésekben pontosan a kívánt mezők szerepeljenek, felesleges mezőt ne jelenítsünk meg.

1. A *csopi.sql* állomány tartalmazza az adatbázist és a táblákat létrehozó, valamint az adatokat a táblába beszűrő SQL parancsokat! Futtassuk a lokális SQL szerveren a *csopi.sql* parancsfájlt.
2. Készítsünk lekérdezést, amely megadja, hogy „**Matuska**” szerepét melyik színész játszotta és mely filmekben. (**2matuska**)
3. Készítsünk lekérdezést, amely meghatározza, hogy melyik filmben volt a legtöbb szereplő és abban hányan szerepeltek. (**3sokan**)
4. Adjuk meg lekérdezés segítségével azoknak a színészeknek a nevét, akik minden filmben szerepeltek. (**4nepszeruek**)
5. Számoljuk ki lekérdezés segítségével, hogy a legrövidebb film vetítési ideje hány százaléka a leghosszabbikénak. (**5arany**)
6. Készítsünk lekérdezést, amely meghatározza, hogy a „Hamis a baba” című film és az előtte készültek átlagos vetítési idejének hány százaléka a később készült filmek átlagos vetítési ideje. (**6ido**)
7. Lekérdezés segítségével írassuk ki azoknak a filmeknek a címét és a színészeknek a nevét, akik a saját nevükön szerepelnek a filmben. (**7sajatnev**)
8. Lekérdezés segítségével írassuk ki azoknak a színészeknek a nevét, akik az első és az utolsó filmben is szerepeltek. A listában a színészek neve ábécé sorrendben, ismétlődés nélkül jelenjen meg. (**8kitartok**)
9. Lekérdezés segítségével soroljuk fel azoknak a színészeknek a nevét és szerepszámaát, akik a filmekben több szerepet is alakítottak. A lista a szerepek száma szerint csökkenő sorrendben, ismétlődés nélkül jelenjen meg. (**9nevek**)

Beküldendő egy tömörített *i665.zip* állományban a *csopi_megoldas.sql* nevű állomány, amely a feladatok megoldását tartalmazza.

Letölthető állomány: *csopi.sql*

(10 pont)

I. 666. Egy digitális óceánon egyenes vonalban helyezkedik el a Bitek-sziget-csoport. A szigetek kiterjedése a közöttük lévő távolságokhoz képest elhanyagolható. Ha két szomszédos sziget legfőljebb H távolságra van egymástól, akkor közöttük hajóval lehet közlekedni, de az ennél nagyobb távolságra lévő szomszédos szigetek között csak repülővel lehet megtenni az utat. Fontos, hogy a szigetcsoport bármelyik szigetről bármelyik másik szigetére el lehessen jutni a fenti közlekedési eszközök alkalmazásával. A szigetek közötti hajó- és repülőjáratok oda-vissza közlekednek, a repülők a szigetcsoport két legtávolabbi szigete közötti utat is képesek megtenni.

A repülőjáratok üzemeltetése meglehetősen költséges és nem környezetbarát – még akkor is, ha a repülőgépek két szomszédos sziget között közlekednek –, ezért a szigetcsoport közlekedési minisztere azon töpreng, hogyan csökkentse a repülőjáratok számát. Kérdés, hogy legalább hány repülőjáratnak kell közlekednie, hogy bármelyik szigetről bármely szigetre el lehessen jutni.

Készítsünk programot *i666* néven, amely megadja a választ a miniszter kérdése, tehát kiszámolja a szigetek összeköttetéséhez szükséges legkevesebb repülőjárat számát.

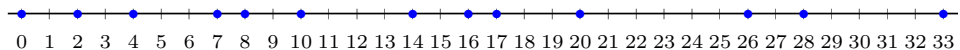
A program standard bemenetének első sorában a szigetek N száma ($10 \leq N \leq 500$), majd a hajóval megtehető legnagyobb H távolság ($1 \leq H \leq 10$) szerepel. A következő sorban $N - 1$ pozitív egész szám áll: a szigetek távolsága a Bitek-szigetcsoport bal szélső szigetétől (nem feltétlenül távolság szerinti sorrendben).

A program a standard kimenet első sorába írja ki a szükséges repülőjáratok minimális számát.

Példa:

Bemenet	Kimenet
13 3	3
10 14 28 33 16 4 2 7 17 20 8 26	

Magyarázat: A szélső szigettől a 10 és 14 távolságra lévő, a 20 és 26 távolságra lévő, valamint a 28 és 33 távolságra lévő szigetek között szükséges repülőjáratokat fenntartani.



Beküldendő egy tömörített *i666.zip* állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

(10 pont)

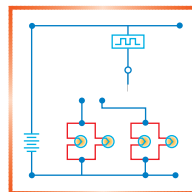


Beküldési határidő: 2025. június 16.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



Fizika gyakorlatok megoldása



G. 873. Egy labdát feldobunk v_0 sebességgel. Amikor a tetőpontra ér, egy újabb labdát dobunk fel szintén v_0 sebességgel. Hogyan változik a két labda relatív sebessége az időben? Mikor és hol találkoznak a labdák?

(3 pont)

I. megoldás. Vizsgáljuk a mozgást az először feldobott labdához rögzített (szabadon eső) koordináta-rendszerben. A másik labdát abban a pillanatban dobjuk fel, amikor ez éppen a tetőpontra ér, és így a sebessége nulla. Eszerint a második labda az elsőhöz viszonyítva v_0 sebességgel mozog (közeledik hozzá). Ez a relatív sebesség nem változik az időben, hiszen mindkét labda szabadon esik.

Az első labda

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

magasságra emelkedik, a második labda ekkora távolságból indulva közeledik hozzá, a szabadon eső koordináta-rendszerben állandó v_0 sebességgel. Eszerint a második labda feldobása után

$$\tau = \frac{h_{\max}}{v_0} = \frac{v_0}{2g}$$

idővel találkoznak.

Ez alatt az idő alatt az első labda a földhöz rögzített koordináta-rendszerben

$$s = \frac{g}{2} \tau^2 = \frac{v_0^2}{8g} = \frac{1}{4} h_{\max}$$

utat tesz meg, azaz a két labda

$$h = h_{\max} - s = \frac{3v_0^2}{8g} = \frac{3}{4} h_{\max}$$

magasságban találkozik.

Lakatos Levente (Szekszárdi Garay János Gimn., 9. évf.)

II. megoldás. Az először feldobott labda sebessége az idő függvényében:

$$v_1 = v_0 - gt.$$

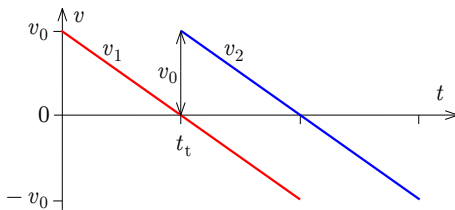
A labda

$$t_t = \frac{v_0}{g}$$

idő múlva ér a tetőpontra (ekkor lesz a sebessége nulla). Az ekkor feldobott második labda sebessége az idő függvényében:

$$v_2 = v_0 - g(t - t_t) = v_0 - g\left(t - \frac{v_0}{g}\right) = 2v_0 - gt, \quad \text{ha } t \geq t_t = \frac{v_0}{g}.$$

Eszerint a két labda egymáshoz viszonyított sebessége $\Delta v = v_2 - v_1 = v_0$, időben állandó (1. ábra). A két labda ekkora sebességgel közeledik egymáshoz a találkozásig.



1. ábra

A labdák elmozdulása az idő függvényében:

$$x_1 = v_0 t - \frac{g}{2} t^2,$$

$$x_2 = v_0(t - t_t) - \frac{g}{2}(t - t_t)^2 = v_0 t - \frac{v_0^2}{g} - \frac{g}{2} t^2 + v_0 t - \frac{v_0^2}{2g} = 2v_0 t - \frac{g}{2} t^2 - \frac{3v_0^2}{2g}.$$

Amikor találkoznak, a két labda elmozdulása megegyezik:

$$x_2 - x_1 = v_0 t - \frac{3v_0^2}{2g} = 0,$$

amiből a találkozás időpontja (az első labda feldobása után):

$$t = \frac{3v_0}{2g}.$$

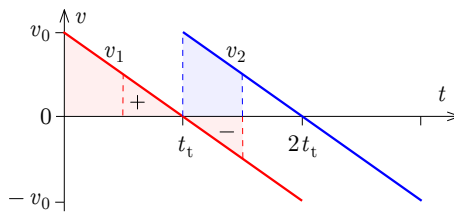
(A második labda feldobása után pedig $\tau = t - t_t = \frac{v_0}{2g}$ idővel, az előző megoldással összehangban.)

A találkozás magassága (a feldobás helyétől mérve):

$$h = x_1 = v_0 t - \frac{g}{2} t^2 = \frac{3v_0^2}{2g} - \frac{9v_0^2}{8g} = \frac{3v_0^2}{8g}.$$

Csáki Anikó (Kecskeméti Katona J. Gimn., 10. évf.)

