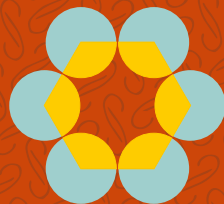
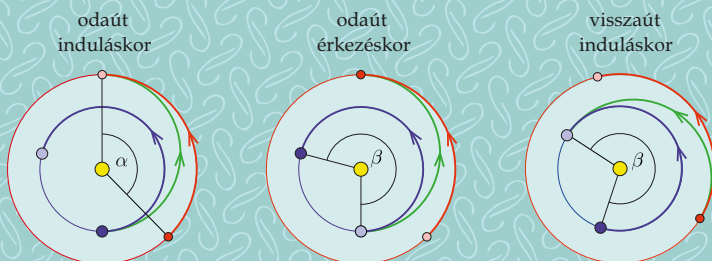


Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok

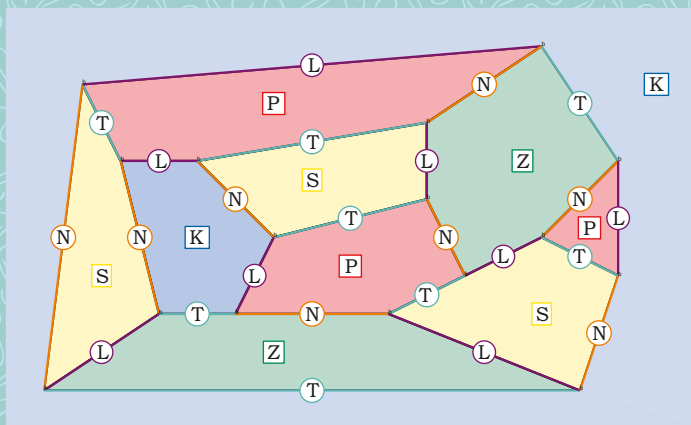
Informatika rovattal



Ábra a P.5646-os feladat megoldásához



Rajz Tait tételének bizonyításához



75 éves a Rényi Intézet | Az előző tanév versenyének
eredménye iskolánként | KöMaL 2025
tartalomjegyzék | Tait tétele | Ericsson-díjak 2025. |
Emelt szintű bűjőcska II.

75. évfolyam
9. szám
2025.
december

KöMaL



KESZTHELYI GABRIELLA MILYEN SZÍNŰ A VALÓSZÍNŰ?



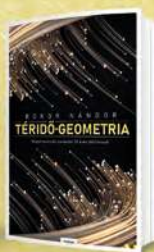
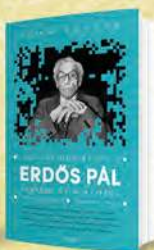
A véletlen matematikája

Fedezd fel, hogyan működik a véletlen a mindennapokban! Ez a kötet nem egy szokványos matekkönyv, hanem izgalmas, könnyed útmutató az esélyek, statisztika és kritikai gondolkodás világába. Humorral és érdekes példákkal mutatja be, miért értelmezzük sokszor hibásan a valószínűségeket – és hogyan láthatunk tisztábban a számok mögé?

Ajánljuk mindenkinek, aki kíváncsi arra, hogy a matematika hogyan kapcsolódik a randizáshoz, a hírekhez, a döntéseinkhez és a meglepő véletlenekhez. Megjelent a Typotex Kiadónál, 2025-ben.

TYPOTEXTUDOMÁNY

Typotex karácsonyi könyvvásár



10–80%
kedvezmény

november 17.
és december 31.
között

#vásároljakiadótól | typotex.hu



KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE

ALAPÍTOTTA: ARANY DÁNIEL 1894-ben

75. évfolyam 9. szám

Budapest, 2025. december

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta. ÁRA: 1600 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

<i>Pálffy Péter Pál</i> : 75 éves a Matematikai Kutatóintézet	530
Kiosztották az idei Ericsson-díjakat	534
<i>Hujter Bálint</i> : Tait tételének bizonyítása	535
<i>Vígh Viktor</i> : Rejtvények, ördöglakatok – Emelt szintű bűjőcska II.	541
<i>Az ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium matematika munkaközössége</i> : Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire	544
<i>Kozma Katalin Abigél</i> : Megoldásvázlatok a 2025./8. szám matematika gyakorló feladat-sorához	546
Matematika C gyakorlatok megoldása (1847., 1853., 1855.)	553
A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok (879–883.)	559
A 2024–2025-ös tanév pontversenyeinek iskolánként összesített eredménye	560
A Középiskolai Matematika és Fizikai Lapok 75. évfolyamának tartalomjegyzéke (2025)	571
A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (882–883., 1878–1882.)	577
A B pontversenyben kitűzött feladatok (5494–5501.)	578
Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (920–922.)	579
Informatikából kitűzött feladatok (679–682.) ..	580
Fizika gyakorlatok megoldása (893., 896.)	585
Fizika feladatok megoldása (5634., 5640., 5644., 5646., 5651., 5664., 5667., 5669.)	588
Fizikából kitűzött feladatok (445., 905–908., 5688–5696.)	603
Problems in Mathematics	606
Problems in Physics	607

Főszerkesztő: KORÁNDI JÓZSEF

Fizikus szerkesztő: VANKÓ PÉTER

Műszaki szerkesztő: FRIED KATALIN

Borító: BURGHARDT ZSUZSA

Kiadja: MATFUND ALAPÍTVÁNY

Alapítványi képviselő: KÓS RITA

Felelős kiadó: KATONA GYULA

Nyomda: OOK-PRESS Kft.

Felelős vezető: SZATHMÁRY ATTILA

INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A matematika bizottság vezetője:

HERMANN PÉTER

Tagjai: BÁN-SZABÓ ÁRON, BÍRÓ BÁLINT, CZETT MÁTYÁS, GYENES ZOLTÁN, HUJTER BÁLINT, KISS GÉZA, KÓS GÉZA, KOZMA KATALIN ABIGÉL, MAGYAR ESZTER, NÉMETH MÁRTON, PACH PÉTER PÁL, PAULOVIK ZOLTÁN, RATKÓ ÉVA, SIMON LÁSZLÓ BENCE, SZTRANYÁK ATTILA, UJHÁZY MÁRTON, VÍGH VIKTOR

A fizika bizottság tiszteletbeli elnöke:

HOLICS LÁSZLÓ

Vezetője: SZÉCHENYI GÁBOR

Tagjai: BARANYAI KLÁRA, GNÄDIG PÉTER, HONYEK GYULA, OLOSZ BALÁZS, SZÁSZ KRISZTIÁN, VÍGH MÁTÉ, VLADÁR KÁROLY, WOYNAROVICH FERENC

Az informatika bizottság vezetője:

SCHMIEDER LÁSZLÓ

Tagjai: LÓCZI LAJOS, SIEGLER GÁBOR, TÓTH TAMÁS

Fordítók: GYENES ZOLTÁN, TASNÁDI ANIKÓ

Nyelvi korrektor: ANDICS ÁGNES

Javítás koordinálása: CSOBÁNKA PETRA

Szerkesztőségi titkár: ONDINÉ SZABÓ SÁRA

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest,
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
Telefon: +36 20 320-1143

A lap megrendelhető a
<https://komalujsg.myshoprenter.hu>
oldalon keresztül.

Előfizetési díj egy évre: 12 500 Ft

Kéziratokat nem örzünk meg és nem küldünk vissza.
Minden jog a KöMaL tulajdonosaié.

E-mail: szerk@komal.hu

Internet: <http://www.komal.hu>

This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.

1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 20 320-1143

or on the Internet:

<https://komalujsg.myshoprenter.hu>.

A Lapban megjelenő hirdetések tartalmáért
felelősséget nem vállalunk.



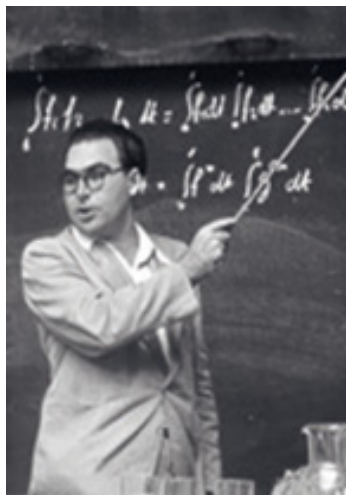
75 éves a Matematikai Kutatóintézet

A magyar matematika egyik fellelegvára – az egyetemek mellett – a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A KöMaL rendszeres feladatmegoldói közül is sokan



Előadás a Nagyteremben

jártak már az intézet épületében, hiszen gyakran rendeznek itt matematikai válogatóversenyeket, és itt szokott sorra kerülni a Kürschák József tanulmányverseny eredményhirdetése is. Emellett az intézet minden évben várja az érdeklődőket szeptember végén a Kutatók Éjszakája keretében és áprilisban a Lányok Napján. De egyénileg is fel lehet keresni az intézetet, e cikk írója például nyolcadikosként lépett be először – megilletődötten – a Reáltanoda utcai palota kapuján, a szakmódszertani csoport egyik munkatársához igyekezvén. Sőt, olyan középiskolások is voltak, akik az itt dolgozó matematikusokkal közös kutatást végeztek, legutóbb például Miranda Anna Christ kapcsolódott be a mesterséges intelligencia matematikai alapjaival foglalkozó vizsgálatokba.



Az intézményt 1950-ben alapították a Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézete néven. A kommunista ideológia szerint „a tudomány közvetlen termelőerővé válik”, ennek megfelelően az intézet feladata a népgazdaság fejlődésének segítése volt a tudomány eszközeivel. Az intézet vezetésével az akkor mindössze 29 éves

szármatematikust, Rényi Alfrédot bízták meg. Rényi bölcsen hagyta, hogy a kötelező feladatok elvégzése mellett az intézetbe toborzott kiváló matematikusok elméleti kérdésekkel is foglalkozzanak, hiszen az alkalmazott és az elméleti matematika összetartozik, együtt művelve a két irányt sokkal eredményesebb lesz a munka. Ezt az Akadémia vezetésével is sikerült elfogadtatnia, ennek megfelelően már 1955-ben a Matematikai Kutató Intézet elnevezés került a cégtáblára. Rényi Alfréd sajnos korán, 49 évesen elhunyt. Az intézet 1999 óta viseli alapító igazgatójának a nevét.

Laikusok sokszor szegeznek nekem a kérdést, amikor megtudják, hol dolgozom: „De hát mit lehet a matematikában kutatni? Nincs már minden felfedezve?” Ennek a vélekedésnek talán ott lehet keresni az alapját, hogy míg a fizikában, a kémiában, a biológiában a középiskolai tananyagban is szerepelnek olyan tudományos felismerések, amelyek a huszadik, sőt a huszonegyedik században születtek, a középiskolás matematikában szinte kizárólag több évszázaddal korábbi tudás átadására törekcsenek. Hogy lássuk, ma is születhetnek új felfedezések a matematikában, bemutatok két olyan nagy hatású eredményt, amelyek a Matematikai Kutatóintézethez kötődnek.

Az egyik Szemerédi Endre híres számelméleti tétele, amely 1975-ben jelent meg. Legyen A a pozitív egész számoknak egy sűrű részhalmaza. Ez azt jelenti, hogy van olyan $\varepsilon > 0$, hogy minden (elég nagy) N számra az $1, 2, 3, \dots, N$ számok között legalább εN eleme van az A halmaznak. Erdős Pál és Turán Pál az 1930-as években foglalmazták meg azt a sejtést, hogy ekkor A -ban mindig van k -tagú számtani sorozat, bár-hogy is adjuk meg a $k > 2$ számot. Már a $k = 3$ eset is nagyon nehéznek bizonyult, erre 1953-ban Klaus Roth talált bizonyítást. A sejtést teljes általánosságban aztán Szemerédi Endrének sikerült bizonyítania. Rendkívül bonyolult kombinatorikus jellegű érvelésének egyik alappillére az úgynevezett regularitási lemma, amely – kicsit pontatlanul fogalmazva – azt mondja ki, hogy egy nagy gráf kis hibával mindig felbontható olyan részekre, amelyek között a kapcsolat úgy látszik, mintha véletlenszerű lenne. Közel két évtizedet kellett várni arra, hogy ez a meglepő felismerés a kombinatorika egyik alapvető módszerévé fejlődjön, de azóta rengetegen hivatkoznak rá. Ezért és számos más kiemelkedő eredményéért ítéltek oda Szemerédi Endrének 2012-ben az Abel-díjat, a legjelentősebb nemzetközi matematikai díjat.

A másik kiválasztott eredmény Erdős Pál és Rényi Alfréd nevéhez fűződik. 1959-ben és



Szemerédi Endre



Erdős Pál, Turán Pál és
Rényi Alfréd

1960-ban két cikkben foglalkoztak a véletlen gráfok vizsgálatával. A ma oly népszerű hálózatelméletben gyakorta hivatkoznak erre az Erdős–Rényi-féle modellre. A gráf csúcsainak száma legyen adott, jelöljük n -nel. Emellett rögzítsünk még egy p valószínűséget is. A gráf éleit véletlenszerűen fogjuk választani, mégpedig bármelyik két csúcs között egymástól függetlenül p valószínűséggel húzunk élet. (Ha például $n = 5$ és $p = 1/6$, akkor mind a 10 csúcspárra elvégezzünk egy kockadobást, ha 6-ost dobunk, akkor összekötjük azt a két csúcsot, ha mást mutat a dobókocka, akkor ott nem lesz éle a gráfnak.) Erdős és Rényi az így kapott véletlen gráfnak különböző tulajdonságait vizsgálta, például hogy mekkora valószínűséggel lesz a kapott gráf összefüggő, azaz bármely csúcsából bármelyik másik csúcsba el lehet jutni éleken haladva. Ha p kicsi, akkor a véletlen gráfnak nagy valószínűséggel csak kevés éle lesz, nem várható, hogy összefüggő legyen. Ha p nagy, akkor sok él lesz, számíthatunk rá, hogy a gráfunk összefüggő. Hol van az átmenet? Erdős és Rényi azt találta, hogy ha $p = (\ln n + c)/n$, akkor annak a valószínűsége, hogy a gráf összefüggő, körülbelül $\exp(-\exp(-c))$, ahol mind az $\ln$ logaritmusfüggvénynek, mind az $\exp$ exponenciális függvénynek az alapja az $e = 2,71828\dots$ szám. Figyeljünk fel arra, hogy az átmenet nagyon gyors: Ha n nagyon nagy, akkor a p valószínűség igen kicsi változásán múlhat, hogy a gráf összefüggő-e. Hasonlít ez ahhoz, ahogy egy tó befagy: először csak kisebb jégtáblák jelennek meg, majd a hőmérséklet egy csekély csökkenése mellett hirtelen beáll a jég.