Megjegyzés. A találkozás ideje és helye a 2. ábráról közvetlenül is leolvasható. Az elmozdulás a sebesség-idő grafikonon a görbe alatti terület, de az időtengely alatti részt



2. ábra

negatív előjellel kell számításba venni. Ez alapján az eredő piros és a kék terület akkor lesz egyforma, ha a találkozás a második labda feldobása után

$$\tau = \frac{t_t}{2} = \frac{v_0}{2g}$$

idővel történik. A találkozás magassága pedig a kék trapéz területe, amely a nagy piros háromszög területének (a maximális magasságnak) a 3/4-e:

$$h = \frac{3}{4} h_{\max} = \frac{3v_0^2}{8g}.$$

29 dolgozat érkezett. Helyes 18 megoldás. Kicsit hiányos (2 pont) 6, hiányos (1 pont) 4, nem értékelt 1 dolgozat.

G. 874. Egy teherautóra $M = 3$ tonna szenet kell felrakni. A szén az autótól $L = 20$ m távolságra van. A rakodáshoz két $L = 20$ m hosszú szállítószalag vehető igénybe. Az egyik szalag másodpercenként $m_1 = 10$ kg szenet tud szállítani $v_1 = 1$ m/s sebességgel, a másik $m_2 = 15$ kg szenet $v_2 = 0,5$ m/s sebességgel. Mennyi idő alatt lehet a szenet a leggyorsabban felrakni a teherautóra?

(4 pont)

Megoldás. Az első 20 másodperc alatt egyik szalag sem rakott még szenet a teherautóba, de ennek az időtartamnak a végére az 1-es szalag már teljesen meg van rakva szénnel ($20 \text{ s} \cdot 1 \text{ m/s} = 20 \text{ m}$), a 2-es szalag pedig a feléig ($20 \text{ s} \cdot 0,5 \text{ m/s} = 10 \text{ m}$).

A második 20 másodperc alatt az 1-es szalag már $20 \text{ s} \cdot 10 \text{ kg/s} = 200 \text{ kg}$ szenet rakott a teherautóba, a 2-es szalag még semmit, de már teljesen meg van rakva szénnel ($40 \text{ s} \cdot 0,5 \text{ m/s} = 20 \text{ m}$).

Az elkövetkező másodpercekben már, mindkét szalag teljes kapacitással fogja rakni a szenet. A teljes mennyiségből még $3000 \text{ kg} - 200 \text{ kg} = 2800 \text{ kg}$ szén maradt. A két szalag együtt másodpercenként 25 kg szenet rak fel. Így a maradék mennyiség felrakásához további $\frac{2800 \text{ kg}}{25 \text{ kg/s}} = 112 \text{ s}$ időre van szükség.

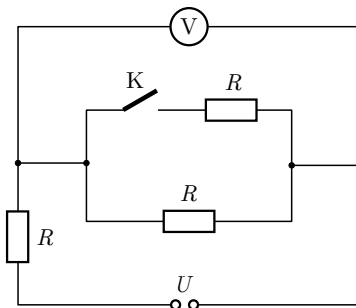
Eszerint leggyorsabban összesen 152 másodperc alatt lehet a szenet felrakni a teherautóra.

Kossár Benedek Balázs (Pécsi Leőwey Klára Gimn., 9. évf.)

Megjegyzés. A megoldás során azt feltételezzük, hogy kezdetben a szalagok üresek. Amennyiben azt szeretnénk, hogy a szalagok a felrakódás végén újra üresek legyenek, akkor a szén szalagokra rakását hamarabb abba kell hagyni: a lassabb szalagét 40 , a gyorsabbét 20 másodperccel a vége előtt.

44 dolgozat érkezett. Helyes 18 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 4, hiányos (1–2 pont) 22 dolgozat.

G. 876. Az ábrán látható voltmérő a K kapcsoló zárása után 5 V-tal kisebb feszültséget jelez, mint nyitott állás esetén. Mekkora az U feszültség, ha $R = 2,4 \, \Omega$?



(3 pont)

Megoldás. A voltmérőn mért feszültséget feszültségosztás képletével számoljuk ki. Jelöljük a voltmérőn mért feszültséget U_{ny} -nel a kapcsoló nyitott állapotában és U_z -vel a kapcsoló zárt állapotában. Az első esetben a voltmérő

$$U_{\text{ny}} = \frac{R}{R + R} U = \frac{U}{2}$$

feszültséget mutat, mert ekkor két R nagyságú ellenállás sorba van kapcsolva, és a voltmérő az egyik R ellenállás kivezetéseire van kötve. A második esetben

$$U_z = \frac{R \times R}{R \times R + R} U = \frac{\frac{R}{2}}{\frac{R}{2} + R} U = \frac{U}{3}.$$

Ekkor két R értékű ellenállás párhuzamosan van kapcsolva (a $\times$ jel a „replusz”-t, a reciprokok összegének reciprokát jelöli), ezek kivezetéseire van kötve a voltmérő, és ez sorba van kötve egy harmadik R ellenállással. A feladat szerint

$$U_{\text{ny}} - U_z = \frac{U}{2} - \frac{U}{3} = \frac{U}{6} = 5 \text{ V},$$

amiből a telep feszültsége: $U = 30 \text{ V}$.

Megjegyzés. Látható, hogy ebben a feladatban az R ellenállás értékétől nem függ a megoldás (csak az egyes ellenállások értékének arányától).

Blaskovics Bálint (Budapest, Óbudai Árpád Gimn., 8. évf.)

36 dolgozat érkezett. Helyes 31 megoldás. Kicsit hiányos (2 pont) 2, hiányos (1 pont) 3 dolgozat.

G. 879. Ugyanaz a repülő, ugyanolyan magasan, ugyanakkora sebességgel, tiszta időben száll az égen. Vannak olyan napok, amikor nagyon hosszú csíkot húz maga után, máskor rövidebbet, és olyan is van, amikor egyáltalán nem látható csík a repülő után. Elsősorban mitől függ, hogy képződik-e csík, és hogy az milyen hosszú?

(3 pont)

Megoldás. A csíkot, amelyet maga után húz a repülő, kondenzcsíknak nevezzük. A kondenzcsík a repülőgép által kibocsátott égéstermékekre kicsapódott megfagyott vízpára, amely hosszú, vékony felhő formájában látható az égen.

A repülőgép által kibocsátott égéstermékek: szén-dioxid, vízgőz, koromszemcsék és kénsav tartalmú aeroszolok. Az utóbbi kettő a légkörben nagy magasságban előforduló túltelített vízpára számára kondenzációs magvakként szolgál. A túltelített vízpára a szemcsékre és cseppecskékre rátapadva, majd megfagyva felhőszerű képződményt hoz létre. A kondenzcsík tehát nem más, mint felhő, csak kialakulását az emberi tevékenység segíti elő.

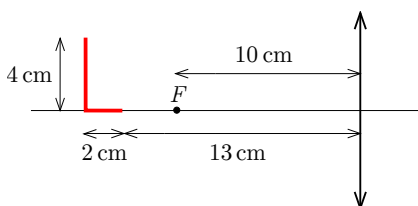
Abban a magasságban, ahol a repülőgépek közlekednek, jóval hidegebb van és a légnyomás is sokkal alacsonyabb, mint a felszín közelében, és így a levegő könnyen vízpárával túltelítetté válhat. A hőmérséklet csökkenésével a levegőben kevesebb vízpára lehet, a *harmatpont* elérésekor pedig telítetté válik. A túltelített vízgőz könnyebben kicsapódik, ha vannak apró részecskék, amelyeken a kicsapódás megkezdődhet.

Ezek a kondenzcsíkok úgy viselkednek, mint a felhők: a fátyolfelhők közé sorolhatók, amelyek apró jégkristályokból állnak. Az, hogy mennyire láthatók, milyen sokáig maradnak fenn és mennyire terülnek szét, attól függ, hogy az adott légréteg páratartalma, hőmérsékleti és szélviszonyai mit tesznek lehetővé. Hidegfront utáni száraz levegőben csak egészen rövid csíkokat látunk. Melegfront előtti nedves levegőben azonban sokáig (akár órákig is) fennmaradnak a csíkok.

Majer Veronika (Komárom, Selye János Gimnázium, 9. évf.)

33 dolgozat érkezett. Helyes 5 megoldás. Kicsit hiányos (2 pont) 16, hiányos (1 pont) 11, hibás 1 dolgozat.

G. 880. Vékony, 10 cm fókusztávolságú gyűjtőlencse optikai tengelyére egy L-alakú, világító LED-szalagot állítottunk. Az L-alak 4 cm-es hosszabbik szára merőleges az optikai tengelyre, rövidebb, 2 cm hosszúságú szára pedig az optikai tengelyre illeszkedik úgy, hogy végpontja a lencsétől – az ábrának megfelelően – 13 cm távolságban van.



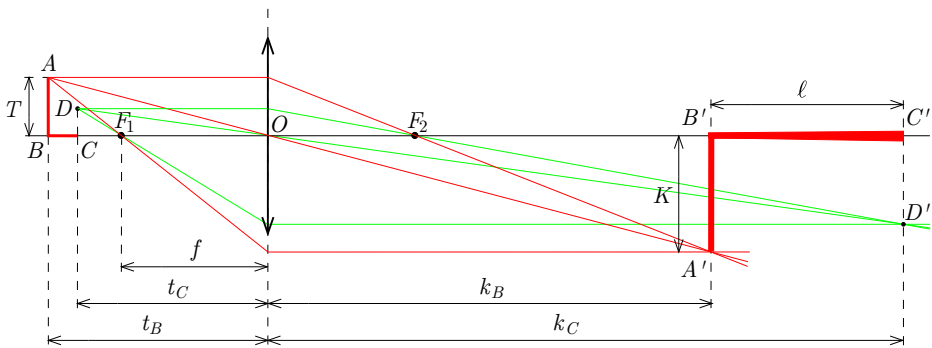
a) Vázlatosan szerkesszük meg a lencse által a LED-szalagról alkotott képet!

b) Számítsuk ki, milyen hosszú a LED-szalag képén az optikai tengellyel párhuzamos, illetve az optikai tengelyre merőleges szakasz! Mekkora ezeknek a részeknek a nagyítása?