Lovász László

megrendezett Matematikai Világkongresszusok mindegyikén volt rényis kutató a rangot jelentő meghívott előadók között. A munkatársak közül többen tagjai a Magyar Tudományos Akadémiának, illetve külföldi akadémiáknak. Számos hazai és nemzetközi díjat kaptak, amelyek közül kiemelkedik Szemerédi Endre (2012) és Lovász László (2021) Abel-díja.

Ma is számos témában folytatnak kiemelkedő kutatásokat az intézet munkatársai. A jövő dönti el, hogy ezek közül melyek fognak szerepelni egy hasonló írásban 25 vagy 50 év múlva. Mindenesetre számos jel mutatja a Rényi Intézet nagy nemzetközi elismertségét. Évről-évre több jelentős konferenciát rendez az intézet, amelyeken a tudományterület legnagyobb alakjai tartanak előadásokat. Az Európai Kutatási Tanács (European Research Council, rövidítve ERC) kutatási pályázatain a Rényi Intézet a legeredményesebb magyar intézmény. Az utolsó negyedszázadban a négy évenként



„Aranycsapat” – A Rényi Intézet ERC pályázatot elnyert kutatói 2021-ben

Az intézet 1958 óta található Budapest Belvárosában, a Reáltanoda utca 13–15. címen. Előtte lakásokból átalakított irodákban helyezték el a kutatókat, például a Sztálin (ma Andrássy) út 31-ben. Az intézet mai otthona az 1880-as években épült báró Redl Béla palotájaként. A báró halála után az épületet a Magyar Mérnök- és Építész-Egylet vásárolta meg, és elnökének, Hauszmann Alajosnak a tervei alapján kibővítette. Ekkor épült az udvari szárny, az előadóteremben ma is megfigyelhetők különböző mérnöki jelképek. A második világháború után államosították a házat, különböző intézmények (például népi kollégium) működtek benne, mielőtt még a matematikusok birtokba vehették. A legenda szerint itt volt irodája az Ebtenyésztek Egyesületének is, aminek emlékét ma is őrzi az egyik szemináriumi szoba elnevezése, ez a Kutyas terem.



A Rényi Intézet épülete a Reáltanoda utca 13–15. alatt

A Rényi Intézetben a különböző matematikai ágakat (algebra, geometria, analízis, valószínűségszámítás, kombinatorika, topológia stb.) művelő osztályok mellett működik egy Szakmódszertan Osztály is, ahol a matematika oktatásának elméleti alapjaival foglalkoznak, szoros kapcsolatban a gyakorló pedagógusokkal. Bízom benne, hogy – ahogyan egykor én magam is – a KöMaL mai olvasói közül is sokan kapcsolatba kerülnek a Rényi Intézet szakmódszertani kutatóival és lesznek közülük, akik majd a jövőben munkahelyüknek választják ezt a nagy múltú intézményt.



Pálfi Péter Pál



Kiosztották az idei Ericsson-díjakat

Idén 2025. június 12-én az Ericsson Magyarország székházában adták át az Ericsson díjakat. Hat kategóriában összesen kilenc pedagógus nyerte el a rangos elismerést és a vele járó 500 000 Ft-os jutalmat.

Az ünnepélyes díjátadón immár 25. alkalommal nyújtottak át ilyen díjakat a középiskolai matematika- és fizikaoktatás kiemelkedő pedagógusainak, míg a „Digitális kultúra népszerűsítéséért” és a „Digitális kultúra tehetségeinek gondozásáért” díjak átadására idén másodszor került sor.

Az egyes kategóriák díjazottjai:

„Ericsson a matematika népszerűsítéséért” díj

Pánczél Róbert (Ciszterci Rend Nagy Lajos Gimnáziuma és Kollégiuma)



„Ericsson a matematika tehetségeinek gondozásáért” díj

Árki Tamás (Révai Miklós Gimnázium és Kollégium, Győr)

Steller Gábor (ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Általános Iskola és Gyakorló Gimnázium, Budapest)

„Ericsson a fizika népszerűsítéséért” díj

*Kilián Balázs*né dr. *Raics Katalin* (Ciszterci Rend Nagy Lajos Gimnáziuma és Kollégiuma)

„Ericsson a fizika tehetségeinek gondozásáért” díj

Berkes-Sinka Márta (Dobó István Gimnázium, Eger)

Kis Tamás (Szent Imre Katolikus Általános Iskola, Tenk)

„Ericsson a digitális kultúra népszerűsítéséért” díj

Hipik Angéla (Kispesti Deák Ferenc Gimnázium, Budapest)

„Ericsson a digitális kultúra tehetségeinek gondozásáért” díj

Borbásné Penke Judit (Szent István Gimnázium, Budapest)

Kiss Róbert (Bányai Júlia Gimnázium, Kecskemét)

Gratulálunk a díjazottaknak!

Tait tételének bizonyítása



A KöMaL 2025 szeptemberi számában (*Tait tétele és a 3-reguláris gráfok – a B. 5403. feladat háttere*, 346–350. oldal) kimondtuk Tait alábbi tételét.

Tétel (Tait tétele). *Legyen G egy 3-reguláris, hídélmentes, síkbarajzolt gráf. Ekkor G tartományai 4-színezhetők akkor és csak akkor, ha élei 3-színezhetők.*

A tételben k -színezésen olyan színezést értünk, amely k -féle színt használ, és az egymással szomszédos tartományok (illetve élszínezés esetén az egy csúcsban találkozó élek) mindig különböző színűek.

A szeptemberi számba nem került be a tétel bizonyítása (azzal a céllal, hogy akinek van kedve, gondolkodhasson rajta), ezt most pótoljuk.

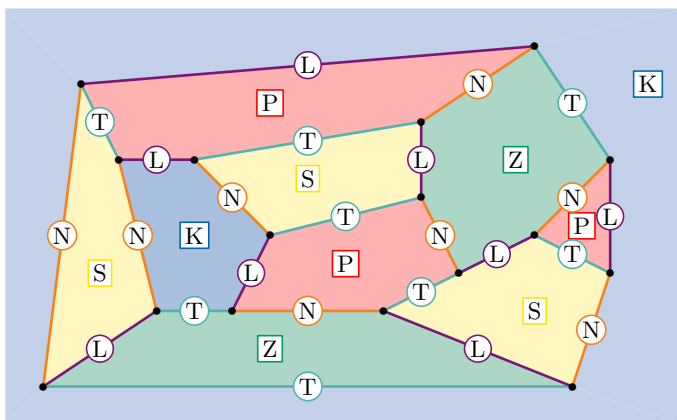
1. Tartományszínezésből élszínezést

A bizonyítást a könnyebb iránnyal kezdjük. Tegyük fel, hogy G tartományait sikerült jól kiszínezni 4 színnel (ezek legyenek: kék, piros, sárga és zöld). Belátjuk – ezt a színezést felhasználva –, hogy ekkor az éleket ki tudjuk jól színezni három színnel (lila, narancs, türkiz).

G minden éle két különböző színű tartomány között képez határvonalat (hiszen G hídélmentes). Az élek színeit az alapján határozzuk meg, hogy milyen színű tartományokat választanak el, az alábbi táblázat szerint:

	● Kék	● Piros	● Sárga	● Zöld
● Kék	–	● Lila	● Narancs	● Türkiz
● Piros	● Lila	–	● Türkiz	● Narancs
● Sárga	● Narancs	● Türkiz	–	● Lila
● Zöld	● Türkiz	● Narancs	● Lila	–

Hogyan született a táblázat? A szabály az, hogy egy-egy sorban, illetve oszlopban 3 különböző színnek kell szerepelnie. Hiszen ha pl. a kék-piros és a kék-sárga tartományokat elválasztó élek ugyanolyan színűek lennének, akkor a gráf egy olyan csúcsánál, ahol egy kék, egy piros és egy sárga tartomány találkozik, két ugyanolyan színű él keletkezne. Könnyű meggondolni (ezt az Olvasóra bízuk), hogy így minden csúcsban 3 különböző színű él fog találkozni. Egy példa a táblázat szerint színezett térképre:



1. ábra

2. Élszínezésből tartományszínezést

Következik a nehezebb és izgalmasabb¹ irány bizonyítása. Tegyük fel, hogy a 3-reguláris gráfunk élei már jól ki vannak színezve, gyártsuk le ebből a tartományok egy jó 4-színezését. Az előzőek ismeretében természetes ezt megpróbálni úgy csinálni, hogy a táblázatunkban rögzített szín-szabályok most is működjenek, azaz például egy kék és egy piros tartományt elválasztó határ mindig lila legyen.

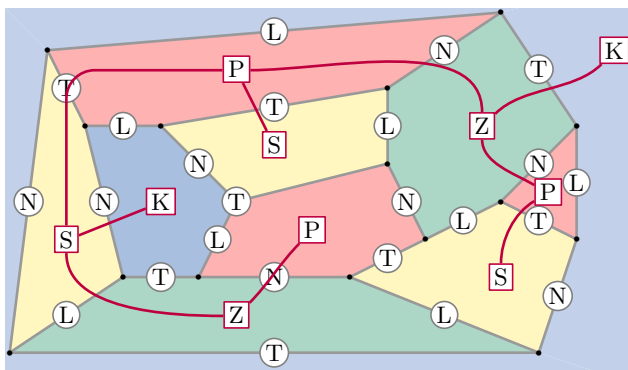
Vegyük észre, hogy ha egy kiválasztott tartományt kedvünk szerint kiszínezzük (például a nem korlátos tartományt kékre), akkor így a táblázat már egyértelműen meghatározza a vele szomszédos tartományok színeit. Általában, ha egy még színezetlen tartományunk szomszédos egy már kiszínezett tartománnyal, akkor a táblázat alapján egyértelmű, hogy milyenre kell kiszínezni (ha például egy narancs színű él egyik oldala kék, akkor a másik oldalának muszáj sárgának lennie). Ilyen módon a gráf összes tartományát ki tudjuk színezni (amíg nincs az összes tartomány kiszínezve, addig mindig lesz olyan színezett tartomány, amely szomszédos egy színezetlennel).

¹Ez az irány ad(na) lehetőséget a négy szín-tétel 3-élszínezéseken keresztül való bizonyítására.

De honnan tudhatjuk, hogy ez a tartományszínezés mindenhol jó lesz, azaz bármely két szomszédos tartomány különböző színű lesz a végén? Ennél is többet fogunk belátni: két szomszédos tartomány nem egyszerűen különböző színű lesz, hanem az őket elválasztó határvonal mindig épp a táblázat által diktált színű lesz, akkor is, ha nem az elválasztó él színét felhasználva színeztük ki a két tartományt.

A bizonyításhoz kössünk össze minden tartományt azzal a szomszédjával, amelyik alapján kiszíneztük. Jelöljük ki minden tartományban egy belső pontot *fővárosnak*, ezek legyenek az összeköttetések végpontjai. Könnyen meggondolható, hogy így egy fagráft kapunk, amelyet F^* -gal fogunk jelölni. A $*$ -gal arra utalunk, hogy F^* a G síkbarajzolt gráf ún. *duális gráfjának*, G^* -nak az éleiből áll. (Így F^* a G^* egy feszítőfája.) Világos az is, hogy az összeköttetéseket be lehet úgy rajzolni, hogy:

1. Csak a két érintett tartományban haladjon az azokat összekötő él vonala. A két összekötött tartományt elválasztó határt (G -beli élt) csak egyszer, annak egy belső pontjában messe.
2. Az összeköttetések ne keresszezzék egymást, azaz F^* síkbarajzolt legyen (lásd 2. ábra).



2. ábra

Így F^* élei persze megfeleltethetők G egy-egy élének², és így beszélhetünk F^* éleinek színéről is. F^* minden éle azt a színt kapja, amilyen színű G -beli élet keresztez.

Legyen s és t két tetszőlegesen választott szomszédos tartomány G -ben. Ha F^* -ban él köti őket össze, akkor persze világos, hogy teljesülni fog a táblázat által diktált szabály, hiszen a később színezett tartományt éppen ez alapján színeztük ki.

És mi a helyzet, ha F^* -ban nem köti össze közvetlen él s és t fővárosát? Ilyenkor a fagráfok ismert tulajdonságai szerint F^* -ban egyértelműen létezik egy s és t fővárosát összekötő út, ezt jelöljük U^* -gal. Ezen út mentén kellene tudnunk végigkövetni a színváltásokat, és valahogy belátni, hogy az U^* két vége közötti „különbség”, azaz a táblázat által diktált határszín éppen az, aminek lennie kell.

²Általában a G síkgráf és az ő G^* duálisának élei megfelelnek egymásnak. Ez a megfeleltetés ráadásul egy-egyértelmű „párbaállítás”.

2.1. Számoljunk színekkel!

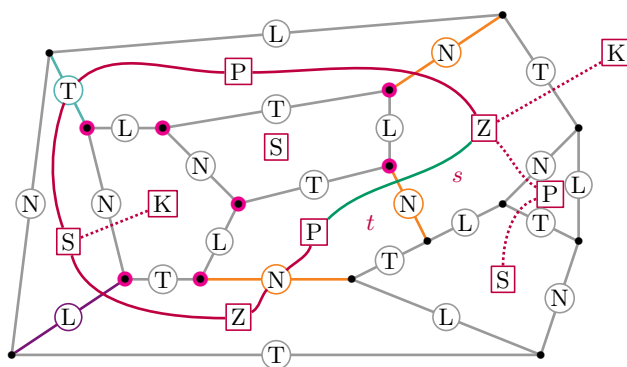
Ahhoz, hogy egy utat végig tudjunk követni, számolnunk kellene tudni a színekkel, ehhez pedig valamilyen algebrai struktúrával kell ellátni őket. Ehhez vegyük azokat a 2-dimenziós vektorokat, amelyek mindkét koordinátája 0 vagy 1, és alkalmazzuk rájuk ezt a tömör jelölést: 00, 01, 10, 11. Ezeket koordinátánként (bitenként) modulo 2 számolva adjuk össze, vagyis az $1 + 0 = 0 + 1 = 1$ és $0 + 0 = 1 + 1 = 0$ szabály szerint. Ha a tartomány- és az élszíneket alkalmasan feleltetjük meg ezeknek a 2-bites objektumoknak, akkor igaz lesz, hogy a határoló él színe mindig az általa elválasztott tartományok színeinek összege. A táblázatunk tulajdonképpen a színek „összeadó-táblája”:

	00 ● Kék	01 ● Piros	10 ● Sárga	11 ● Zöld
00 ● Kék	–	01 ● Lila	10 ● Narancs	11 ● Türkiz
01 ● Piros	01 ● Lila	–	11 ● Türkiz	10 ● Narancs
10 ● Sárga	10 ● Narancs	11 ● Türkiz	–	01 ● Lila
11 ● Zöld	11 ● Türkiz	10 ● Narancs	01 ● Lila	–

(Mint látható, az egyes vektorok tartományként vagy élként más-más szint jelennek. A 01 például piros tartományt, de lila élet jelent.) Azért hasznos ez a megfeleltetés, mert ennek segítségével az s és t színének viszonyát jól meg tudjuk fogni. Ha ugyanis U^* élein végigmegyünk s -ből t felé, minden egyes e^* élen végigmenve éppen úgy változik meg a tartomány színe, mint ha az eddigi tartományszínhez hozzáadnánk e^* színét. Így az s -től t -ig történő változás éppen annyi, mint az U^* élei színeinek az összege. Azt kell tehát belátnunk, hogy ez az összeg megegyezik az s és t tartományokat elválasztó határvonal színével.