(4 pont)

Tornyai Sándor fizikaverseny, Hódmezővásárhely

Megoldás. a) Jelölje a LED-szalag meghatározó pontjait A , B és C , az ezeknek megfelelő pontokat a valódi képen A' , B' és C' , $f = 10$ cm a lencse fókusztávolságát, $t_B = 15$ cm, $t_C = 13$ cm, k_B és k_C az indexekben szereplő pontok tárgy- és képtávolságát, $T = 4$ cm az AB , K az $A'B'$ és ℓ a $B'C'$ távolságot. A szerkesz-



1. ábra

tés az 1. ábrán látható. Az A pont képe egyszerűen megszerkeszthető a szokásos módon az egyik vagy másik fókuszponton, illetve a lencse középpontján átmenő (piros) sugármenetekkel. A B pont képe az optikai tengelyen lesz, ugyanolyan távol, mint az A pont képe. A C pont képe szintén az optikai tengelyen lesz, ennek megszerkesztéséhez vegyünk fel egy D segédpontot (t_C tárgy távolsággal, de nem az optikai tengelyen), amelynek a képe A -hoz hasonlóan megszerkeszthető (zöld sugármenetek), és így megadja a k_C képtávolságot is.

b) A képtávolságok a lencse leképzési törvényével meghatározhatók:

$$k_B = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{t_B} \right)^{-1} = 30 \text{ cm},$$

$$k_C = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{t_C} \right)^{-1} = 43,3 \text{ cm}.$$

AOB és $A'O B'$ hasonló háromszögek, így a LED-szalag optikai tengelyre merőleges szárának képe

$$K = \frac{k_B}{t_B} T = 8 \text{ cm}$$

hosszú. Az optikai tengellyel párhuzamos szakasz képének hossza:

$$\ell = k_C - k_B = 13,3 \text{ cm}.$$

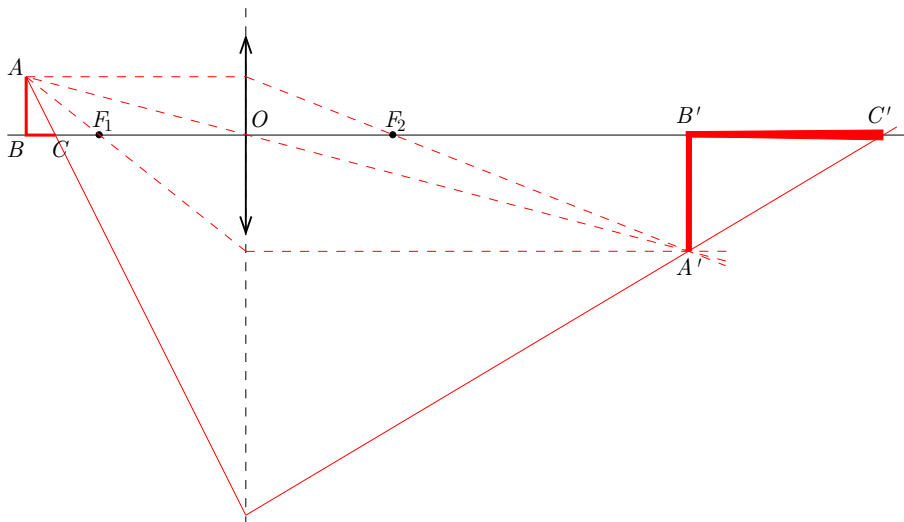
Az optikai tengelyre merőleges nagyítás:

$$N_{\perp} = \frac{K}{T} = \frac{k_B}{t_B} = 2,$$

míg az optikai tengellyel párhuzamos nagyítás:

$$N_{\parallel} = \frac{\ell}{t_B - t_C} = \frac{k_C - k_B}{t_B - t_C} = 6,67.$$

Hegedűs Márk (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 10. évf.)



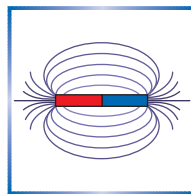
2. ábra

Megjegyzés. A C pont képe egyszerűbben megszerkeszthető a 2. ábrán látható folytonos vonallal rajzolt sugármenet segítségével is. Az A' pont megoldásban leírt megszerkesztése után megrajzoljuk az AC egyenest, majd a lencse síkjával való metszéspontjából egyenest húzunk az A' ponton át. Ez az egyenes az optikai tengelyt a C' pontban fogja metszeni, hiszen ez egyben az A és a C pontból kiinduló sugármenet is.

A megoldás során hallgatólagosan végig kihasználtuk, hogy egyenes szakasz képe is egyenes szakasz lesz. A nagyítások alapján azt is észrevehetjük, hogy az L vízszintes szárának vastagsága – ahogy az a 2. ábrán is látható – változó lesz, de ennek vizsgálatát nem kérte a feladat.

28 dolgozat érkezett. Helyes 7 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 12, hiányos (1–2 pont) 8, hibás 1 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása



P. 5610. Az *Eros* kisbolygó 1,13 CSE-re közelíti meg a Napot, naptávolságban 1,78 CSE-re kerül tőle. CSE a csillagászati egység, a Nap-Föld közepes távolsága. Mekkora az *Eros* kisbolygó legnagyobb és legkisebb sebessége?

(5 pont)

Közlő: Simon Péter, Pécs

Megoldás. Jelölje μ a Nap standard gravitációs paraméterét, ami a gravitációs állandó és a Nap tömegének szorzata:

$$\mu = \gamma M_{\odot} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg} \approx 1,33 \cdot 10^{20} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}.$$

Jelölje r_p az Eros kisbolygó perihéliumnál (napközelnél), r_a pedig az aphéliumnál (naptávolnál) vett távolságát a Nap tömegközéppontjától. A megadott adatok:

$$r_p = 1,13 \text{ CSE} = 1,69 \cdot 10^{11} \text{ m} \quad \text{és} \quad r_a = 1,78 \text{ CSE} = 2,66 \cdot 10^{11} \text{ m}.$$

A bolygó sebessége a perihéliumnál legyen v_p , az aphéliumnál pedig v_a . A mozgási energiának és a gravitációs potenciális energiának az összege a *vis-viva energia*, amely a keringés során végig állandó:

$$(1) \quad \frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{\gamma mM_\odot}{r_p} = \frac{1}{2}mv_a^2 - \frac{\gamma mM_\odot}{r_a},$$

$$\frac{v_p^2}{2} - \frac{v_a^2}{2} = \frac{\mu}{r_p} - \frac{\mu}{r_a}.$$

Mivel az apszispontokban a sebességvektor merőleges a sugárvektorra, ezért a perdületmegmaradás értelmében:

$$(2) \quad mr_p v_p = mr_a v_a,$$

$$v_a = \frac{r_p}{r_a} v_p.$$

A (2) kifejezést az (1) egyenletbe beírva, majd rendezve:

$$\frac{v_p^2}{2} \left(1 - \frac{r_p^2}{r_a^2} \right) = \frac{\mu}{r_p} - \frac{\mu}{r_a},$$

$$v_p^2 = \frac{2\mu \left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_a} \right)}{1 - \frac{r_p^2}{r_a^2}} = \frac{2\mu \frac{r_a - r_p}{r_a r_p}}{\frac{r_a^2 - r_p^2}{r_a^2}} = \frac{2\mu r_a}{(r_a + r_p)r_p},$$

$$v_p = \sqrt{\frac{2\mu r_a}{(r_a + r_p)r_p}} \approx 3,10 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 31,0 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Ebből a (2) kifejezés alapján (vagy az indexek felcserélésével):

$$v_a = \frac{r_p}{r_a} v_p \approx 1,97 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 19,7 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Tehát az Eros kisbolygó legnagyobb sebessége (napközelen) 31,0 km/s, legkisebb sebessége pedig (naptávolban) 19,7 km/s.

A *Fizika Közgazra csapat: Illés Gergely Levente, Páter Péter*
(Pécsi Janus Pannonius Gimn., 12. évf.)

54 dolgozat érkezett. Helyes 32 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 11, hiányos (1–3 pont) 11 dolgozat.

P. 5616. Egy róka állandó v_1 sebességgel, egyenes vonal mentén fut. Üldözőbe veszi őt egy kutya, amelynek sebessége állandó v_2 nagyságú, iránya pedig mindig a róka felé mutat. Egy adott pillanatban, amikor a róka és a kutya távolsága d , a két sebesség éppen egymásra merőleges. Mekkora a kutya gyorsulása ebben a pillanatban?

(5 pont)

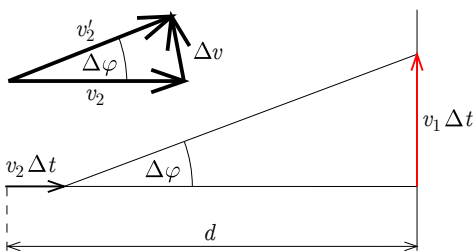
Közli: Baranyai Klára, Veresegyház

I. megoldás. Vegyünk egy kicsiny Δt időtartamot. Ezalatt a kutya elmozdulása $v_2 \Delta t$, az időtartam kicsinsége miatt jó közelítéssel az eredeti irányban. A róka végig egyenes vonalú egyenletes mozgással mozog, így elmozdulása ezalatt $v_1 \Delta t$. A kicsiny időtartam végére a kutya állandó nagyságú sebessége (egy szintén kicsiny) $\Delta\varphi$ szöggel elfordul, $\mathbf{v}_2$ -ről $\mathbf{v}'_2$ -re változik. Az 1. ábra alapján egyrészt:

$$\Delta\varphi \approx \operatorname{tg} \Delta\varphi = \frac{v_1 \Delta t}{d - v_2 \Delta t} \approx \frac{v_1 \Delta t}{d},$$

másrészt a vektorábra alapján:

$$\Delta v = |\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}_2| = v_2 \Delta\varphi.$$



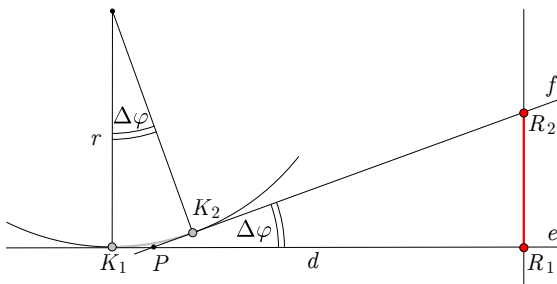
1. ábra

Ezek felhasználásával a kutya gyorsulása a vizsgált pillanatban:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 \Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{v_1 v_2}{d}.$$

Tóth Hanga Katalin (Kecskeméti Bányai Júlia Gimn., 11. évf.)

II. megoldás. Legyen a kutya helye a vizsgált pillanatban K_1 , a róka helye R_1 , a kutya pillanatnyi sebességvektora legyen az e egyenesen, és közvetlenül a kérdéses pillanat után közelítsük mozgását egyenletes körmozgással a pályája r sugarú *simulókörén*. Kicsi Δt idő után legyen a kutya mozgása során a szögelfordulása $\Delta\varphi$, a kutya új helye K_2 , a rókáé pedig R_2 , és a kutya pillanatnyi sebességvektora legyen ekkor az f egyenesen. (Lásd a 2. ábrát.)



2. ábra

Az ábra alapján:

$$\Delta\varphi \approx \operatorname{tg} \Delta\varphi = \frac{\overline{R_1 R_2}}{\overline{P R_1}} \approx \frac{v_1 \Delta t}{d}.$$

A vizsgált időpillanatban a simulóköron, mint körpályán állandó nagyságú sebességgel mozgó kutya szögsebessége:

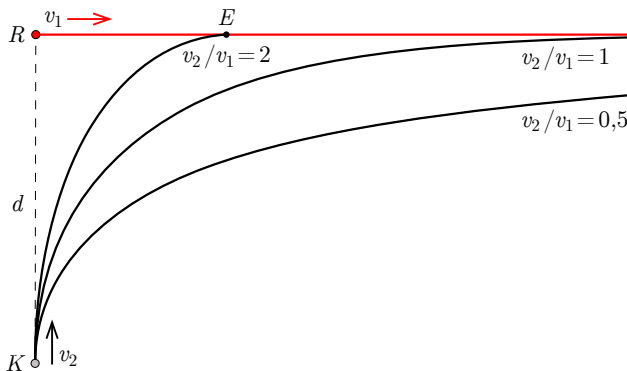
$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{v_1}{d},$$

gyorsulása pedig (a centripetális gyorsulás képlete szerint):

$$a = \omega v_2 = \frac{v_1 v_2}{d}.$$

Gyenes Károly (Kecskeméti Bányai Júlia Gimn., 11. évf.)

Megjegyzés. Fontos hangsúlyozni, hogy a kutya *nem* körpályán mozog, így a centripetális gyorsulást a körmozgásra ismert képlettel csak egy adott pillanatban, a pillanatnyi simulóköron való mozgásra lehet számolni.



3. ábra

A kutya pályáját numerikus módszerekkel¹ meghatározhatjuk. A 3. ábrán három különböző v_2/v_1 aránynál ábrázoltuk a kutya pályáját. Ha $v_2 > v_1$, akkor a kutya elkapja a rókát (az ábrán az E pontban). Ha $v_2 = v_1$, akkor hosszú idő után $d/2$ állandó távolsággal lemaradva követi, ha pedig $v_2 < v_1$, akkor egyre jobban lemaradva üldözi.

34 dolgozat érkezett. Helyes 14 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 11, hiányos (1–3 pont) 6, hibás 1, nem versenyszerű 2 dolgozat.

P. 5619. A Föld felszínéről függőlegesen felfelé az első kozmikus sebességgel elindítunk egy űrszondát.

a) Milyen magasra emelkedik a szonda?

b) Mennyi idő múlva esik vissza a földre?

A légellenállástól és a Föld forgásától tekintsünk el.

¹Ehhez lásd Csóka Péter, Seprődi Barnabás: Fizika problémák megoldása numerikus módszerekkel cikkét a KöMaL 2024. novemberi számában.

(Segítség: Mesterséges égitestek mozgásával kapcsolatos problémák és feladatok *c. cikk a honlapon.*)

(5 pont)

Közli: Gnädig Péter, Vácduka

Megoldás. Az első kozmikus sebességgel a Föld felszínének közelében körpályán keringhet egy test. A mozgás dinamikai egyenlete:

$$m \frac{v^2}{R} = \gamma \frac{mM}{R^2},$$

ahol R a Föld sugara, M a Föld tömege és γ a gravitációs állandó. Ebből

$$v^2 = \frac{\gamma M}{R} \quad \text{és} \quad v = \sqrt{\frac{\gamma M}{R}} \approx 7,91 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Megjegyzés. Az első kozmikus sebesség nagysága megtalálható táblázatokban, de egyszerűen kiszámolható a Föld R sugara és a g nehézségi gyorsulás értékeinek ismeretében is. A Föld felszínén lévő testre ható nehézségi erő (a Föld forgását elhanyagolva):

$$mg = \gamma \frac{mM}{R^2},$$

amiből

$$v^2 = \frac{\gamma M}{R} = gR \approx 6,26 \cdot 10^7 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}.$$

a) Az emelkedés magasságát a mechanikai energia megmaradása alapján határozhatjuk meg:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 - \gamma \frac{mM}{R} &= 0 - \gamma \frac{mM}{R+h}, \\ \frac{\gamma M}{2R} - \frac{\gamma M}{R} &= -\frac{\gamma M}{R+h}, \\ \frac{1}{2R} - \frac{1}{R} &= -\frac{1}{R+h}, \\ h &= R. \end{aligned}$$

A szonda tehát a Föld sugarával megegyező magasságba emelkedik:

$$h = R = 6378 \text{ km}.$$

b) A függőleges hajítást egy nagyon elnyújtott ellipszispályával közelítjük. Ilyenkor az ellipszis fókuszai közelítőleg a nagytengety végpontjaiba esnek, azaz $a = R$. Kepler III. törvénye értelmében ezen az ellipszispályán a keringési idő megegyezik

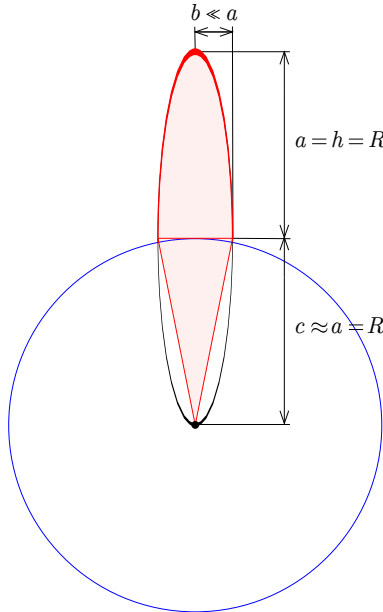
a közvetlenül a Föld felszíne felett, az első kozmikus sebességgel körpályán mozgó test keringési idejével:

$$T = \frac{2\pi R}{v} \approx 84,4 \text{ perc.}$$

A szonda azonban csak az ellipszispálya felét futja be. Az ehhez tartozó t időt Kepler II. törvénye alapján határozhatjuk meg:

$$\frac{t}{T} = \frac{A_s}{A},$$

ahol A_s a szondához húzott vezérsugár által sírt terület, $A = ab\pi$ pedig az ellipszis teljes területe.



Az ábra alapján a sírt terület egy fél ellipsziszből és egy egyenlő szárú háromszögből rakható össze:

$$A_s = \frac{1}{2}A + ab = \frac{1}{2}ab(\pi + 2),$$

amiből a keresett idő:

$$t = \frac{A_s}{A}T = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\right)T \approx 69 \text{ perc.}$$

A *vip csapat*: Szalai Dorottya, Dávid Alíz Tünde, Halász Júlia Regina (Budapest, Városmajori Gimn., 11. évf.)

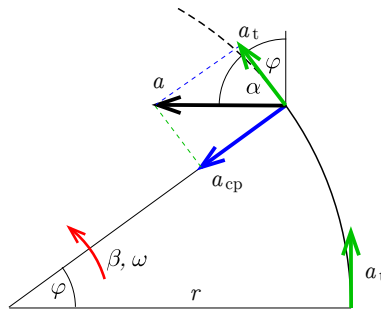
36 dolgozat érkezett. Helyes 18 megoldás. Kicsit hiányos (3–4 pont) 5, hiányos (1–2 pont) 13 dolgozat.