2.2. Kívülről belülré

Kössük most össze s és t fővárosát egy új, közvetlen éllel (most is figyelve arra, hogy csak s -ben és t -ben haladjunk és a határukat csak egyszer, annak belső pontjában messzük; továbbá F^* élelt se keresztezzük). Ez az új él az U^* úttal együtt egy gráfelméleti kört alkot, ezt jelöljük K^* -gal.



3. ábra

Állítás. A K^* éleinek színeit összeadva 00 -t kapunk.

Bizonyítás. K^* élei nem keresztezik egymást, így a körnek lesz egyértelműen belseje, illetve külseje. A G csúcsai közül néhány csúcs belső, néhány csúcs külső lesz (a 2. ábrán a belső csúcsokat piros körökkel emeltük ki). Vegyük észre, hogy K^* élei a G élei közül éppen azoknak felelnek meg, amelyek egy belső és egy külső csúcsot kötnek össze.

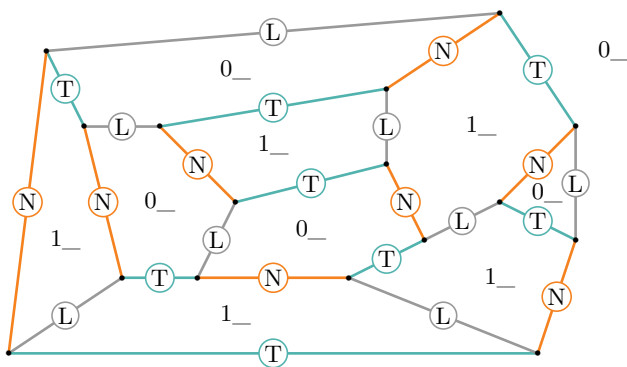
Bármely csúcsra igaz, hogy a három ott találkozó él színének összege: $01 + 10 + 11 = 00$. Így ha az összes belső csúcsra összeadjuk az onnan kiinduló élek színét, akkor is 00 -t kapunk. Ebben a Σ összegben kétszer szerepel minden olyan él, amely két belső csúcsot köt össze. De a modulo 2 összeadás tulajdonságai miatt, ha valamit saját magával adunk össze, akkor 00 -t kapunk. Tehát $\Sigma = 00$ éppen megegyezik azon élek színeinek összegével, amelyek egy belső és egy külső csúcsot kötnek össze. Ez viszont megegyezik K^* élei színeinek összegével, hiszen K^* minden éle egy azonos színű – egy belső és egy külső csúcsot összekötő – G -beli élt metsz. $\square$

Tehát a K^* éleinek színeinek összege 00 , ami éppen azt jelenti (a modulo 2 összeadás tulajdonságai miatt), hogy az U^* éleinek színeinek összege megegyezik az s és t tartományokat elválasztó határvonal színével, mivel ezen él színéhez csak a saját színét hozzáadva kaphattuk meg a 00 -t. Ezt szerettük volna bizonyítani.

2.3. Egy közvetlen bizonyítás

Egy szép ötlettel a nehezebb rész bizonyítása jóval rövidebben is elmondható. Tekintsük a 3-reguláris gráfunk éleinek egy jó színezését, ahol tehát minden csúcsban egy narancs, egy lila és egy türkiz él találkozik. Ebből kiindulva gyártjuk le a tartományaink 4-színezését. A tartományok lehetséges színeit most is két bittel fogjuk kódolni: korábban is alkalmazott módon 00 a kék, 01 a piros, 10 a sárga és 11 a zöld szín kódja.

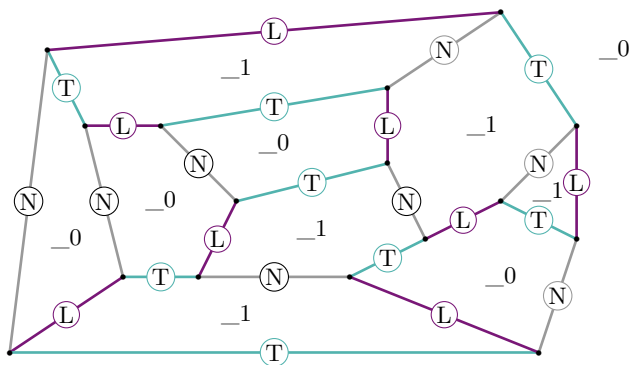
Ideiglenesen felejtsük el a lila éleket, így maradnak a narancs és a türkiz élek, minden csúcsban egy-egy találkozik belőlük. A narancs és a türkiz élek tehát egy



4. ábra

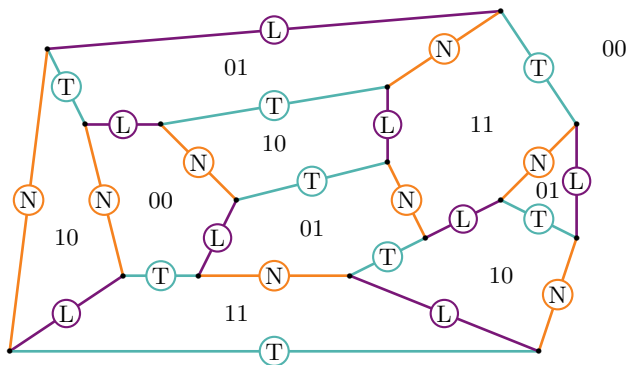
2-reguláris síkgráfot, azaz egy vagy több³ diszjunkt kört alkotnak. Most minden kiszínezendő tartományára számoljuk meg, hogy hány ilyen narancs-türkiz körnek van a belsejében. Ha páros soknak, akkor a tartomány színének első bitje legyen 0; ha páratlan soknak, akkor pedig 1.

Ezután a narancs éleket felejtjük el ideiglenesen, így a lila-türkiz körök maradnak, amelyek egy másik diszjunkt körökből álló rendszert alkotnak. A tartományok színének második bitje legyen 0, ha páros sok körnek van a belsejében; illetve 1, ha páratlan soknak.



5. ábra

Könnyen meggondolható, hogy bármely két szomszédos tartomány színe különböző lesz. Ha narancs él választja el őket, akkor a színük első bitje különbözik. Ha lila él választja el őket, akkor a második bit különbözik. Egy türkiz él két oldalán pedig mindkét bit ellentétes lesz. Vagyis a 00, 01, 10 és 11 (kék, piros, sárga és zöld) színekkel sikerült úgy színeznünk a gráf tartományait, hogy a szomszédos tartományok mindig különböző színűek.



6. ábra

³Az ábrán bemutatott példán egyetlen kört alkotnak a narancs és türkiz élek. Akkor lehetne több kör, ha a lila élek egy része elvágó élhalmazt alkotnának, azaz a lila élek nélkül több összefüggőségi komponensre esne szét a gráf.

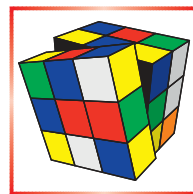
Megjegyzés. Tait az *On the Colouring of Maps* (Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Volume 10, 1880, pp. 501–503) című írásában azt látja be vázlatosan, hogy ha egy háromszögelt síkgráf élei ki vannak színezve úgy, hogy minden tartományt három különböző színű él határol (egy csúcsban több azonos színű él is találkozhat), akkor a csúcsait is ki tudjuk négy színnel színezni (úgy, hogy a szomszédos csúcsok különböző színűek). Tait fő ötlete az, hogy ha az egyik színű, pl. a lila éleket ideiglenesen egy-egy új csúccsal felosztjuk, akkor az így kapott gráf minden tartománya négy oldalú lesz. Belátható (ezt Tait sem részletezi), hogy az ilyen gráfok *páros gráfok*, azaz a csúcsaik két színnel színezhetők. Ha a lila élek visszaállítása után a narancs éleket osztjuk fel, akkor egy másféle 2 színnel való színezést kapunk. A kétféle kétszínű színezés összekombinálva a gráf csúcsainak olyan 4 színnel való színezését adja, melyben a szomszédos csúcsok mindig különböző színűek.

Ez a közvetlen bizonyítás lényegében Tait gondolatmenetének lefordítása a duális síkgráf nyelvére.

Hujter Bálint

Rejtvények, ördöglakatok

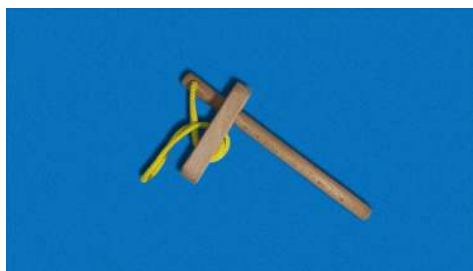
Emelt szintű bújócska II.



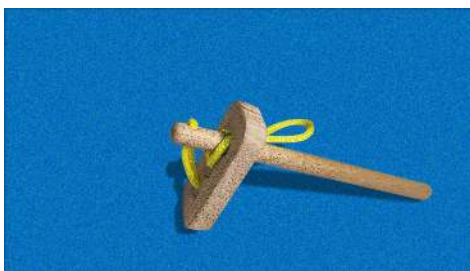
Rovatunkban minden hónapban valamilyen szórakoztató matematikai fejtörőt mutatunk be. Ezek között fontos helyet foglalnak el a különböző kirakós játékok, topológiai feladványok, ördöglakatok és a matematikát felhasználó bűvészmutatványok.

Manapság szinte mindent meg lehet találni az interneten, de az igazi élményt az adja, ha a feladatokat magunk oldjuk meg, a bűvészmutatványok trükkjeit mi találjuk ki, és a szükséges kellékeket is mi tervezzük meg és készítjük el. Próbáljuk meg a feladatokat továbbgondolni, általánosítani, igyekezzünk új feladatokat kitalálni.

Legutóbb szeptemberi számunkban foglalkoztunk bújócska típusú ördöglakatokkal. Elkészítésre ajánlottunk olvasóinknak egy pálcás változatot, ahol a „szokásos” trükk nem működik, mivel az átbújtatás után (lásd *ábra*) a pálcá nem fér át a hurkon a zsinór rövidege miatt. Azonban vegyük észre, hogy ebben az átbújtatott állapotban valójában annyi a célunk, hogy a hurok a dupla zsinór másik oldalára kerüljön. Ezt úgy is elérhetjük, ha a téglatest formájú „alapot” bújtatjuk át a hurkon. Ezzel a feladatot gyakorlatilag meg is oldottuk.



1. ábra



2. ábra



3. ábra



4. ábra

Érdemes szót ejteni a klasszikus (és a szeptemberi számban már bemutatott) drótszíves ördöglakat különböző, a borítón látható variációiról is. Ezek a játékok alapvetően ugyanarra az egyszerű trükkre építenek, mint az összes alapszintű bújócska típusú játék, de meghökkentő formájukkal, vagy egyéb apró csavarral a gyakorlottabb megoldóknak is szórakoztató feladványt biztosítanak. Személyes kedvencem a négyzetes spirál kialakítású változat: az egyik legegyszerűbb bújócska feladvány gyűjteményemben, amely csupán formájával csalja meg a játékost – tapasztalataim szerint mégis sokaknak beletörik a bicskája.



5. ábra

Egy nagyon meghökkentő bújócskát láthatunk az 5. ábrán. Ez egy fatalapzatból és két szál drótból áll – utóbbiakra jobb és bal oldali drótként fogunk hivatkozni a szerint, hogy a fotón a jobb vagy a bal oldalra esik a talapzatba rögzítésük. A célunk a zsinór lefűzése.

A jobb oldali drót egy hurokban végződik, amely körülfogja a bal oldali drótót. Képzeletben ezt a hurkot emeljük fel (mintha a drót gumiból lenne), és húzzuk ki a bal oldali drót végén lévő hurkból. (A mellékelt ábrán szemléltettük az átalakítást.) Ezzel az egyszerű módosítással a feladvány közönséges bújócskává változik: a jobb oldali drót végén lévő hurkon kell először fentről átbújtatni a zsinórt, majd kigombolni az „akadályt”, ami esetünkben a bal oldali drót önmagába hurkolódó vége.



6. ábra

Természetesen a fémből készült, valódi játék ilyen módon nem deformálható. De a leírt elképzelt módosítás megadja a megoldás kulcsát. Látjuk, hogyan?

Végezetül bemutatjuk a drótszív játék több emeletes változatait. Itt az eredeti játékban a keretet lezáró, súlyzóra emlékeztető formájú pántot egy komplett újabb drótszív játékra cseréltük, így egy kétemeletes játékot kaptunk. Ahhoz, hogy az alsó szintről le tudjuk venni a szívet, menet közben rá kell tegyük a felső szintre. Vagyis a kétemeletes játékot visszavezethetjük az alapjáték megoldására.

Építhetünk három- vagy még több emeletes drótszívet is, de ebben a formában a keretek fizikai merevsége miatt ezek megoldhatósága már nehezen megvalósítható. A többemeletes drótszív játékot más formában szokás megépíteni, amiről már valójában írtunk: ez lényegében a meleda, amelyet a KöMaL 2024. márciusi számában mutattunk be.

Jó szórakozást!



7. ábra

Vígh Viktor



Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségre

I. rész

1. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$\sqrt{x^2 - 5x - 14} \cdot |5 - x| \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \lg(9 - x) = 0 \quad (13 \text{ pont})$$

2. a) Tíz-es számrendszerben hány jegyű szám az 5^{29} ? (3 pont)

b) Egy mértani sorozat első tagja 5^{-29} , kvóciense 5. Az első tagtól kezdve legalább hány tagot kell összeszorozni ebben a sorozatban, hogy a szorzat értéke elérje 5^{29} -t? (8 pont)

c) Apáczai Csere János éppen 400 éve született. Írja fel a tudós születési évszámát ötös számrendszerben! (2 pont)

3. Egy 34-fős osztályban senki sem született februárban.

a) Bizonyítsa be, hogy van olyan hónap, amelyben az osztályból legalább négy diák született! (3 pont)

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy lesz két olyan diák ebben az osztályban, aki ugyanazon a napon született? (6 pont)

c) Az iskolához közeli fagyizóban tízféle fagyfaltot árulnak. Legalább hány-szor kellett a teljes osztálynak elmennie a fagyizóba, ha biztosak lehetünk abban, hogy a fagyizások alatt volt két pontosan ugyanolyan rendelés, ha mindenki legfeljebb két gombóc fagyit vehet? (Két fagyirendelés különböző, ha a két tölcsérben az alsó vagy a felső gombóc íze eltér rendelésekben.) (5 pont)

4. Egy osztály nyári buliján az osztály egy része a strandon a büfében vásárol. Lujzi csak egy lángost vesz magának, de kifizeti Sanyi, Szöszi, Kati és Béla teasültkrumpli menüjét is (négy teát és négy sültkrumplit), ezért végül 7130 Ft-ot fizet. Jani is összegyűjtött pár rendelést, nyolc teát, öt lángost és két sültkrumplit vesz, amiért 12 790 Ft-ot fizet. Armand csak Zsuzsit és Amandát hívja meg most, azt tervezi, vesz mindhármuknak egy-egy teát, sültkrumplit, lángost, de rájön, hogy ő így éhes maradna, így végül hozzácsap még a rendeléshez két sültkrumplit; egy tízezressel fizet, és még vissza is kap 230 Ft-ot.

a) Mennyibe kerül a tea, a lángos és a sültkrumpli ebben a büfében? (8 pont)

b) Hányféle sorrendben adhatják ki a kiadópulton az előbb kifizetett összes italt és ételt, ha az azonos termékek között nem teszünk különbséget? (3 pont)

II. rész

5. Az **a** és **b** vektorokra teljesül, hogy $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 1$.

a) Mekkora **a** és **b** vektorok skaláris szorzata? (4 pont)

b) Mekkora $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$ vektor abszolútértéke? (4 pont)

Adott az $\mathbf{a}(3;4)$ vektor. Az origó középpontú 6 egység sugarú kör **a** vektorral párhuzamos érintője az y tengelyt a $(0;p)$ pontban metszi.

c) Adja meg p lehetséges értékeit! (8 pont)

6. Zsigri tanár úr egy magánnyugdíj-megtakarítási konstrukcióban vesz részt: 2001 első banki napján, és azóta is minden hónap első banki napján befizetett 40 000 Ft-ot. A nyugdíjpénztár mindvégig havi 0,4%-os kamatot biztosít. Az állam, hogy támogassa az öngondoskodást, az adott évben befizetett összeg 5%-át, de legfeljebb évi 25 000 Ft-ot, a következő év első banki napján befizeti a pénztártag számlájára.

a) Mekkora összeg lesz a tanár úr számláján 2026 első banki napján? (2026-ban már nem fizet be tanár úr és már nem is számol kamatot a bank, csak az állami jóváírást 2025-re.) (7 pont)

A 2026-ra összegyűlt pénz egy részéből Zsigri tanár úr világgörűli utazásba kezd, de 12 millió Ft-ot a számlán hagy majd, hogy abból havi állandó összegű nyugdíj kiegészítést kapjon pont 20 éven keresztül. (A pénztár minden hónap első napján jóváírja a kamatot, majd díjmentesen átvezeti a tanár úr normál bankszámlájára a nyugdíjkiegészítés összegét.)

b) Mekkora havi nyugdíjkiegészítéssel számolhat ebből a tanár úr, ha a pénztár továbbra is fix 0,4%-os havi kamatot biztosít a számlán maradó pénzre? (6 pont)

Minden egyes évben 0,002 annak a valószínűsége, hogy ez a nyugdíjpénztár kamatot csökkent.

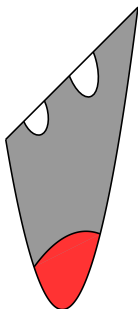
c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a teljes folyamat 45 éve alatt egyszer sem fog kamatot csökkenteni a pénztár? (3 pont)

7. Egy szellemvasút olyan szörnyszáj alakú cégért készít, amely terveinek határvonalait a koordináta-rendszerben az $y = x + 5$ egyenletű egyenes, illetve az

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 2 \quad \text{és a} \quad g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{8}x + \frac{3}{4}$$

függvények görbéi határozzák meg.

Hány deciliter piros festéket kell használni a nyelvhez és hány deciliter szürke festéket a száj belsejének befestéséhez, ha négyzetméterenként 7 dl festék szükséges mindkét színből, és a koordináta-rendszer tengelyein a terveken az egységek valóságban 50 cm-nek felelnek meg? (A fogakat egy fehér ledlámpa szolgáltatja majd, de az alatta lévő területet is befestik szürkére.) Válaszait egészre kerekítve adja meg! (16 pont)



8. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 10 egység, szárai 13 egység hosszúak. A háromszögbe téglalapokat írunk, amelyeknek egyik oldala a háromszög alapjára esik, a másik két csúcsa pedig a háromszög egy-egy szárára.

a) Mekkora a téglalap területe, ha háromszög alapjára eső oldalhossza 8 egység? (5 pont)

b) Mekkora a maximális területű beírható téglalap oldalai? (5 pont)

A háromszöget kétféleképpen megforgatjuk: A) az alapja körül, B) az egyik szára körül.

c) Mekkora az A), illetve a B) esetben keletkezett testek felszíneinek aránya? Az arány pontos értékét adja meg! (6 pont)

9. Egy ellenőrzés során azt vizsgálták, hogy az 1 kg-os csomagolású rizs tömege valójában mennyire tér el az 1000 grammtól. Két sorozatban 8-8 mérést csináltak, az eredményeket az alábbi táblázatba foglalták.

	A mért eltérések grammokban							
1. mérésorozat	1	3	5,5	2,5	3	6	5	0
2. mérésorozat	3	6	6	3		3	3	6

a) Hány gramm az első mérésorozat átlaga és szórása? Válaszát egy tizedesjegy pontossággal adja meg! (3 pont)

b) Készítsen sodrófa (boxplot) diagramot az első mérésorozat adatairól! (5 pont)

A második mérésorozat szórása 1,5 gramm.

c) Mi lehetett a táblázat hiányzó adata? (8 pont)

**Az ELTE Apáczai Csere János Gyakorló
Gimnázium matematika munkaközössége
Budapest**

Megoldásvázlatok a 2025./8. szám matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. Két pozitív szám számtani közepe 205, a számtani és mértani közepük különbsége 160. Melyik ez a két szám? (11 pont)

Megoldás. Jelöljük az egyik számot x -szel, a másikat y -nal, ahol $x > 0$ és $y > 0$. Számtani közepük

$$\frac{x+y}{2} = 205, \quad \text{amiből} \quad x+y = 410, \quad y = 410 - x.$$

A mértani közép legfeljebb annyi, mint a számtani, ezért most a feladat feltétele alapján 160-nal kisebb, mint a számtani közép, azaz értéke $205 - 160 = 45$. Ekkor

$$\sqrt{xy} = 45 \Leftrightarrow xy = 45^2 = 2025,$$

amibe az y helyére $(410 - x)$ -et helyettesítve egy másodfokú egyenletet kapunk:

$$x(410 - x) = 2025 \Leftrightarrow x^2 - 410x + 2025 = 0,$$

amelynek gyökei $x_1 = 405$, $x_2 = 5$, így $y_1 = 410 - 405 = 5$, $x_2 = 410 - 5 = 405$, azaz ugyanazt a számpárt kapjuk meg kétszer.

Ellenőrzés: Az 5 és a 405 számtani közepe tényleg 205, mértani közepük pedig 45, ami valóban 160-nal kisebb a számtani közepüknél.

A keresett két pozitív szám az 5 és a 405.

2. a) Számítsa ki $x \in \mathbb{R}$ értékét, ha $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, valamint $A(x; 7)$, $B(4; -1)$ és $C(x - 11; -4)$. (8 pont)

b) Adja meg az a) részben kapott ABC háromszög súlypontját. (2 pont)

c) Mekkora az a) részben kapott ABC háromszög területe? (3 pont)

Megoldás. a) Elsőként kiszámítjuk a két vektor koordinátáit:

$$\overrightarrow{AB} = (4 - x; -8) \quad \text{és} \quad \overrightarrow{AC} = (-11; -11),$$

így skaláris szorzatuk a következőképpen írható fel:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (4 - x) \cdot (-11) + (-8) \cdot (-11) = 0,$$

amiből $x = -4$ adódik, ez a feladat egyetlen megoldása.

Ellenőrzés: $x = -4$ esetén $\overrightarrow{AB} = (8; -8)$, ekkor $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 8 \cdot (-11) + (-8) \cdot (-11) = -88 + 88 = 0$.

b) A feladat előző részében $x = -4$ -et kaptunk, így az ABC háromszög csúcsai a következők:

$$A(x; 7) = (-4; 7), \quad B(4; -1) \quad \text{és} \quad C(x - 11; -4) = (-15; -4).$$

A súlypont koordinátái a csúcspontok megfelelői koordinátáinak átlagaként számolhatók ki:

$$S\left(\frac{-4 + 4 + (-15)}{3}; \frac{7 + (-1) + (-4)}{3}\right) = S\left(-5; \frac{2}{3}\right).$$

c) Az a) részben láttuk, hogy a háromszög két oldalvektorának skaláris szorzata nulla, ezért merőlegesek egymásra, így az ABC háromszög derékszögű. A befogók hossza: $AB = \sqrt{8^2 + (-8)^2} = 8\sqrt{2}$, illetve $AC = \sqrt{(-11)^2 + (-11)^2} = 11\sqrt{2}$. A háromszög területe:

$$T = \frac{8\sqrt{2} \cdot 11\sqrt{2}}{2} = 88.$$

3. a) Határozza meg az

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) = -3\cos(4x) + 2$$

függvény értékkészletét.

(6 pont)

b) Számítással igazolja, hogy a

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad g(x) = 2025x^3 - 2026x$$

függvény páratlan.

(6 pont)

Megoldás. $a)$ Ismert, hogy a $k(x) = \cos(x)$ függvény értékkészlete: $R_k = [-1; 1]$. Ha $h(x) = \cos(4x)$, akkor $R_h = [-1; 1]$. Ha $i(x) = -3\cos(4x)$, akkor $R_i = [-3; 3]$, végül $f(x) = -3\cos(4x) + 2$ értékkészlete: $R_f = [-1; 5]$.

$b)$ Minden $x \in \mathbb{R}$ -re:

$$\begin{aligned} -g(-x) &= -(2025 \cdot (-x)^3 - 2026 \cdot (-x)) = \\ &= -(-2025x^3 + 2026x) = 2025x^3 - 2026x = g(x). \end{aligned}$$

Azt kaptuk, hogy minden valós x -re $g(x) = -g(-x)$, azaz a $g(x)$ függvény páratlan.

4. a) Egy egyenes folyó mentén fekvő téglalap alakú telek folyóval párhuzamos oldalának hossza a téglalap másik oldalhosszának a négyszerese. A telek folyó felőli oldalán nincs kerítés, a másik három oldal mentén lévő kerítés együttes hosszúsága 600 méter. Mekkora a telek területe? (3 pont)

$b)$ Egy másik folyóparti, téglalap alakú telek körbekerítésére szintén 600 méter hosszúságú kerítést használnak fel úgy, hogy a folyópartra nem építenek kerítést, de közben a telek területe a lehető legnagyobb legyen. Mekkora az így kapott telek területe? (8 pont)

$c)$ Hány osztója van a $(-45\,000)$ -nek? (4 pont)

Megoldás. $a)$ Legyen a téglalap rövidebb oldalának hossza x méter, ekkor a hosszabb oldal $4x$ méter hosszú. A folyó mentén nincs kerítés, tehát a kerítés a három másik oldal mentén van: $x + 4x + x = 6x = 600$, amiből $x = 100$ méter. Ekkor a hosszabb oldal: $4x = 400$ méter, így a telek területe: $T = x \cdot 4x = 100 \cdot 400 = 40\,000 \text{ m}^2$.

$b)$ Legyen a téglalap folyóra merőleges oldalának hossza y méter, a folyóval párhuzamos oldalának hossza pedig z méter. Ekkor a kerítés $2y + z = 600$ méter hosszú, amiből $z = 600 - 2y$. A területet felírjuk y függvényében:

$$T(y) = y \cdot z = y(600 - 2y) = 600y - 2y^2,$$

ezután megkeressük $T(y)$ maximumát:

$$T(y) = -2(y^2 - 300y) = -2(y - 150)^2 + 45\,000,$$

így a lefelé nyíló parabola maximumpontja: $P(150; 45\,000)$. Ez azt jelenti, hogy a telek területe $y = 150$ esetén a legnagyobb, mégpedig $45\,000 \text{ m}^2$.

Ellenőrzés: Ha $y = 150$ méter, akkor $z = 600 - 2 \cdot 150 = 300$ méter, így a telek területe valóban $T = 150 \text{ m} \cdot 300 \text{ m} = 45\,000 \text{ m}^2$.

$c)$ A prímtényezőző felbontásból kiszámítjuk a pozitív osztók számát:

$$45\,000 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^4,$$

amiből a pozitív osztók száma: $(3+1) \cdot (2+1) \cdot (4+1) = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$. Minden pozitív osztó ellentettje is osztó, így a $-45\,000$ -nek $2 \cdot 60 = 120$ osztója van.

II. rész

5. a) Adott az $e: x - y = 8$ egyenletű egyenes és a $k: x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$ egyenletű kör. Állapítsa meg az e egyenes és a k kör kölcsönös helyzetét. Ha van(nak), adja meg a közös pont(ok) koordinátáit. (8 pont)

b) Adott a koordinátasíkon a $P(3; -5)$ és a $Q(6; -2)$ pont. Jelöljük rendre P_1 -gyel és Q_1 -gyel a P , illetve a Q pont x tengelyre eső merőleges vetületét; P_2 -vel és Q_2 -vel pedig a P , illetve a Q pont y tengelyre eső merőleges vetületét. Mekkora a $Q_1P_1Q_2P_2$ négyszög kerülete? (5 pont)

c) Mekkora a $Q_1P_1Q_2P_2$ négyszög területe? (3 pont)

Megoldás. a) Megoldjuk az e egyenes, illetve a k kör egyenletét tartalmazó egyenletrendszert, például úgy, hogy az egyenes egyenletéből kifejezzük y -t:

$$y = x - 8,$$

majd a kapott kifejezést behelyettesítjük y helyére a kör egyenletébe:

$$x^2 + (x - 8)^2 - 6x + 4(x - 8) + 4 = 0,$$

$$2x^2 - 18x + 36 = 0,$$

amiből $x_1 = 3$; $x_2 = 6$ adódik, így $y_1 = -5$; $y_2 = -2$.

A közös pontok: $M_1(3; -5)$ és $M_2(6; -2)$, vagyis az e egyenes a k kör szelője.