P. 5626. Egy motoros álló helyzetből indulva úgy halad egy körpályán, hogy sebességének nagysága egyenletesen növekszik. Az indulástól számítva mekkora szöggel fordul el a pálya mentén, mire gyorsulásának iránya a kezdeti gyorsulásának irányára először lesz merőleges?

(5 pont)

Közli: Zsigri Ferenc, Budapest

Megoldás. Kezdetben a motorosnak csak tangenciális gyorsulása van, de miután a pályáján valamekkora φ szöggel elfordul, a gyorsulásvektora már nem a pálya érintőjének irányába mutat, mert ez a vektor ekkor már az a_t tangenciális és a_{cp} centripetális gyorsulások vektori eredője lesz. Az eredeti és a pillanatnyi gyorsulásvektor által bezárt szög két részből áll össze: egyrészt az érintőleges vektor φ szöggel fordult el (hiszen ez a vektor mindig merőleges lesz a sugárra), másrészt a centripetális gyorsulás miatt a gyorsulásvektor valamekkora α szöget zár be az érintővel (1. ábra).



1. ábra

Az utóbbit megadó összefüggés:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_{cp}}{a_t} = \frac{r\omega^2}{r\beta} = \frac{\omega^2}{\beta},$$

ahol r a körpálya sugara, ω és β pedig a motoros pályamenti szögsebessége és szöggyorsulása. Mivel a motoros egyenletesen gyorsuló körmozgást végez:

$$\varphi = \frac{\beta}{2}t^2 \Rightarrow \beta = \frac{2\varphi}{t^2},$$

$$\omega = \beta t = \frac{2\varphi}{t},$$

$$(1) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega^2}{\beta} = 2\varphi.$$

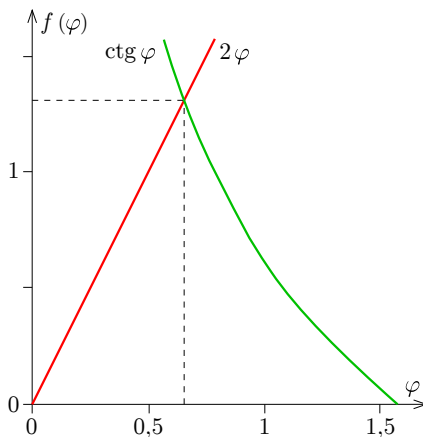
A keresett pillanatban $\varphi + \alpha = 90^\circ$, tehát α és φ pótszögek. Így viszont

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi},$$

amit (1)-be behelyettesítve φ -re a

$$(2) \quad \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = 2\varphi$$

transzcendens egyenletet kapjuk. A megoldását grafikusan keressük meg. Legegyszerűbb az $\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = \operatorname{ctg} \varphi$ és a 2φ függvényeket ábrázolni, és ezek első pozitív φ -hez tartozó metszéspontját megkeresni (2. ábra).



2. ábra

A grafikonról leolvassa $\varphi \approx 0,653 \approx 37^\circ$ adódik, tehát a gyorsulásvektor a motoros ekkora elfordulásakor fog derékszöget bezárni a kezdeti gyorsulásvektorral.

Bálint Áron (Budapest, V. Ker. Eötvös J. Gimn., 11. évf.)

Megjegyzés. A (2) egyenletet *iterációval* is megoldhatjuk (vagy a körülbelüli grafikus megoldást így pontosíthatjuk). Legyen

$$g(\varphi) = \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{2},$$

így az egyenletünk

$$g(\varphi) = \varphi$$

n	φ_n	$g(\varphi_n)$
0	1,57080	0
1	0,78540	0,5
2	0,64270	0,66778
3	0,65524	0,65061
4	0,65293	0,65374
5	0,65333	0,65319
6	0,65326	0,65329
7	0,65327	0,65327

alakú lesz. Válasszunk egy (hozzávetőleges) kiinduló értéket, például $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ -t (ennél biztosan kisebb lesz az egyenlet legkisebb pozitív megoldása). Ezután ismételjük a következő rekurzív számítást (zsebszámológéppel, Excel táblázatkezelővel vagy bármilyen programmal):

$$\varphi_{n+1} = \frac{\varphi_n + g(\varphi_n)}{2}.$$

A táblázatban láthatjuk, hogy esetünkben a sorozat (gyorsan) konvergál, és a hetedik lépésben már 5 tizedes pontossággal $g(\varphi) = \varphi$.

(Amennyiben más egyenletek megoldásánál a választott $g(x)$ függvénnyel a sorozat nem konvergál, érdemes a $g^{-1}(x)$ inverz függvénnyel próbálkozni.)

39 dolgozat érkezett. Helyes 29 megoldás. Hiányos (2–3 pont) 7, hibás 3 dolgozat.

P. 5631. Közismert, hogy egy egyenletesen töltött, vékony, nagyon hosszú, egyenes száltól R távolságra mekkora az elektromos térerősség. Hasonlítsuk össze ezt a térerősséget egy R sugarú félkör középpontjában létrejövő térerősséggel, feltételezve, hogy a félkört egy ugyanolyan tulajdonságú, ugyanolyan vonalmenti töltéssűrűségű szálból készítettük!

(5 pont)

Amerikai feladat nyomán

Megoldás. Először az egyenes szál terét határozzuk meg. Ehhez vegyünk egy ℓ hosszúságú száldarabot. Ennek töltése $Q = \lambda\ell$, ahol λ a szál vonalmenti töltéssűrűsége. Vegyük körül egy R sugarú hengerpalásttal (a szimmetria miatt a térnek csak sugárirányú komponense lehet), és írjuk fel erre a felületre a Gauss-törvényt:

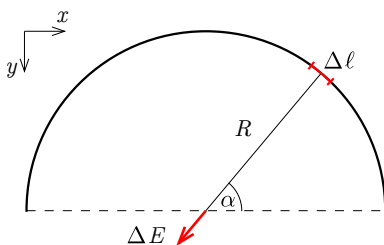
$$2R\pi\ell E_1 = \frac{\lambda\ell}{\varepsilon_0}.$$

Ez alapján a hosszú, egyenes száltól R távolságra a térerősség:

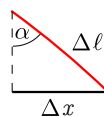
$$E_1 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} = 2k \frac{\lambda}{R}.$$

Ezután térjünk át a félkör alakú szál terének meghatározására. Az 1. ábrán látható egy kicsiny $\Delta\ell$ hosszúságú félkörívdarab által a félkör középpontjában létrehozott ΔE térerősség:

$$\Delta E = k \frac{\Delta Q}{R^2} = k \frac{\lambda\Delta\ell}{R^2}.$$



1. ábra



2. ábra

A szimmetria miatt az eredő térerősség a félkör szimmetriatengelyével párhuzamos, y -irányú (az x -irányú komponensek kiejtik egymást). Eszerint a keresett térerősség nagysága:

$$E_2 = \sum \Delta E_y,$$

ahol

$$\Delta E_y = \Delta E \sin \alpha = k \frac{\lambda\Delta\ell}{R^2} \sin \alpha = k \frac{\lambda\Delta x}{R^2}.$$

Itt az utolsó lépésben kihasználtuk, hogy a 2. ábra alapján $\Delta\ell \sin \alpha = \Delta x$, ahol Δx az ívdarab x -irányú vetülete. Ezután a félkör alakú szál tere egyszerű összegzéssel

megkapható:

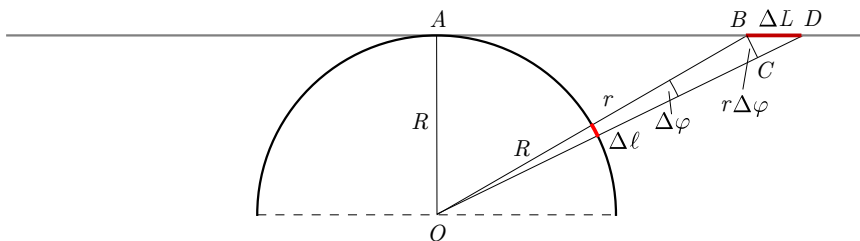
$$E_2 = \sum_{-R}^R \Delta E_y = k \frac{\lambda}{R^2} \sum_{-R}^R \Delta x = k \frac{\lambda}{R^2} \cdot 2R = 2k \frac{\lambda}{R}.$$

A két vizsgált térerősség tehát megegyezik.

Bélteti Teó (Hódmezővásárhely, Bethlen G. Ref. Gimn., 11. évf.)

Megjegyzés. A két töltött szál O pontbeli elektromos térerősségét anélkül is össze tudjuk hasonlítani, hogy bármelyik térerősség nagyságát kiszámítanánk. Megmutatjuk, hogy a két szál egymásnak megfeleltethető kicsiny darabkáinak térerőssége ugyanolyan irányú és ugyanolyan nagyságú vektor, így ezek összege, vagyis az eredő elektromos térerősség a kétféle alakú szálra ugyanakkora.

Tekintsük a félkörív és az egyenes szál azon kicsiny darabkait, amelyek az O pontból nézve ugyanolyan irányban és ugyanakkora $\Delta\varphi$ szög alatt látszanak.