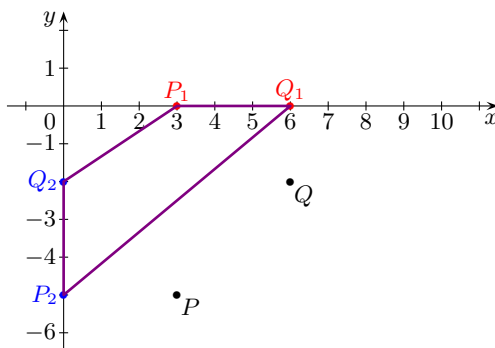
b) Egy tetszőleges pont x tengelyre történő merőleges vetítésekor az abszcisszája nem változik, az ordinátája pedig 0 lesz, így a megfelelő vetületek:

$$P_1 = (3; 0) \quad \text{és} \quad Q_1 = (6; 0).$$

Az y tengelyre történő merőleges vetítésekor viszont az abszcissza válik nullává, az ordinátája pedig nem változik, így a megfelelő vetületek:

$$P_2 = (0; -5) \quad \text{és} \quad Q_2 = (0; -2).$$

Ábrázoljuk a pontokat:



A $Q_1P_1Q_2P_2$ négyszög oldalainak hossza:

$$Q_1P_1 = |6 - 3| = 3,$$

$$P_1Q_2 = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13},$$

$$Q_2P_2 = |-2 + 5| = 3,$$

$$P_2Q_1 = \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61},$$

így a keresett kerület: $K = 3 + \sqrt{13} + 3 + \sqrt{61} = 6 + \sqrt{13} + \sqrt{61}$.

c) Az origót jelöljük O -val. Ekkor a $Q_1P_1Q_2P_2$ négyszög területe a Q_1OP_2 és a P_1OQ_2 derékszögű háromszögek területének különbségével egyenlő:

$$T = \frac{6 \cdot 5}{2} - \frac{3 \cdot 2}{2} = 15 - 3 = 12 \text{ (területegység)}.$$

6. a) *Anna, Bogi és Cili unokatestvérek. Hat év múlva Bogi annyi idős lesz, mint most Anna. Hét év múlva Anna 9-szer annyi idős lesz, mint most Cili. Nyolc év múlva hárman együtt 42 évesek lesznek. Hány évesek most a lányok?* (10 pont)

b) *Oldja meg a $\left(\frac{2}{5}\right)^{\ln(x)} \geq 6,25$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.* (6 pont)

Megoldás. a) Legyen Anna jelenlegi életkora a , Bogi életkora b , Cili életkora c . Mivel 6 év múlva Bogi annyi idős lesz, mint most Anna, ezért $b = a - 6$. Hét év múlva Anna 9-szer annyi idős lesz, mint most Cili, vagyis $9c = a + 7$, ebből kifejezzük c -t: $c = \frac{a+7}{9}$. Végül 8 év múlva hárman együtt 42 évesek lesznek, ezért $(a+8) + (b+8) + (c+8) = 42$, amiből

$$a + b + c + 24 = 42,$$

rendezve

$$a + b + c = 18.$$

Az előzőekben tárgyalt $b = (a - 6)$ -ot, a $c = \frac{a+7}{9}$ -et behelyettesítjük:

$$a + (a - 6) + \frac{a + 7}{9} = 18,$$

$$2a - 6 + \frac{a + 7}{9} = 18,$$

$$18a - 54 + a + 7 = 162,$$

amiből $a = 11$ adódik.

Ekkor:

$$b = a - 6 = 5, \quad c = \frac{a + 7}{9} = \frac{18}{9} = 2,$$

így most Anna 11, Bogi 5, Cili pedig 2 éves.

Ellenőrzés: Bogi 6 év múlva tényleg 11 éves lesz, mint amennyi most Anna. Anna 7 év múlva 18 éves lesz, ami valóban 9-szer annyi, mint a 2 év. Végül 8 év

múlva összesen $19 + 13 + 10 = 42$ évesek lesznek a lányok, így a megoldás kielégíti a feladat feltételeit.

b) Az egyenlőtlenség értelmezési tartománya: $x > 0$. Felírjuk a $6,25$ -öt a $\frac{2}{5}$ hatványaként:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\ln(x)} \geq \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}.$$

Mivel $\frac{2}{5} < 1$, ezért a hatványainak értéke kisebb kitevő esetén nagyobb, így:

$$\ln(x) \leq -2,$$

amiből $-2 = \ln(e^{-2})$, illetve az $\ln(x)$ függvény szigorúan monoton növekvő tulajdonsága miatt

$$x \leq e^{-2}.$$

Figyelembe véve az $x > 0$ értelmezési tartományt, a megoldáshalmaz:

$$x \in]0; e^{-2}].$$

Ekvivalens átalakításokat végeztünk.

7. a) Bizonyítsa be, hogy a tízes számrendszerben felírt $2,02\dot{5}$ szám racionális. (6 pont)

b) Mutassa meg, hogy a $2 \cdot \lg 7$ irracionális. (5 pont)

c) Számítsa ki az $\int (5x^2 - 3x^9 + 8x)dx$ határozatlan integrált! (5 pont)

Megoldás. a) Mivel

$$2,02\dot{5} = 2 + 0,025 + 0,000025 \dots = 2 + 0,025 + \frac{1}{10^3} \cdot 0,025 + \frac{1}{10^6} \cdot 0,025 \dots,$$

ezért a szám tört része az $a_1 = 0,025$ kezdőtagú, $q = \frac{1}{10^3}$ hányadosú mértani sorozatból képezett sor. Alkalmazzuk a mértani sor összegképletét:

$$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{0,025}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{0,025}{\frac{999}{1000}} = \frac{25}{999}.$$

Ebből következik, hogy

$$2,02\dot{5} = 2 + \frac{25}{999} = \frac{2023}{999},$$

vagyis felírható két egész szám hányadosaként, azaz racionális. Ezzel a bizonyítás végére értünk.

b) Tegyük fel indirekt módon, hogy $2 \cdot \lg 7$ racionális, és mivel $\lg 7$ pozitív, ezért felírható p és q pozitív egészek hányadosaként:

$$2 \cdot \lg 7 = \frac{p}{q} \Leftrightarrow 2q \cdot \lg 7 = p \Leftrightarrow \lg 7^{2q} = p \Leftrightarrow 7^{2q} = 10^p \Leftrightarrow 7^{2q} = 2^p \cdot 5^p,$$

ami azt jelenti, hogy a bal oldalon a 7-nek egy pozitív egész kitevőjű hatványa áll. Ez pedig a számelmélet alaptétele alapján nem lehet egyenlő egy olyan számmal,

amelynek prímtényező felbontásában nem szerepel a 7. Márpedig a jobb oldalon egy ilyen szám van, így ellentmondásra jutottunk, azaz az indirekt feltevésünk hamis. Tehát az eredeti állítás igaz, azaz beláttuk, hogy a $2 \cdot \lg 7$ szám irracionális. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

c)

$$\int (5x^2 - 3x^9 + 8x) dx = \frac{5x^3}{3} - \frac{3x^{10}}{10} + 4x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

8. Tekintsük a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^3$, illetve $g(x) = 2x + 1$ hozzárendelési szabállyal megadott két függvényt. Adja meg az alábbi összetett függvények hozzárendelési szabályát és deriváltfüggvényét.

a) $(f \circ g)(x) =$ (2 pont) b) $(f \circ g)'(x) =$ (3 pont)

c) $(f \circ f)(x) =$ (2 pont) d) $(f \circ f)'(x) =$ (2 pont)

e) $(g \circ f)(x) =$ (2 pont) f) $(g \circ f)'(x) =$ (2 pont)

g) $(g \circ g)(x) =$ (2 pont) h) $(g \circ g)'(x) =$ (1 pont)

Megoldás. a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 1) = (2x + 1)^3$

b) $(f \circ g)'(x) = [(2x + 1)^3]' = 3(2x + 1)^2 \cdot 2 = 6(2x + 1)^2$

c) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x^3) = (x^3)^3 = x^9$

d) $(f \circ f)'(x) = (x^9)' = 9x^8$

e) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3) = 2x^3 + 1$

f) $(g \circ f)'(x) = (2x^3 + 1)' = 6x^2$

g) $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(2x + 1) = 2(2x + 1) + 1 = 4x + 3$

h) $(g \circ g)'(x) = (4x + 3)' = 4$

9. a) Töhötöm számegyenesen ábrázolta a $[-5; 8]$ intervallumot, majd csukott szemmel rábőkött az egyik pontjára. Mekkora a valószínűsége, hogy Töhötöm a $[-1; 2]$ intervallum egyik pontjára bőkött rá, ha a választás valószínűsége egyenesen arányos az intervallum hosszával? (3 pont)

b) Igazolja, hogy a $[-5; 8]$ és a $[-1; 2]$ intervallum számossága egyenlő. (5 pont)

c) Hányféleképpen választható ki pontosan két szám a Pascal-háromszög felső öt sorából úgy, hogy összegük páros legyen? (Két kiválasztás különböző, ha legalább az egyik számot másik helyről választottuk a Pascal-háromszögből.) (4 pont)

d) Hányféleképpen választható ki legalább hét szám a Pascal-háromszög felső öt sorából úgy, hogy szorzatuk páratlan legyen? (Két kiválasztás különböző, ha legalább az egyik számot másik helyről választottuk a Pascal-háromszögből.) (4 pont)

Megoldás. a) A valószínűség egyenletes eloszlás esetén a geometriai valószínűségi modell alkalmazásával:

$$P = \frac{\text{kedvező hossz}}{\text{teljes hossz}} = \frac{2 - (-1)}{8 - (-5)} = \frac{3}{13}.$$

b) Két halmaz számossága egyenlő, ha létezik köztük egy kölcsönösen egyértelmű leképezés. Legyen például $f(x) = \frac{3}{13}x + \frac{2}{13}$, ekkor $f(-5) = -1$, és $f(8) = 2$, így az f függvény leképezi a $[-5; 8]$ intervallumot a $[-1; 2]$ intervallumra. Ez egy szigorúan monoton (növekvő) függvény, így bijekció. Tehát

$$|[-5; 8]| = |[-1; 2]|.$$

c) A Pascal-háromszög felső öt sora a 0. sortól a 4. sorig terjed:

$$\begin{array}{cccccc} 0. \text{ sor:} & & & & & 1 \\ 1. \text{ sor:} & & & 1 & & 1 \\ 2. \text{ sor:} & & 1 & & 2 & & 1 \\ 3. \text{ sor:} & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ 4. \text{ sor:} & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

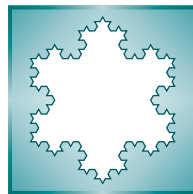
Itt összesen $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ szám található, amelyek közül 4 páros, a többi, azaz $15 - 4 = 11$ darab páratlan. Két egész szám összege akkor és csak akkor páros, ha paritásuk megegyezik. Ha mindkettő páros, akkor a kiválasztások száma: $\binom{4}{2} = 6$. Ha mindkettő páratlan, akkor a megfelelő kiválasztások száma: $\binom{11}{2} = 55$, így $6 + 55 = 61$ -féleképpen választható ki a megfelelő két szám.

d) Néhány egész szám szorzata pontosan akkor páratlan, ha mindegyik szám páratlan. A kérdéses helyen 11 páratlan szám található, amelyek közül legalább hetet, azaz 7, 8, 9, 10 vagy 11 darabot választunk, így a lehetőségek száma:

$$\binom{11}{7} + \binom{11}{8} + \binom{11}{9} + \binom{11}{10} + \binom{11}{11} = 330 + 165 + 55 + 11 + 1 = 562.$$

Kozma Katalin Abigél
Győr

Matematika C gyakorlatok megoldása

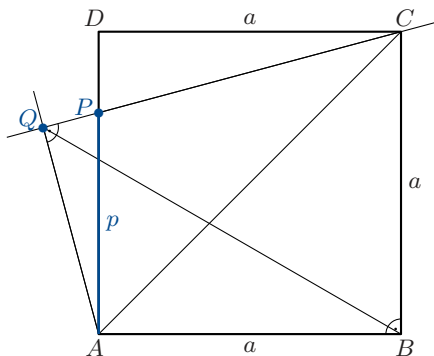


C. 1847. Az $ABCD$ négyzet AD oldalán válasszuk ki úgy a P pontot, hogy $\angle CPA = 105^\circ$ legyen. A CP egyenesre az A pontból bocsássunk merőlegest, amelynek talppontját jelölje Q . Határozzuk meg az ABQ és az ACP háromszögek területe arányának pontos értékét.

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

1. Megoldás. Legyen a négyzet oldalának hossza a , és alkalmazzuk az $AP = p$ jelölést. A feltételek miatt $\angle APQ = 75^\circ$; $\angle QAP = 15^\circ$; $\angle PAC = \angle CAB = 45^\circ$; $\angle ACP = 30^\circ$.

Tekintsük az 1. ábrát.



1. ábra

Az APQ derékszögű háromszögben $\cos 15^\circ = \frac{AQ}{p}$, ahonnan $AQ = p \cdot \cos 15^\circ$. A trigonometrikus területképlet alkalmazásával:

$$T_{ABQ} = \frac{AQ \cdot a \cdot \sin 105^\circ}{2} = \frac{p \cdot \cos 15^\circ \cdot a \cdot \sin 105^\circ}{2},$$

amelyből a $\sin 105^\circ = \sin 75^\circ = \cos 15^\circ$ trigonometrikus azonosságok alkalmazásával

$$(1) \quad T_{ABQ} = \frac{p \cdot a \cdot \cos^2 15^\circ}{2}.$$

Hasonlóképpen kapjuk, hogy

$$T_{ACP} = \frac{p \cdot AC \cdot \sin 45^\circ}{2},$$

ahonnan $AC = a\sqrt{2}$ és $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ alapján

$$(2) \quad T_{ACP} = \frac{p \cdot a}{2}.$$

Az (1) és (2) megfelelő oldalainak arányából

$$(3) \quad \frac{T_{ABQ}}{T_{ACP}} = \cos^2 15^\circ.$$

Tudjuk, hogy

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ,$$

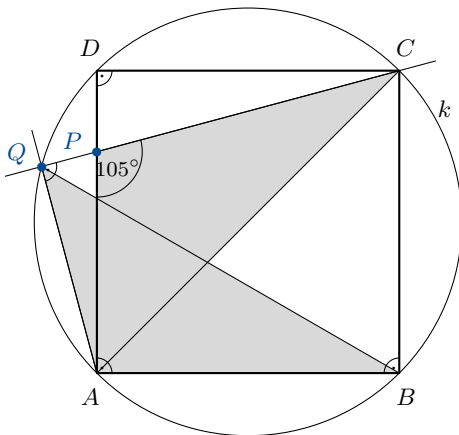
ezért a $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, illetve $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ értékek beírásával $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} + 1)}{4}$, innen négyzetre emeléssel és egyszerűsítéssel adódik a két

háromszög területének aránya:

$$\frac{T_{ABQ}}{T_{ACP}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}.$$

(Több dolgozat alapján)

2. Megoldás. Jelöléseink a 2. ábrán láthatók.



2. ábra

Az $ABCQ$ négyszög húrnégyszög, mert a B és Q csúcsoknál levő belső szögei egyaránt derékszögek. A húrnégyszög köré írt k kör egyben az $ABCD$ négyzet körülírt köre is, hiszen az AC átmérőjű körre a D pont is illeszkedik.

Nyilvánvaló, hogy $\angle BCA = \angle DAC = 45^\circ$ és így $\angle PAC = 45^\circ$ is igaz.

A k körben az AB és BC négyzetoldalakhoz egyenlő nagyságú kerületi szögek tartoznak, tehát QB felezi a $\angle CQA$ derékszöveget, és így $\angle BQA = 45^\circ$, vagyis az ABQ és CPA háromszögek Q , illetve A csúcsánál levő belső szögek nagysága 45° .

A $\angle CPA = 105^\circ$ feltételből és a $\angle PAC = 45^\circ$ eredményből következik, hogy $\angle ACP = \angle ACQ = 30^\circ$, de akkor a kerületi szögek tétele miatt $\angle ABQ = 30^\circ$ is teljesül. Az ABQ és ACP háromszögek két-két szöge tehát megegyezik, ezért hasonlóak, a hasonlóság aránya:

$$(4) \quad \lambda = \frac{AB}{CP} = \frac{CD}{CP}.$$

Az $\angle ACD = 45^\circ$ és $\angle ACP = 30^\circ$ egyenlőségekből adódik, hogy $\angle PCD = 15^\circ$, ezért (4) szerint $\lambda = \cos 15^\circ$.

Az ABQ és ACP háromszögek területének aránya λ^2 -tel egyenlő, tehát

$$\frac{T_{ABQ}}{T_{ACP}} = \cos^2 15^\circ.$$

Az 1. megoldásban igazoltuk, hogy $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} + 1)}{4}$, ebből négyzetre emeléssel és egyszerűsítéssel kapjuk, hogy

$$\frac{T_{ABQ}}{T_{ACP}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}.$$

Hetyei Dániel (Révai M. Gimn., Győr, 11. o. t.) dolgozatának felhasználásával „*Baráti angyalai*” csapat (Ciszterci Rend Nagy L. Gimn., Pécs) dolgozata alapján

34 dolgozat érkezett. 5 pontos 21, 4 pontos 2, 3 pontos 3, 2 pontos 3, 1 pontos 2, 0 pontos 3 dolgozat.

C. 1853. *Néhány kutató egy virágos homokgyepen zümmögő poszméhek ötvenfős csapatát figyeli. Izgatottan állapítják meg, hogy a poszméhek mindegyike pontosan négyféle virágról gyűjtött virágport, mielőtt továbbrepült volna. Sőt, még azt is felfezték, hogy mindegyik poszméh különböző négyest választott, de mind az 50 poszméh meglátogatott egy buglyos fátyolvirágot. Bizonyítsuk be, hogy összesen legalább 9-féle virágról gyűjtöttek a poszméhek.*

Javasolta: *Paulovics Zoltán* (Budapest)

Megoldás. Legyen a virágok száma a fátyolvirágon kívül n . Ha a poszméhek valóban különböző virágnegyestől gyűjtik a virágporaikat, akkor összesen $\binom{n}{3}$ virágnegyest látogathatnak meg (hiszen a fátyolvirág porait mind begyűjtötték), ami így nem lehet kevesebb mint a poszméhek száma. Avagy

$$\binom{n}{3} \geq 50.$$

Ha 8 virág lenne, akkor ($n = 8 - 1 = 7$ miatt) $\binom{7}{3} = 35 < 50$ lenne. És mivel $\binom{n}{3} \leq \binom{n+1}{3}$ ($n \geq 3$)-ra, ezért kevesebb virág esetén sem lehetnének meg a különböző 4-esek. Tehát $n \geq 8$. Ha 9 virág lenne (tehát $n = 8$), akkor $\binom{8}{3} = 56 \geq 50$. Azaz 9 virág valóban a minimális virágszám, ahonnan a poszméhek virágport gyűjthettek ily módon.

Farkas András (Jászberény, Lehel Vezér Gimn., 11. o. t.) dolgozata alapján

187 dolgozat érkezett. 5 pontos 165, 4 pontos 19, 3 pontos 1, 1 pontos 2.

C. 1855. *Egy 19 drónból álló csapat repül egy gyakorlótér felett, a biztonsági előírásoknak megfelelően olyan rögzített alakzatban, ahol bármely két gépnek különböző a távolsága. Egy hackertámadás következtében a drónok egymásra nyitnak tüzet: mindegyik drón löv egyet a hozzá legközelebbi drónra, és ezzel megsemmisíti azt. (Feltételezzük, hogy minden drón tudott löni, a drónok pontszerűnek tekinthetők, továbbá hogy a drónok csak azután semmisülnek meg, miután minden golyó becsapódott.)*

Van-e köztük túlélő drón?

Egy drónt legfeljebb hány azonos (őt is tartalmazó) síkból származó lövedék találhatott el?

Javasolta: *Paulovics Zoltán* (Budapest)

Megoldás. Először arra a kérdésre adunk választ, hogy van-e köztük túlélő. Ráadásul kétféle módon.

1. módszer. Az alábbiakban bebizonyítjuk, hogy a drónok között mindig van legalább egy túlélő. Indirekt bizonyítunk, ehhez feltételezzük, hogy nincsen túlélő drón.

Mivel bármelyik két gépnek különböző a távolsága, egyértelműen beazonosítható az a drónpáros, amelyek távolsága a legkisebb. Jelöljük ezt a két drónt A -val és B -vel. Ezek alapján az A -hoz legközelebbi drón B és a B -hez legközelebbi drón A , azaz egymást kölcsönösen lelövik. Ezen kívül még 17 drón marad, amelyek összesen 17 lövést adnak le. Ezek közül egyik sem találhatja el A -t vagy B -t, hiszen ebben az esetben kevesebb mint 17 lövés irányulna a maradék 17 drónra, azaz lenne köztük túlélő. Így a megsemmisített A és B drónok a maradéktól függetlenek, nem köti őket össze lövés, tehát ez a drónpáros figyelmen kívül hagyható.

Ezt a gondolatmenetet elismételhetjük 17-re, illetve C és D legkisebb távolságra lévő drónokra. És így tovább...

Látható, hogy itt egy lépésben mindig egy drónpáros, azaz két drón távolítható el a csapatból, azaz mindig csak a maradék 17, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1 drónt kell figyelembe vennünk. Így a végén marad 1 drón, amelyre még nem lőtt semmi, így túléli a támadást. Ez ellentmond annak a feltevésnek, hogy nincs túlélő drón, így beláttuk, hogy van legalább egy túlélő drón.

*Fülöp Magdaléna Hasian (Pécs, Pécsi Leőwey K. Gimn., 10. o. t.)
dolgozata alapján*

2. módszer. Teljes indukcióval általános esetben adunk választ a kérdésre, azaz megmutatjuk, hogy $2n + 1$ darab drón esetén lesz túlélő.

$n = 1$ esetén nyilvánvaló, hogy lesz túlélőnk, hiszen „körbelövés” nem lehetséges, mert ha az X drónhoz Y van a legközelebb, Y -hoz Z , Z -hez pedig X , úgy X és Y távolságánál kisebb Y és Z távolsága, amelynél kisebb Z és X távolsága, ami ellentmondásra vezet: X -nek nem Y -ra, hanem Z -re kellett volna céloznia.

Tegyük fel, hogy igaz az állítás n -re, megmutatjuk, hogy $(n + 1)$ -re is teljesülni fog.

Vezessünk be egy irányított gráfot: a pontjai a drónok legyenek, és fusson az u csúcsból irányított él a v csúcsba, ha az u -nak megfigyelt drón rálőtt a v -nek megfigyelt drónra. Továbbá írjuk az élekre a csúcsoknak megfigyelt drónok távolságait, amelyet egy $(u; v)$ él esetén jelöljön $d(u; v)$.

Válasszuk ki a gráfunk egy tetszőleges csúcsát, és a belőle induló irányított élen lépünk át egy másik csúcsba. Folytassuk a lépkedést egészen addig, amíg egy olyan csúcsba nem jutunk, ahol már jártunk. Ez bizonyosan bekövetkezik, hiszen minden csúcsból tovább tudunk lépni (ugyanis minden csúcsból indul ki irányított él), így legfeljebb $2(n + 1) + 1$ lépést követően elakadunk. Ekkor egy irányított kört találtunk, amelynek csúcsait rendre jelölje: $v_1, v_2, \dots, v_k$, és az utolsó lépésünk v_k -ból v_1 -be vezetett (ahol $k > 1$ pozitív egész). Először vizsgáljuk azt az esetet, amikor $k \geq 3$. Mivel minden drón a hozzá legközelebbi drónra lőtt, így a kör mentén vizsgálva a távolságokat azt kapjuk, hogy: $d(v_1; v_2) > d(v_2; v_3) > \dots > d(v_k; v_1)$. Ami viszont azt jelenti, hogy a v_1 -gyel jelölt drónhoz közelebb van a v_k -val jelölt drón,

mint a v_2 -vel jelölt, és mégis a távolabbira nyitott tüzet. Ez ellentmond a feladat feltételeinek, így arra jutottunk, hogy $k < 3$, tehát $k = 2$.

A $k = 2$ jelentése az, hogy van két drón (a v_1 -gyel és v_2 -vel jelölt), amelyek egymásra tüzeltek. Ha a gráfunk többi csúcsából irányított úton nem érhető el sem v_1 , sem v_2 , úgy ezeket elhagyva egy, a feltételeknek megfelelő, $2n + 1$ csúcsú gráfot kapunk, amelyre az indukciós feltétel miatt teljesül az állítás: létezik túlélő. Ekkor persze a $2n + 3$ csúcsú gráfnak megfeleltetett dróncsapatban is ugyanaz a drón túlél.

Amennyiben valamely másik csúcsból vezet irányított út v_1 -be vagy v_2 -be, úgy a többi $2n + 1$ csúcs között futó (azaz az általuk feszített) élek száma kevesebb, mint $2n + 1$. Ez pedig azt jelenti, hogy nem mutathat minden csúcsba él, tehát lesz túlélő drón.

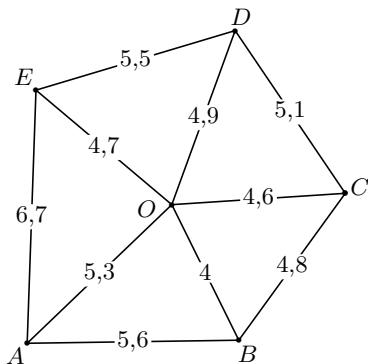
Kallós Klára (Nyíregyháza, Szent Imre Kat. Gimn., Két Tan. Nyelvű Ált. Isk., Koll., 7. o. t.),

Hetyei Dániel (Győr, Révai M. Gimn., 11. o. t.) és

Lovas Márk (Pécs, Pécsi Janus Pannonius Gimn., 9. o. t.) dolgozata alapján

Válasz a feladat második részére: Egy drónt legfeljebb hány azonos (őt is tartalmazó) síkból származó lövedék találhatott el?

Ha egy drónt n másik drón eltalálhatott, akkor n -nél kevesebb is eltalálhatta, ha pedig n drón már nem találhatta el, akkor n -nél több sem. Tegyük fel, hogy létezik olyan drón, amelyet 6 lövedék talált el, és nevezzük el D -nek. Tekintsük a D -ből és a rá lövékből álló drónhetest. Ekkor ha minden szög 60° -os a D körül, úgy – mivel egyik hármass sem feszíthet szabályos háromszöget – D és valamely másik két (D -re lövő) drón által alkotott



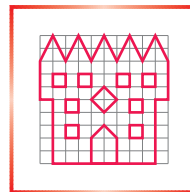
háromszögben az egyik szög biztosan nagyobb lesz, mint 60° . Ismert, hogy egy háromszögben nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van, tehát az egyik drón a 6 közül nem D -t fogja löni, hanem azt, amelyik közelebb van hozzá, ami ellentmondás. Ha pedig nem mindegyik szög 60° -os, akkor van egy kevesebb mint 60° -os, de ekkor – az előzőekhez hasonlóan – megint arra jutunk, hogy az egyik D -re lövő drónhoz nem is D áll a legközelebb. Így $n \leq 5$. Az ábra mutatja, hogy az $n = 5$ eset megvalósítható. (Az ábrán nem látható drónok nagyon messze vannak az ábrázolt pontoktól.)

Molnár-Sáska Tamás (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 7. o. t.) és

Bodó Rókus Dániel (Szegedi Radnóti M. Kís. Gimn., 8. o. t.) dolgozata alapján

A feladatra összesen 133 dolgozat érkezett. 5 pontos 19, 4 pontos 12, 3 pontos 15, 2 pontos 24, 1 pontos 24. 0 pontot 39 beküldő kapott.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok
ABACUS-szal közös pontverseny
9. osztályosoknak
(879–883.)



K. 879. Nyuszi répát visz a kosarában. Ha útközben találkozik egy másik nyúllal, akkor ad neki egy répát, ha pedig egy rókával találkozik, akkor az elveszi tőle a répái felét.

Összesen négy állattal találkozott útközben (mindegyik állat nyúl vagy róka volt) és ennek során az összes répája elfogyott. Hány répa lehetett a kosarában az első találkozás előtt?

K. 880. Nyolc háromlábú sárkány énekkart alapított. Mint az köztudott, egy háromlábú sárkánynak egy, három, hét vagy kilenc feje van. A háromfejűek minden feje szoprán, a hétfejűek minden feje mezzo, a kilencfejűek minden feje alt szólamban énekel, míg az egyfejűek nem énekelnek, ők csak karvezetők lehetnek. A sárkányoknak összesen kétszer annyi feje volt, mint lába. Hány fej énekelhetette az „Ó, ha rózsabimbó lehetnék” című háromszólamú kórusmű egyes szólamait?

K. 881. Andris, Bori, Csaba, Dóri, Egon, Fanni és Gábor egy táborban találkoztak. Andris Fanni kivételével mindenkit ismert közülük, Borinak három ismerőse volt, Csabának egy, Dórinak pedig feleannyi, mint Egonnak. Fanninak eggyel kevesebb ismerőse volt, mint Gábornak. (Az ismeretségek kölcsönösek.) Kit ismerhetett közülük Fanni a tábor kezdetén?

K/C. 882. Egy $ABCDEFGHIJKL$ szabályos tizenkétszög AC és FH átlójára befelé egy-egy négyzetet írunk. Mutassuk meg, hogy a két négyzetnek van egy közös csúcsa.

K/C. 883. Egy sorozat képzési szabálya a következő: ha a sorozat t eleme páratlan pozitív szám, akkor a következő elem legyen $3t - 9$, ha páros pozitív szám, akkor a következő legyen $2t - 7$. Tegyük fel, hogy a sorozatot két pozitív szám alkotja váltakozva: $a, b, a, b, \dots$ Mi lehet a és b ?