3. ábra

A 3. ábra jelöléseit használva az egyenes szál ΔL hosszúságú részén $\Delta Q_1 = \lambda \Delta L$ töltés, a félkörív alakú szál kicsiny $\Delta\ell = R\Delta\varphi$ hosszúságú ívén pedig $\Delta Q_2 = \lambda \Delta\ell$ töltés található. Ezek a töltések az O pontban

$$\Delta E_1 = k\lambda \frac{\Delta L}{r^2}, \quad \text{illetve} \quad \Delta E_2 = k\lambda \frac{\Delta\ell}{R^2}$$

nagyságú elektromos térerősséget hoznak létre. Ennek a két térerősségnek azonban nemcsak az iránya, hanem a nagysága is megegyezik, hiszen az $OAB\Delta$ és a $BCD\Delta$ hasonlósága miatt

$$\frac{R}{r} = \frac{r\Delta\varphi}{\Delta L} = \frac{r\Delta\ell}{R\Delta L}, \quad \text{tehát} \quad \frac{\Delta L}{r^2} = \frac{\Delta\ell}{R^2}.$$

(Kihasználtuk, hogy $\Delta\ell \ll R$ és $\Delta L \ll r$, vagyis $\Delta\varphi \ll 1$, így a kicsiny körívek hossza és a megfelelő húrok hossza egyenlőnek vehető.)

22 dolgozat érkezett. Helyes 13 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 5, hiányos (1–3 pont) 4 dolgozat.

Felhívás a Forráspont Fizikatáborra



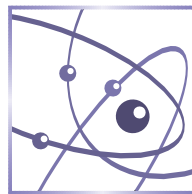
A tavalyi sikeres első alkalom után ezen a nyáron

2025. július 28. és augusztus 1. között

másodszor is megrendezésre kerül a Forráspont Fizikatábor.

A tábor a Fagyponthoz tartozó fizikatábor folytatása, egy ötnapos balatoni vakációzás formájában. Célunk a fizikus közösség összehozása és a fizikaversenyek feladatainak népszerűsítése. A táborban lesz sok előadás, elmaradhatatlanok a trükkös és különleges fizikafeladatok, és tervben van sok-sok sport, fürdőzés, zenélés és társasozás. A januári táborhoz hasonlóan meghívjuk az olimpiai szakkörök felkészítő tanárait is. Helyszín, költségek, további információ és jelentkezés: <https://sites.google.com/view/forraspontfizika/>

A szervezők



Fizikából kitűzött feladatok

M. 441. Egy vasalót állítsuk ferde támasztólapjára, majd kapcsoljuk be. Ábrázoljuk az idő függvényében a vasaló ki-be kapcsolását! Várjuk meg a periodikus ki-be kapcsolgatást, és ennek segítségével becsüljük meg, hogy állandósult állapotban másodpercenként mennyi hőt ad le a vasaló! A méréseket végezzük el három különböző beállított hőmérsékletnél! Minden mérés előtt várjuk meg, hogy a vasaló szobahőmérsékletre hűljön. A becsléshez a bekapcsolt vasaló teljesítményét közelítsük a névleges értékkel.

(6 pont)

Közli: *Honyek Gyula*, Veresegyház

G. 889. Egy játékmoddal emelődaru legfeljebb 60 játékbetongerendát képes felemelni anélkül, hogy a kötele elszakadna. A valódi daru, valamint a valódi betongerendák valamennyi lineáris mérete 30-szor nagyobb a játékmoddal méreteinél, de az anyagok fizikai tulajdonságai ugyanazok. Hány igazi betongerendát képes felemelni a valódi daru?

(4 pont)

Radnai Gyula (1939–2021) feladata nyomán

G. 890. Tegyük fel, hogy $+Q$ töltés van a Föld felszínén, és ugyancsak $+Q$ töltés van a Hold felszínén egyenletes eloszlásban.

a) Számítsuk ki, hogy mekkora Q töltésre lenne szükség ahhoz, hogy ezek elektrosztatikus tasztítása kiegyensúlyozza a Föld és a Hold közötti gravitációs vonzást!

b) Feltéve, hogy a Hold és a Föld távolsága felére csökken, hogyan változna meg a gravitációt kiegyenlítő Q töltés nagysága?

(3 pont)

G. 891. Egy dominó alakú hasábot készítünk valamilyen gyengén vezető anyagból. A méretek: $0,5\text{ cm} \times 3\text{ cm} \times 6\text{ cm}$. Megmérjük a dominó elektromos ellenállását úgy, hogy az egymással szemben lévő oldalai között folyjon az áram. A csatlakozásokat úgy alakítjuk ki, hogy a dominókban az áramsűrűség homogén legyen. A feszültségeket úgy választjuk meg, hogy az áramsűrűség nagysága mindhárom esetben megegyezzen.

a) Hogy aránylik egymáshoz a három mért ellenállás?

b) Hogy aránylik egymáshoz az alkalmazott három feszültség?

c) Hogy aránylik egymáshoz a három esetben a másodpercenként felszabaduló Joule-hő?

(4 pont)

G. 892. Akinek van (vagy volt) karórája, szinte biztosan kipróbálta, hogy amikor az ablakon besüt a nap, akkor az óra üvegét tükrként használva mulatságosan ugráandozó fényfoltot vetíthetünk a falra, a mennyezetre, a padlóra, esetleg véletlenül valaki szemébe. Mitől függ a fényfolt alakja, az óraüveg alakjától vagy a Nap alakjától?

(4 pont)

P. 5652. Egy H magasságú toronyból α szög alatt felfelé eldobunk egy követ. A becsapódás előtt a kő sebességvektora β szöget zár be a vízszintessel. A toronytól milyen messze csapódott be a kő? A közegellenállást hanyagoljuk el.

(4 pont)

KVANT feladat

P. 5653. Két egyenes út merőlegesen keresztezi egymást. Az egyik úton egy személyautó 90 km/h sebességgel, a másikon egy motoros 72 km/h sebességgel közeledik a kereszteződéshez. Egy adott ($t = 0$) pillanatban két jármű távolsága (légvonalban) 347 m . 5 másodperc elteltével a távolságuk 188 m -re csökken.

a) Milyen messze volt a két jármű a kereszteződéstől kezdetben?

b) Mekkora lesz a két jármű közötti legkisebb távolság?

Az egyszerűség kedvéért mindkét járművet tekintsük pontszerűnek.

(5 pont)

1897. évi érettségi feladat nyomán

P. 5654. Két, azonos hosszúságú, sűrűségű és keresztmetszetű, vékony fémrudat összeforrasztottunk, így egy kétszeres hosszúságú egyenes rudat kaptunk. Az egyik (A jelű) rész anyagának Young-modulusa E_A , a másik (B jelű) részé pedig $E_B > E_A$. A rudat egy rá merőleges tengely körül adott nagyságú szögsebességgel megforgatjuk. A forgástengely

- az A rúd szabad végpontján,
- a B rúd szabad végpontján,
- a forrasztási ponton

halad keresztül. A három eset közül melyikben lesz a teljes rúd megnyúlása a legnagyobb, illetve a legkisebb?

(4 pont)

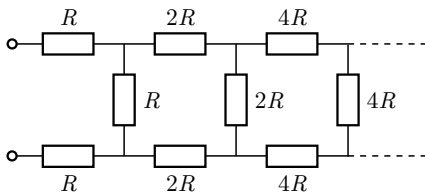
Közli: *Holics László*, Budapest

P. 5655. Két, egymástól d távolságra lévő egyforma hangforrás azonos fázisban λ hullámhosszúságú hanghullámot sugároz ki, amit egy vevő egy R sugarú kör egy pontjában detektál. A két hangforrás a kör középpontjához képest szimmetrikusan helyezkedik el. Hol vannak azok a pontok, ahol a két hangforrás hulláma maximálisan erősíti egymást, ha $d = 2\lambda$ és $R \gg d$?

(4 pont)

Közli: *Cserti József*, Budapest

P. 5656. Végtelen ellenállásláncot készítünk a következő módon: Az első „lépcső” ellenállásainak értéke R , a következőké $2R$, $4R$, ... stb., mindig kétszerese az előzőnek (ábra). Mekkora a végtelen ellenálláslánc eredő ellenállása?



(4 pont)

Közli: *Szentivánszki Soma*, Budapest

P. 5657. Egy palackban háromszor akkora nyomású levegő van, mint a környezetében. A tartályon nyitunk egy lyukat. Azt tapasztaljuk, hogy a palackban lévő gáz gyorsan lehűl, majd lassan visszamelegszik a kezdeti hőmérsékletre.

- Mekkora hőmérsékletre hűl le a gáz a kezdeti 300 K-ről?
- A palackban lévő eredeti gáz hány százaléka távozik a gyors lehűlés,
- illetve a lassú melegeedés során?

Tételezzük fel, hogy a palackba kívülről nem jut be levegő.

(5 pont)

Közli: *Simon Péter*, Pécs

P. 5658. Ha egy gömb alakú testet (pl. egy nagyobb acélgolyót) egy üres tálba helyezünk és lefényképezzük, a képen (a fényképezés irányától függetlenül) mindig egy kör jelenik meg (1. ábra). Ha az edénybe annyi vizet töltünk, hogy az kicsit

ellepje a golyót, majd új felvételt készítünk, a képen egy ellipszist látunk (2. ábra). A 3. ábráról, amely kinagyítva mutatja a golyót, könnyen leolvasható a torzulás méretaránya. Határozzuk meg, hogy mekkora szöget zárt be a fényképezőgép optikai tengelye a vízszintessel, amikor a felvétel készült. (A fényképezőgép és a golyó távolsága sokkal nagyobb, mint a golyó átmérője.)



1. ábra



2. ábra

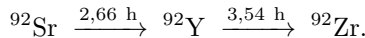


3. ábra

(5 pont)

Közli: Gnädig Péter, Vácduka

P. 5659. Maghasadási reakciókban gyakran keletkezik ^{92}Sr izotóp, amely két egymást követő β -bomlással a stabil ^{92}Zr -ra bomlik:



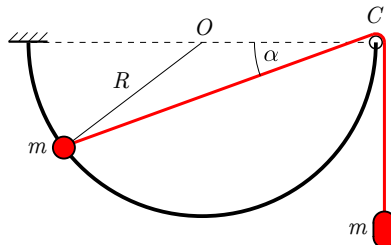
Egy adag vegytiszta ^{92}Sr preparátum elkészítése után mennyi idővel lesz a keletkező ^{92}Y mennyisége a legnagyobb?

Útmutatás: Próbálhatjuk az egyenleteket egyetlen radioaktív bomlási egyenletre visszavezetni. Ötletet adhat a következő kétrészes cikk: Vigh Máté: Összetett rezgések I–II. (<https://www.komal.hu/cikkek/cikklista.h.shtml>)

(5 pont)

Közli: Vigh Máté, Herceghalom

P. 5660. Egy pontszerűnek tekinthető, m tömegű, átfúrt golyó az ábra szerint egy R sugarú, vízszintes átmérőjű, függőleges síkú, félkör alakú, rögzített, merev



drótra van fűzve, amelyen súrlódásmentesen csúszhat. A golyóhoz egy vékony fonál van kötve, amely a drót C végén lévő, kicsiny csigán van átvetve. A fonál másik végéhez egy ugyancsak m tömegű nehezék van erősítve. A bal oldali golyót a fonál vízszintes helyzetéből lökésmentesen elengedjük, amikor a fonál $\alpha = 0^\circ$ -os szöveget zár be a vízszintes átmérővel.

a) Mekkora sebességgel mozognak a testek, amikor a bal oldali test a drótpálya legalsó pontján halad át?

b) Mekkora a testek gyorsulása ebben a pillanatban?

(6 pont)

Közli: *Zsigri Ferenc*, Budapest

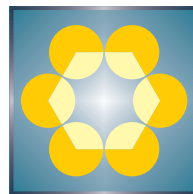


Beküldési határidő: 2025. június 16.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS (Volume 75. No. 5. May 2025)



Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 287):

K. 859. I have already paid 25,000 forints in advance for a language course, but I still have to pay as much as I would have to pay if the advance had been half of what I still have to pay now. How much does the language course cost in total? (Proposed by: *Katalin Abigél Kozma*, Győr) **K. 860.** Anna and Boglárka are playing on a circular table of diameter 1.5 meters. Anna places her rectangular piece of paper of dimensions 42×30 cm, and then Boglárka places her identical piece of paper such that two papers are not completely covering each other, but share a diagonal with each other, and neither hangs off the edge of the table. Find the percentage of the table covered by the two pieces of paper. (Proposed by: *Katalin Abigél Kozma*, Győr) **K. 861.** A group of eight friends wants to organize a tarot championship. In each game, four players take part, and any pair from the eight friends plays the same number of games. Prove that there will be more than 13 games in the championship. (Proposed by: *Zoltán Paulovics*, Budapest) **K/C. 862.** a) Prove that the fraction below can be simplified (i.e., its numerator and denominator are not relatively prime) for every positive integer n : $\frac{6n^2+13n+6}{15n^2+22n+8}$. b) Find those positive integers for which the fraction $\frac{2n+3}{5n+4}$ cannot be simplified, i.e., its numerator and denominator are relatively prime. (Proposed by: *Bálint Bíró*, Eger) **K/C. 863.** Anna from problem **K. 860.** is creating a tulip bed in the middle of her square-shaped garden. In 2D shape $ABCD$ she is planting tulip bulbs, and she is planting lilies in the remaining part of the garden. The centers of the circular arcs on the perimeter of the bed are the vertices of the square, and their radii equal the side of the square. Find the area of Anna's tulip bed knowing that the area of the whole garden is 100 m^2 . (Proposed by: *Katalin Abigél Kozma*, Győr)

New exercises for practice – competition C (see page 288): **Exercises up to grade 10:**

K/C. 862. See the text at Exercises **K. K/C. 863.** See the text at Exercises **K. Exercises**

for everyone: C. 1858. Tomi numbered 30 cards from 1 to 30 and distributed them into 10 envelopes. In each envelope there are at least 2 and at most 4 cards. On each envelop he wrote the sum of the numbers on the cards contained in the envelop, and arranged them in decreasing order. Find the smallest and the largest possible number, respectively, on the third envelop of the arrangement. (Proposed by: *Mátyás Czett*, Budapest) **C. 1859.** The side lengths a , b and c of a non-equilateral triangle satisfy $a + b = 2c$. Prove that the line segment connecting the incenter and the centroid of the triangle is parallel to one of the sides of the triangle. (German competition problem) **C. 1860.** Let us consider a geometric progression consisting of positive integers. Prove that the contraharmonic mean of any three consecutive terms is an integer. How can the parity of this integer number be determined? The contraharmonic mean $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$ of positive real numbers $a_1, a_2, \dots, a_n$ is defined as $C(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$. (Proposed by: *Tamás Unyi*, Szada)

Exercises upwards of grade 11: C. 1861. The base of the pyramid $ABCDE$ is the square $ABCD$ of side length 12. We know that the orthogonal projection of the vertex E on the plane of the base is on the circumcircle of the square $ABCD$, and also $BE = CE$ and $AE = 18$. Find the volume of the pyramid. (Proposed by: *Bálint Bíró*, Eger) **C. 1862.** n (> 2) children want to play on the two undistinguishable swings of the playground. They have decided that everybody will play together with two other children for two minutes. After each round, the two children have to hand over the swings to another pair who have not yet played on the swings together. (A child handing over the swing to the next pair cannot be in the next pair.) Is the plan of the children feasible? (Based on the idea of *László Németh*, Fonyód)

New exercises – competition B (see page 289):

B. 5462. Abel has written down the positive integers from 1 to n in a certain order. Any positive integer from 1 to $\frac{n(n+1)}{2}$ can be obtained as the sum of some consecutive terms from Ábel's sequence. For which values of n is this possible? (4 points) (Proposed by: *Erik Füredi*, Budapest) **B. 5463.** The square $ABCD$ of positive orientation is given. Construct an equilateral triangle BEF of positive orientation such that its vertex F is on ray BC and $\angle EAF = 45^\circ$. (3 points) (Proposed by: *Viktor Vigh*, Sándorfalva) **B. 5464.** Let $k > 1$ be a given integer. Prove that the sequence $a_n = n^2 + n + 1$ has infinitely many terms that equal the product of k distinct terms of the same sequence. (4 points) (Proposed by: *Gábor Holló*, Budapest) **B. 5465.** Let AA' , BB' , and CC' be diameters in the circumcircle of the non-equilateral acute triangle ABC . Let A_1 be the reflection of point A' across line BC , B_1 be the reflection of B' across line AC , and C_1 be the reflection of C' across line AB . Prove that triangle $A_1B_1C_1$ is similar to triangle ABC . (5 points) (Proposed by: *Szilveszter Kocsis*, Budapest) **B. 5466.** The side lengths of a triangle are a , b and c . Prove that $\frac{(b+c)^2}{a^2+bc} + \frac{(c+a)^2}{b^2+ca} + \frac{(a+b)^2}{c^2+ab} \geq 6$. (5 points) (Crux Mathematicorum) **B. 5467.** Prove that for any odd positive integers a and b the remainder of $(a+b+7)^7 - a^7 - b^7$ modulo 168 is 7. (3 points) (Proposed by: *Mihály Hujter*, Budapest) **B. 5468.** Let r be the inradius of the acute triangle ABC , let R be the circumradius of the same triangle, and let the inradius of the orthic triangle of the triangle ABC be ρ . Prove that $r \geq \sqrt{R\rho}$. (6 points) (Proposed by: *Viktor Vigh*, Sándorfalva) **B. 5469.** There are three cities in Bergengócia, A , B , and C , inhabited by a total of 2025 people. Starting from the current year, at the end of each year, half of the inhabitants of A move to B , a third of the inhabitants of B move to C , and a quarter of the inhabitants of C move to A (if any of the values of these fractions is not an integer, we round the value up). Prove that after a few years, the number of inhabitants of all three cities will remain unchanged. (6 points) (Proposed by: *Benedek Váli*, Budapest)

New problems – competition A (see page 290):

A. 908. Let $n \geq 2$ be an integer. Little Red Riding Hood and the wolf are playing a game in which the numbers $\{1, 2, \dots, n\}$ are being colored red and blue. In each round, Little Red Riding Hood selects a pair (i, j) such that $1 \leq i < j \leq n$, and both i and j are still uncolored. Then the wolf colors one of them blue and the other red. The game ends when all but at most one of the numbers from $\{1, 2, \dots, n\}$ have been colored. Show that there exists a constant $c > 0$ independent of n , and a strategy for Little Red Riding Hood such that she can ensure that at some point during the game, there exist numbers $1 \leq a \leq b \leq n$ such that the set $\{a, a+1, \dots, b\}$ contains at least $c \cdot \sqrt[3]{n}$ more red numbers than blue numbers. (Proposed by: *Dömötör Pálvölgyi*, Budapest) **A. 909.** Prove that for any positive integer N , there exists a positive integer n such that the difference between any two distinct prime factors of $n^3 - 1$ is at least N . **A. 910.** Points $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ are collinear in this order. The semicircles with diameters A_1A_2 and B_1B_2 intersect at point P , the semicircles with diameters B_1B_2 and C_1C_2 intersect at point Q , and the semicircles with diameters C_1C_2 and A_1A_2 intersect at point R . Circles k and l are tangent to all three semicircles as shown in the figure (see page 291). Let K denote the point of tangency of the circle k and the semicircle with diameter A_1A_2 , while let L denote the point of tangency of the circle l and the semicircle with diameter C_1C_2 . Prove that $\frac{A_1R \cdot B_1P \cdot B_2Q \cdot C_2R}{A_2R \cdot B_1Q \cdot B_2P \cdot C_1R} = \frac{A_1K \cdot C_2L}{A_2K \cdot C_1L}$. (Proposed by: *Aron Bán-Szabó*, Budapest)

Problems in Physics

(see page 313)

M. 441. Place an iron on its inclined support and switch it on. Plot the on-and-off switching of the iron as a function of time. Wait until this on-and-off switching becomes periodic, and use this to estimate the heat that the iron gives off every second, in this steady state. Take the measurements at three different temperature values. Before each measurement, wait for the iron to cool down to room temperature. For the estimation of the power, use the power rating of the iron.