Beküldési határidő: 2026. január 12.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>





A 2024–2025-ös tanév pontversenyeinek iskolánként összesített eredménye

Az alábbiakban azokat az iskolákat gyűjtöttük össze, amelyeknek legalább egy diákját felsoroltuk a 2025/6. számban közölt pontverseny eredményekben. A zárójelekben az értékelt versenyzők száma, pontszámuk összege áll az egyes kategóriákban, illetve a tanáraik neve. A szaktanárok neve úgy szerepel, ahogyan azt a versenyzők a regisztrációkor megadták, ezért előfordulhat, hogy a tanár nem oktatója a versenyző iskolájának. Az esetleges névelírásokért szíves elnézésüket kérjük.

A táblázatokban használt jelölések:

benevezett: benevezettek, akik legalább 1 dolgozatot beküldtek;

értékelt: akiknek neve szerepelt a szeptemberi számban a **2024–2025-ös tanévi pontversenyek eredménylistáiban**.

Matematika

Évfolyam	K, C verseny		A, B verseny		Összesen	
	benevezett	értékelt	benevezett	értékelt	benevezett	értékelt
1–8. oszt.	34	23	19	9	41	29
9. oszt.	292	127	52	19	328	145
10. oszt.	176	83	72	27	215	110
11. oszt.	116	22	112	33	184	53
12. oszt.	77	28	53	25	117	51
Összesen	695	283	308	113	885	388

BÁCS-KISKUN VÁRMEGYE

Baja:

Magyarországi Németek Általános Művelődési Központja Gimnázium 1 versenyző (K, C: 1/155).

Kecskemét:

Kecskeméti Bányai Júlia Gimnázium 2 versenyző (A, B: 2/317; Bogdányné Pigniczki Erzsébet, Reiterné Makra Zsuzsanna),

Kecskeméti Katona József Gimnázium 2 versenyző (K, C: 2/207; Arany Tünde, Csordásné Szécsi Jolán, Reiter István).

BARANYA VÁRMEGYE

Pécs:

Ciszterci Rend Nagy Lajos Gimnáziuma és Kollégiuma 1 versenyző (K, C: 1/282; Baráti Ákos, Gellén Veronika),

Koch Valéria Gimnázium, Általános Iskola, Óvoda, Kollégium és Pedagógiai Intézet 1 versenyző (K, C: 1/152),

PTE Deák Ferenc Gyakorló Gimnázium és Általános Iskola 10 versenyző (K, C: 1/167; A, B: 9/396),
Pécsi Janus Pannonius Gimnázium 1 versenyző (K, C: 1/427),
Pécsi Leőwey Klára Gimnázium 2 versenyző (K, C: 1/196; A, B: 1/123; Kiss Zoltán, Porkoláb Tamás),
Pécsi Tudományegyetem Gyakorló Általános Iskola, Gimnázium és Óvoda Babits Mihály Gimnáziuma 1 versenyző (K, C: 1/198; A, B: 1/42).

BÉKÉS VÁRMEGYE

Gyula:

Erkel Ferenc Gimnázium 1 versenyző (K, C: 1/221; Székely András).

Orosháza:

Táncsics Mihály Gimnázium és Szakközépiskola 1 versenyző (A, B: 1/48; Nagyné Dömötör Márta).

BORSOD-ABAÚJ-ZEMPLÉN VÁRMEGYE

Miskolc:

Földes Ferenc Gimnázium 18 versenyző (K, C: 15/1619; A, B: 3/272; Csendi Balázs, Csetneki Csilla, Grallert Krisztina, Kovács Attila Andrásné, Kovács Attiláné, Kovács Beáta, Nagy Edina, Szabadfalviné Kormányos Anikó, Tóth Tibor),
Miskolci Herman Ottó Gimnázium 38 versenyző (K, C: 38/3191; Buza Attila, Gulyásné Nemes Katalin, Madarász Péter, Pántyáné Kuzder Mária, Pilzné Nagylaki Tünde, Pilzné Nagylaki Tünde Erika, Takács Zoltán, Taricska Dávid).

BUDAPEST

Budapest:

Ady Endre Gimnázium 1 versenyző (K, C: 1/74),
Baár-Madas Református Gimnázium, Általános Iskola és Kollégium 10 versenyző (K, C: 8/926; A, B: 2/121; Csanády Gábor Mátyásné, Rakamazi Richárd),
Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium 5 versenyző (K, C: 3/364; A, B: 2/345; Dobos Sándor, Gyenes Zoltán, Holló Gábor, Molnár-Szabó Vilmos, Surányi László, Szamadóné Békéssy Szilvia, Szermerka Gergely, Tassy Gergely),
Berzsenyi Dániel Gimnázium 6 versenyző (K, C: 5/510; A, B: 1/60; Csernovszky Zoltán, Gál Györgyné, Nemecskó István, Örködi Péterné, Sztranyák Attila),
Budai Ciszterci Szent Imre Gimnázium 1 versenyző (K, C: 1/111; Stirling Anna),
Budai Nagy Antal Gimnázium 1 versenyző (K, C: 1/141; Buglyóné Ludmann Mária, Dani Péter, Nagy Emese, Szász Péter),
Budapest I. Kerületi Toldy Ferenc Gimnázium 1 versenyző (A, B: 1/71),
Budapest II. Kerületi Rákóczi Ferenc Gimnázium 1 versenyző (K, C: 1/156; Csútor Csilla),
Budapest IX. Kerületi Leőwey Klára Gimnázium 2 versenyző (K, C: 2/306),
Budapest V. Kerületi Eötvös József Gimnázium 7 versenyző (K, C: 7/1433; Balogh Andrea, Czírók Adrienn, Horváthné Bujtás Anna, Hujter Bálint, Székely Péter),

Budapest-Fasori Evangélikus Gimnázium 33 versenyző (K, C: 33/1682),
Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 39 versenyző
 (K, C: 6/785; A, B: 36/5250; Ádám Réka, Bereczki Zoltán, Damásdi Gábor,
 Dobos Sándor, Farkas Margit Ilona, Fazakas Tünde, Fejes Tóth Gábor, Gyenes
 Zoltán, Hujter Bálint, Kiss Géza, Kocsis Szilveszter, Lenger Dániel, Nagy
 Kartal, Pereczes Marianna, Pósa Lajos, Rácsamny Anna, Róka Sándor, Simon
 Péter, Somodi Zoltán, Surányi László, Székely Márton, Szepessy Luca, Szoldat-
 ics József, Terpai Tamás, Yakumo Ran),
Corvin Máttyás Gimnázium 1 versenyző (K, C: 1/44),
ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium és Kollégium 4 versenyző
 (K, C: 3/358; A, B: 1/140; Antal Zoltán, Csányi János, Suta Judit, Tóth Attila),
ELTE Trefort Ágoston Gyakorló Gimnázium 2 versenyző (K, C: 2/144; Ujházy
 Márton),
*KMASZC Bercsényi Miklós Élelmiszeripari-Környezetvédelmi Technikum, Szak-
 képző Iskola és Kollégium* 2 versenyző (K, C: 2/188; Almásy Miklós),
Karínthy Frigyes Gimnázium 1 versenyző (A, B: 1/278; Gróf Andrea),
Kempelen Farkas Gimnázium 3 versenyző (K, C: 3/794; Pach-Pluhár Gabriella,
 Romhányi Katalin),
Madách Imre Gimnázium 1 versenyző (K, C: 1/51),
Óbudai Árpád Gimnázium 7 versenyző (K, C: 6/927; A, B: 1/128; Blumenau-
 Szabó Zsuzsanna, Kézér Ildikó, Nemeckóné Szabó Zsuzsanna, Számadó László,
 Sztojcsévné Fekete Mária, Sztojcsévné Fekete Mária),
Szent István Gimnázium 8 versenyző (K, C: 4/338; A, B: 4/488; Bóra Eszter,
 Csepregi-Horváth Zsófia, Dankowsky Anna Zóra, Jeneiné Bicsák Krisztina, Ju-
 hász István, Juhász Péter, Magyar Zsolt, Molnár-Sáska Ildikó, Pósa Lajos,
 Tamás Beáta),
Táncsics Mihály Általános Iskola és Gimnázium 1 versenyző (K, C: 1/166),
Városmajori Gimnázium 23 versenyző (K, C: 23/1884; Pálfiné Kovács Erika, Szabó
 Márton).

CSONGRÁD-CSANÁD VÁRMEGYE

Hódmezővásárhely:

Bethlen Gábor Református Gimnázium és Szathmáry Kollégium 3 versenyző
 (K, C: 3/161; Prikler György).

Szeged:

Déri Miksa Ipari Szakközépiskola 1 versenyző (K, C: 1/226),
Karolina Gimnázium 1 versenyző (K, C: 1/156; Horváth Tamás, Nagy Gábor),
Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium 65 versenyző (K, C: 47/5072;
 A, B: 18/1795; Ábrahám Gábor, Baloghné Cseh Judit, Fronebl Mária, Mike
 János, Schultz János, Szaszko-Bogárné Eckert Bernadett, Tigyi István),
Szegedi Tudományegyetem Báthory István Gyakorló Gimnázium és Általános Iskola
 2 versenyző (K, C: 2/329; Veres Réka, dr. Matos Zoltán).

GYŐR-MOSON-SOPRON VÁRMEGYE

Győr:

Kazinczy Ferenc Gimnázium 1 versenyző (A, B: 1/123; Poóczáné Kecskeméty Szilvia),

Révai Miklós Gimnázium és Kollégium 3 versenyző (K, C: 1/204; A, B: 2/267).

HAJDÚ-BIHAR VÁRMEGYE

Debrecen:

Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma és Általános Iskolája 1 versenyző (K, C: 1/134),

Debreceni Fazekas Mihály Gimnázium 9 versenyző (K, C: 4/824; A, B: 5/581; Balázs Tivadar, Gaál Istvánné, Kovács Péter, Mester Gyula, Pósa Lajos, Remeténé Orvos Viola, Tóth Mariann),

Debreceni Református Kollégium Dóczy Gimnáziuma 5 versenyző (K, C: 5/437),
Péchy Mihály Műszaki Középiskola 1 versenyző (K, C: 1/192; Dr. Pink István, Droftiné Őri Enikő).

HEVES VÁRMEGYE

Eger:

Dobó István Gimnázium 4 versenyző (K, C: 3/422; A, B: 1/193; Bata Zoltán, Bíró Bálint, Pappné Balázs Judit).

JÁSZ-NAGYKUN-SZOLNOK VÁRMEGYE

Jászberény:

Lehel Vezér Gimnázium 1 versenyző (K, C: 1/180; Nagyné Kontra Nóra).

Szolnok:

Versey Ferenc Gimnázium 9 versenyző (K, C: 9/1872; A, B: 1/118; Drávucz Anita, Karakas Zsófia Noémi, Lapu Béla, Pogány Gyula).

KOMÁROM-ESZTERGOM VÁRMEGYE

Esztergom:

Árpád-házi Szent Erzsébet Gimnázium, Óvoda és Általános Iskola 1 versenyző (A, B: 1/9).

NÓGRÁD VÁRMEGYE

Balassagyarmat:

Balassagyarmati Balassi Bálint Gimnázium 1 versenyző (A, B: 1/226; Hegedűs Csaba).

PEST VÁRMEGYE

Biatorbágy:

Biatorbágyi Innovatív Technikum és Gimnázium 1 versenyző (K, C: 1/241).

Cegléd:

Ceglédi Kossuth Lajos Gimnázium 1 versenyző (K, C: 1/82).

Gödöllő:

Gödöllői Török Ignác Gimnázium 4 versenyző (K, C: 2/265; A, B: 2/305; Budai Tünde, Thuróczy Erzsébet, Varga Csaba).

SOMOGY VÁRMEGYE**Kaposvár:**

Kaposvári Táncsics Mihály Gimnázium 1 versenyző (A, B: 1/53; Szigeti Tamás, Trembeczki Csaba).

SZABOLCS-SZATMÁR-BEREG VÁRMEGYE**Kisvárdai:**

Kisvárdai Bessenyei György Gimnázium és Kollégium 1 versenyző (A, B: 1/97; Makláriné Gubik Anna).

Nyíregyháza:

Szent Imre Katolikus Gimnázium, Két Tanítási Nyelvű Általános Iskola, Kollégium, Óvoda és AMI 1 versenyző (K, C: 1/189; Kallós Béla, Királyné Varga Krisztina).

VAS VÁRMEGYE**Szombathely:**

ELTE Bolyai János Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 1 versenyző (K, C: 1/191; Fekete Márta).

VESZPRÉM VÁRMEGYE**Pápa:**

Türr István Gimnázium és Kollégium 1 versenyző (A, B: 1/167).

Veszprém:

Lovassy László Gimnázium 2 versenyző (A, B: 2/164; Márffy Katalin, dr. Kántorné Kovács Csilla).

ZALA VÁRMEGYE**Zalaegerszeg:**

Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimnázium 5 versenyző (K, C: 5/302; Benke Barbara, Kiss Zsolt, Schneider János).

HATÁRON TÚLRÓL

BELGIUM

Brüsszel:

Brussels European School I (Uccle) 3 versenyző (K, C: 3/597; Csonka Dorottya).

KÍNA

Szencsen:

Shenzhen Middle School 1 versenyző (A, B: 1/96; Wei Wu).

Vuhan:

Qi Yi Middle School 1 versenyző (A, B: 1/84).

NÉMETORSZÁG

Neufahrn bei Freising:

Oscar Maria Graf Gymnasium 1 versenyző (K, C: 1/291).

Wuppertal:

Carl-Fuhlrott-Gymnasium 1 versenyző (K, C: 1/110).

ROMÁNIA

CsíkSZereda:

Márton Áron Líceum 3 versenyző (A, B: 3/557; Csapó Hajnalka, Pál Olga).

Érsekújvár:

Jedlik Ányos Elektrotechnikai Szakközépiskola 1 versenyző (K, C: 1/189).

Kolozsvár:

Transylvania College 1 versenyző (A, B: 1/234; Brătfălean-Igna Iulia, Simion Radu).

Székelyudvarhely:

Tamási Áron Gimnázium 1 versenyző (K, C: 1/162; A, B: 1/209).

Temesvár:

Bartók Béla Elméleti Líceum 1 versenyző (A, B: 1/184; Păcurar Mária).

SZLOVÁKIA

Fülek:

Füleki Gimnázium 1 versenyző (K, C: 1/195; A, B: 1/87; Molnár László).

Galánta:

Kodály Zoltán Gimnázium 1 versenyző (K, C: 1/76).

Révkomárom:

Selye János Gimnázium 6 versenyző (K, C: 6/1993; Édes Erzsébet).

Somorja:

Madách Imre Gimnázium 1 versenyző (K, C: 1/60; Mészáros Csilla).

VIETNÁM

Ha Tinh City:

1 versenyző (A, B: 1/109; Huu Dinh Tran).