G. 889. A toy model crane can lift up to 60 toy concrete beams without breaking the rope. All the linear dimensions of the real crane, as well as the real concrete beams, are 30 times larger than those of the toy model, but the physical properties of the materials are the same. How many real concrete beams can the real crane lift? **G. 890.** Suppose that there is $+Q$ charge on the surface of the Earth, and also $+Q$ charge on the surface of the Moon, in both cases the charges are distributed evenly. *a)* Calculate how much charge Q would be needed so that the electrostatic repulsion balances the gravitational attraction between the Earth and the Moon. *b)* Assuming that the distance between the Moon and the Earth is halved, how would the magnitude of the charge Q balancing gravitational attraction change? **G. 891.** A domino-shaped block is made from some low-conducting material. The size of the block is: $0.5\text{ cm} \times 3\text{ cm} \times 6\text{ cm}$. The resistance of the domino is measured so that current flows between the opposite faces of the domino. The connections are made such that the current density in the domino is uniform. The voltages are chosen so that the magnitude of the current density is the same in all three cases. *a)* What is the ratio of the three measured resistances? *b)* What is the ratio of the applied three voltage values? *c)* What is the ratio of the dissipated energy per second due to Joule heating in the three cases. **G. 892.** Anyone who has (or has had) a wristwatch has almost certainly experienced that when the Sun shines through the window, the glass of the watch can be used as a mirror to project an amusing, bouncing spot of light onto the wall, the ceiling, the floor, or even into the eyes of your friend. What does the shape of the light spot depend on, the shape of the glass or the shape of the Sun?

P. 5652. A stone is thrown from a tower of height H upwards at an angle of α . Just before impact, the velocity vector of the stone makes an angle of β with the horizontal. How far from the tower did the stone land? Neglect air resistance. **P. 5653.** Two straight roads cross perpendicularly. On one road a car is approaching the crossroads at a speed of 90 km/h, on the other a motorcyclist is approaching it at a speed of 72 km/h. At a given ($t = 0$) instant, the distance between the two vehicles (as the crow flies) is 347 m. After 5 seconds, their distance decreases to 188 m. *a)* How far were the two vehicles from the crossroads initially? *b)* What will be the minimum distance between the two vehicles? For the sake of simplicity, consider both vehicles as point-like objects. **P. 5654.** Two thin metal rods of the same length, density and cross-section were soldered together to make a straight rod that is twice as long as the original length of a single rod. The Young's modulus of the material of one part (denoted by A) is E_A and that of the other part (denoted by B) is $E_B > E_A$. The rod is rotated about an axis perpendicular to it at a given angular speed. The axis of rotation goes through the *a)* free end of rod A, *b)* free end of rod B, *c)* soldered ends. In which of the three cases will the total elongation of the rod be the greatest and the smallest? **P. 5655.** Two identical sound sources at a distance of d from each other emit sound waves of wavelength λ in the same phase. The waves are detected by a receiver at a point on the circumference of a circle of radius R . The two sound sources are symmetrically positioned with respect to the centre of the circle. Where are the points at which the waves from the two sound sources reinforce each other if $d = 2\lambda$ and $R \gg d$? **P. 5656.** We construct an infinite resistor chain as follows: the resistance of the resistors of the first "step" are R , those of the next are $2R, 4R, \dots$, etc., always twice the value of the previous one (see *figure*). What is the equivalent resistance of the infinite resistor chain? **P. 5657.** A cylinder contains air at a pressure that is three times that of its surroundings. A hole is opened in the cylinder. We find that the gas in the cylinder cools rapidly, then slowly warms back to its initial temperature. *a)* To what temperature does the gas cool from the initial 300 K? *b)* What percentage of the initial gas in the cylinder is lost during the rapid cooling, *c)* and during the slow warming? Assume that no air can get into the cylinder from outside. **P. 5658.** If a spherical body (e.g. a large steel ball) is placed in an empty bowl and a photo is taken, a circle appears in the image (regardless of the direction in which it was photographed) (*Figure 1*). If the bowl is filled with enough water to slightly cover the ball and then a new image is taken, the image will appear as an ellipse (*Figure 2*). From *Figure 3*, which shows the ball enlarged, the scale of the distortion can be easily read. Determine the angle of the camera's principal axis with the horizontal when the picture was taken. (The distance between the camera and the ball is much larger than the diameter of the ball.) **P. 5659.** Fission reactions often produce the isotope ^{92}Sr , which decays into the stable ^{92}Zr in two successive β decays: $^{92}\text{Sr} \xrightarrow{2.66 \text{ h}} ^{92}\text{Y} \xrightarrow{3.54 \text{ h}} ^{92}\text{Zr}$. After preparing a sample of pure ^{92}Sr , how long will it take for the amount of ^{92}Y produced to be the most? *Hint:* Try to reduce the equations to a single radioactive decay equation. See the article about the addition of oscillations in several different cases: *Vigh Máté: Összetett rezgések I–II.* (<https://www.komal.hu/cikkek/cikklista.h.shtml>) **P. 5660.** A point-like ball of mass m is threaded to a fixed rigid semicircle-shaped wire, and can move along it frictionlessly. The diameter of the semicircle is horizontal, its radius is R , and the plane of the semicircle is vertical. (See the *figure*.) A thin thread is attached to the ball and wound through a small pulley at the end of the wire at C . A body of mass m is attached to the other end of the thread. The ball on the left is released without a jerk from the horizontal position of the thread when the thread makes an angle of $\alpha = 0^\circ$ with the horizontal diameter. *a)* What is the speed at which the bodies move when the ball on the left passes the lowest point of the wire? *b)* What is the acceleration of the bodies at this moment?



EGMO 2025
European Girls'
Mathematical Olympiad
KOSOVO

EGMO 2025

– képek a díjkiosztó ünnepségről



AIT-BUDAPEST

Morgan Stanley

hiflylabs

KöMaL Nyári Fizika Tábor – előzetes tájékoztatás

Kedves kirtartó KöMaL Versenyzők, kedves fizika iránt érdeklődő Diákok! Örömmel értesítünk Benneteket, hogy az elmúlt évek hagyományát követve, idén is megrendezésre kerül a **KöMaL Nyári Fizika Tábor június 29. (vasárnap) és július 5. (szombat)** között a szép természeti környezetet biztosító Dombóvár-Gunaras üdülőfaluban a 9–12. osztályt végző középiskolás diákok számára.

A táborban (külön tanárokkal és programmal) részt vesz a nemzetközi matematikai diákolimpiára készülő „matematikus csapat” is.

A tábor költségének nagy részét (szállás + napi háromszori étkezés, fürdőbelépő, jutalmak, előadók tiszteletdíja, stb.) pályázati forrásból biztosítja a MATFUND Alapítvány. A táborba való utazást mindenkinek önállóan kell megoldania.



A mindig remek hangulatú táborban öt napon keresztül tudjátok próbára tenni, fejleszteni fizikatudásotokat, miközben új barátokat szerezhettek a csapatmunka során. A táborszervezők minden nap egy-egy érdekes mérési, numerikus és néhány elméleti példa kiadásával tesztelik a csapatok felkészültségét, persze mindezt nyári hangulatban. Az esti órák csoportos beszélgetésekkel szoktak

telni, ahol a középiskolai oktatásból kimaradt területekbe is betekintést nyerhetnek az ez iránt érdeklődő táborozók, megtanulhatják például a deriválás vagy az integrálás alapjait. Az izzasztó feladatmegoldás mellett persze számos egyéb programmal is készülünk, melyek nem maradhatnak ki a KöMaL nyári táborából, mint a strandolás, túrázás, krumpliágyú kipróbálása, forrasztás, társasozás, labdajátékok, és a közös éneklés a tábortűz körül.



Ha a fentiek meghozták a kedveteket vagy már „rég” táborozók vagytok, szeretettel várjuk a jelentkezéseket, találkozunk a táborban!

A KöMaL feladatmegoldóknak a jelentkezési lapokat és további tájékoztatást május közepén fogjuk kiküldeni, a jelentkezéseket május 31-ig várjuk.

A program támogatói:



AIT-BUDAPEST



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



Nemzeti Kulturális Alap



ELTE
EÖTVÖS LORÁND
TUDOMÁNYEGYETEM