Informatika

Évfolyam	I verseny	
	benevezett	értékelt
1–8. oszt.	1	1
9. oszt.	11	4
10. oszt.	24	6
11. oszt.	34	11
12. oszt.	8	6
Összesen	78	28

BÁCS-KISKUN VÁRMEGYE

Kecskemét:

Kecskeméti Bányai Júlia Gimnázium 1 versenyző (I: 1/338; I: 1/338),

Kecskeméti Bolyai János Gimnázium 1 versenyző (I: 1/161; I: 1/161; Kutas Tibor).

BARANYA VÁRMEGYE

Pécs:

Pécsi Janus Pannonius Gimnázium 1 versenyző (I: 1/153; I: 1/153; Gyöngyiné Mester Henriette).

BUDAPEST

Budapest:

Balassi Bálint Nyolcévfolyamos Gimnázium 1 versenyző (I: 1/216; I: 1/216),

Budapest I. Kerületi Toldy Ferenc Gimnázium 1 versenyző (I: 1/58; I: 1/58),

Budapest V. Kerületi Eötvös József Gimnázium 1 versenyző (I: 1/236; I: 1/236),

Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 3 versenyző (I: 3/848; I: 3/848; Nikházy László, Pásztor Attila, Sásdi Mariann, Szoldatics József),

Madách Imre Gimnázium 1 versenyző (I: 1/80; I: 1/80; Benis Erzsébet),

Sztehlo Gábor Evangélikus Óvoda, Általános Iskola és Gimnázium 10 versenyző (I: 10/729; I: 10/729).

GYŐR-MOSON-SOPRON VÁRMEGYE

Pannonhalma:

Pannonhalmi Bencés Gimnázium, Egyházzenei Szakközépiskola és Kollégium 1 versenyző (I: 1/95; I: 1/95; Bella Gábor).

HAJDÚ-BIHAR VÁRMEGYE

Debrecen:

Debreceni Fazekas Mihály Gimnázium 1 versenyző (I: 1/140; I: 1/140; Simon Gyula).

HEVES VÁRMEGYE

Eger:

Dobó István Gimnázium 1 versenyző (I: 1/100; I: 1/100; Fazekasné Vincze Henrietta),

Neumann János Gimnázium, Technikum és Kollégium 1 versenyző (I: 1/341; I: 1/341).

JÁSZ-NAGYKUN-SZOLNOK VÁRMEGYE

Szolnok:

Varga Katalin Gimnázium 1 versenyző (I: 1/70; I: 1/70; Deákné Longauer Adél).

PEST VÁRMEGYE

Gödöllő:

Gödöllői Török Ignác Gimnázium 1 versenyző (I: 1/127; I: 1/127; Markó Dániel).

HATÁRON TÚLRÓL

NÉMETORSZÁG

Waldkirchen:

Johannes Gutenberg Gymnasium Waldkirchen 1 versenyző (I: 1/49; I: 1/49).

ROMÁNIA

Székelyudvarhely:

Tamási Áron Gimnázium 1 versenyző (I: 1/178; I: 1/178).

Fizika

Évfolyam	P, G verseny benevezett értékelt		M verseny benevezett értékelt		Összesen benevezett értékelt	
1–8. oszt.	4	1	0	0	4	1
9. oszt.	65	35	6	1	69	35
10. oszt.	58	38	9	8	61	44
11. oszt.	67	47	7	5	74	52
12. oszt.	36	16	3	2	36	16
Összesen	230	137	25	16	244	148

BÁCS-KISKUN VÁRMEGYE

Kecskemét:

Kecskeméti Bányai Júlia Gimnázium 2 versenyző (P, G: 2/277; Bakk János, Szittyai István),
Kecskeméti Katona József Gimnázium 12 versenyző (P, G: 12/845; Arany Tünde, Szalai Péter).

BARANYA VÁRMEGYE

Pécs:

Pécsi Leőwey Klára Gimnázium 5 versenyző (P, G: 4/373; M: 1/52; Almási László, Hegedüs János, Simon Péter).

BORSOD-ABAÚJ-ZEMPLÉN VÁRMEGYE

Miskolc:

Földes Ferenc Gimnázium 4 versenyző (P, G: 4/134; Bíró István, Pál Mihály),
Miskolci Herman Ottó Gimnázium 1 versenyző (P, G: 1/166; Dudás Imre, Pántyáné Kuzder Mária, Pilzné Nagylaki Tünde, Veres Pálné).

BUDAPEST

Budapest:

Baár-Madas Református Gimnázium, Általános Iskola és Kollégium 1 versenyző (P, G: 1/60),
Balassi Bálint Nyolcévfolyamos Gimnázium 1 versenyző (P, G: 1/110; Jakab Hilda),
Berzsenyi Dániel Gimnázium 2 versenyző (P, G: 1/80; M: 1/35; Baranyai Klára, Barkóczi Gergely),
Budai Ciszterci Szent Imre Gimnázium 1 versenyző (P, G: 1/62; Stirling Anna),
Budapest IX. Kerületi Leőwey Klára Gimnázium 1 versenyző (P, G: 1/148; Barabás Péter, Kriska Ádám),
Budapest V. Kerületi Eötvös József Gimnázium 4 versenyző (P, G: 4/310; Fekete Zsolt, Gyertyán Attila, Varga Balázs),
Budapest-Fasori Evangélikus Gimnázium 1 versenyző (P, G: 1/143; Izsa Éva),
Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 7 versenyző (P, G: 7/816; Nagy Piroska Mária, Schramek Anikó),
ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium és Kollégium 18 versenyző (P, G: 15/981; M: 5/148; Gyertyán Attila, Szentivánszki Soma, Zsigri Ferenc),
Karinty Frigyes Gimnázium 1 versenyző (P, G: 1/92),
Kempelen Farkas Gimnázium 1 versenyző (P, G: 1/88; Dezamicsné Babich Gertrúd),
Óbudai Árpád Gimnázium 1 versenyző (P, G: 1/77; Tarr Levente),
Piarista Gimnázium 2 versenyző (P, G: 2/181; Chikán Éva),
Városmajori Gimnázium 5 versenyző (P, G: 5/212; Ábrám László).

CSONGRÁD-CSANÁD VÁRMEGYE

Hódmezővásárhely:

Bethlen Gábor Református Gimnázium és Szathmáry Kollégium 21 versenyző (P, G: 21/921; M: 3/46; Berecz János, Kovács Eszter).

Szeged:

Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium 9 versenyző (P, G: 9/600; Csányi Sándor, Gutai Árpád Tamás, Mike Péter),

Szegedi Tudományegyetem Báthory István Gyakorló Gimnázium és Általános Iskola 8 versenyző (P, G: 5/489; M: 3/93; Csiszár Imre, Nagy Tibor).

HAJDÚ-BIHAR VÁRMEGYE

Debrecen:

Debreceni Ady Endre Gimnázium 1 versenyző (P, G: 1/111),

Debreceni Református Kollégium Dóczy Gimnáziuma 12 versenyző (P, G: 12/302).

HEVES VÁRMEGYE

Eger:

Dobó István Gimnázium 4 versenyző (P, G: 4/355; Berkes-Sinka Márta, Pecsénye Pál).

JÁSZ-NAGYKUN-SZOLNOK VÁRMEGYE

Szolnok:

Verseyhy Ferenc Gimnázium 1 versenyző (P, G: 1/128).

NÓGRÁD VÁRMEGYE

Balassagyarmat:

Balassagyarmati Balassi Bálint Gimnázium 3 versenyző (M: 3/29).

PEST VÁRMEGYE

Cegléd:

Ceglédi Kossuth Lajos Gimnázium 1 versenyző (P, G: 1/129).

Gödöllő:

Gödöllői Török Ignác Gimnázium 1 versenyző (P, G: 1/88).

SOMOGY VÁRMEGYE

Kaposvár:

Kaposvári Táncsics Mihály Gimnázium 1 versenyző (P, G: 1/92; Hunka Gáborné).

TOLNA VÁRMEGYE

Szekszárd:

Szekszárdi Garay János Gimnázium 1 versenyző (P, G: 1/95; Elblinger Ferenc).

VAS VÁRMEGYE

Szombathely:

ELTE Bolyai János Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 1 versenyző (P, G: 1/91; Pájer Szabolcs).

ZALA VÁRMEGYE

Zalaegerszeg:

Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimnázium 4 versenyző (P, G: 4/201; Bóbics Lilla, Kovács Tibor).

HATÁRON TÚLRÓL

AMERIKAI EGYESÜLT ÁLLAMOK

South Bend:

Career Academy South Bend Public Charter School 1 versenyző (P, G: 1/163).

NÉMETORSZÁG

Neufahrn bei Freising:

Oscar Maria Graf Gymnasium 1 versenyző (P, G: 1/59).

Waldkirchen:

Johannes Gutenberg Gymnasium Waldkirchen 1 versenyző (P, G: 1/20).

ROMÁNIA

Székelyudvarhely:

Tamási Áron Gimnázium 3 versenyző (P, G: 3/247; Székely Zoltán).

SZLOVÁKIA

Révkomárom:

Selye János Gimnázium 4 versenyző (P, G: 4/317; Hevesi Anikó).

A Középiskolai Matematika és Fizikai Lapok 75. évfolyamának tartalomjegyzéke (2025)

Közlemények:

Felhívás a 2025. évi Ankétra	322
Tájékoztató a folyóirat előfizetéséről ...	328
Kiosztották az idei Ericsson-díjakat	534

Versenyek, beszámolók:

Versenykiírás a KöMaL 2025–2026. évi pontversenyeire	329
A 2024–2025-es tanévi pontversenyek végeredménye	351
A 2024–2025-ös tanév pontversenyeinek iskolánként összesített eredménye ...	560
A Középiskolai Matematika és Fizikai Lapok 75. évfolyamának tartalomjegyzéke (2025)	571

Helyesbítés:

20, 58, 488

MATEMATIKA

Közlemények:

Rátz Tanár Úr Életműdíj 2024	21
Gács András díj, 2025	267
Gratulálunk Oláh Verának, lapunk korábbi főszerkesztőjének!	286
Olimpiai előkészítő szakkörök a 2025/26. tanévben	327
EGMO 2025/2026 felhívás	328
Pálffy Péter Pál: 75 éves a Matematikai Kutatóintézet	530

Versenyek, beszámolók:

<i>Birkás György</i> : Beszámoló a 2024-es Ördöglakat Találkozóról	6
Jelentés a 2024. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyről	66
A 2024. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatainak megoldásai	68

<i>Barbarics Márta</i> : Matek az utcán, 2025	199
Beszámoló a 2025. évi EGMO versenyről	268
<i>Harangi Viktor</i> : Beszámoló a 66. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról	323
A 66. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldása I. . .	402
A 66. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldása II. .	466
Beszámoló a 2025-ös nyári dombóvár-gunarasi táborról	472
<i>Birkás György</i> : Beszélgetés Obádovics Gyulával	273

Cikkek:

<i>Vígh Viktor</i> : Rejtvények, ördöglakatok – Szimmetriakeresők	2
<i>Bozóki Sándor, Gál Péter</i> : Rejtvények, ördöglakatok – 44 szimmetriakereső feladvány LEGO-ból	72
<i>Freud Róbert</i> : Újabb bonyolult összegek és szorzatok, 1. rész	130
<i>Vígh Viktor</i> : Rejtvények, ördöglakatok – Angol szoliter	131
<i>Paulovics Zoltán</i> : Sherlock Holmes: A K. 819. esete	133
<i>Freud Róbert</i> : Újabb bonyolult összegek és szorzatok, 2. rész	194
<i>Mágori Marcell, Vígh Viktor</i> : Egy Rubik-kocka variánsról I.	205
<i>Freud Róbert</i> : Újabb bonyolult összegek és szorzatok, 3. rész	258
<i>Mágori Marcell, Vígh Viktor</i> : Egy Rubik-kocka variánsról II.	262
<i>Vígh Viktor</i> : Rejtvények, ördöglakatok – Emelt szintű bújócska I.	340
<i>Hujter Bálint</i> : Tait tétele és a 3-reguláris gráfok – a B. 5403. feladat háttere ..	346
<i>Gál Péter</i> : Rejtvények, ördöglakatok – Szoliterek megoldása	408
<i>Bozóki Sándor</i> : Rejtvények, ördöglakatok – A Hanoi tornyai feladvány gráfja	475

Kincsek a KöMaL múltjából	492
<i>Hujter Bálint</i> : Tait tételének bizonyítása	535
<i>Vígh Viktor</i> : Rejtvények, ördöglakatok – Emelt szintű bújócska II.....	541

Emelt szintű matematikai érettségi gyakorló feladatsorok és megoldásvázlatok:

<i>Orosz Gyula</i> : Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire	7
<i>Tatár Zsuzsanna Mária</i> : Megoldásvázlatok a 2024./9. szám matematika gyakorló feladatsorához	11
<i>Trembeczki Csaba</i> : Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire	74
<i>Orosz Gyula</i> : Megoldásvázlatok a 2025./1. szám matematika gyakorló feladatsorához	78
<i>Horváth Eszter</i> : Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire	137
<i>Trembeczki Csaba</i> : Megoldásvázlatok a 2025./2. szám matematika gyakorló feladatsorához	141
<i>Fonyóné Németh Ildikó, Fonyó Lajos</i> : Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire	209
<i>Horváth Eszter</i> : Megoldásvázlatok a 2025./3. szám matematika gyakorló feladatsorához	211
<i>Fonyóné Németh Ildikó, Fonyó Lajos</i> : Megoldásvázlatok a 2025./4. szám matematika gyakorló feladatsorához	279
<i>Bíró Bálint</i> : Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire	342
<i>Németh László</i> : Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire	412
<i>Bíró Bálint</i> : Megoldásvázlatok a 2025./6. szám matematika gyakorló feladatsorához	414
<i>Kozma Katalin Abigél</i> : Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire.....	478
<i>Németh László</i> : Megoldásvázlatok a 2025./7. szám matematika gyakorló feladatsorához	479
<i>Az ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium matematika munkakö-</i>	

<i>zösszege</i> : Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire	543
---	-----

<i>Kozma Katalin Abigél</i> : Megoldásvázlatok a 2025./8. szám matematika gyakorló feladatsorához	546
---	-----

Megoldások:

C gyakorlatok megoldásai:

1822.....	22	1833.....	428
1837.....	151	1847., 1853.,	
1842.....	285	1855.....	553

B feladatok megoldásai:

5394., 5399.,		5413.....	153
5402.....	24	5403.....	345
5404.....	89	5440.. 5459.	488

Kitűzések:

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok:

839–843.....	32	864–868.....	369
844–848.....	93	869–873.....	430
849–853.....	157	874–878.....	497
854–858.....	222	879–883.....	559
859–863.....	287		

A K/C pontversenyben kitűzött gyakorlatok:

842–843.....	33	867–868.....	370
847–848.....	94	872–873.....	431
852–853.....	158	877–878.....	497
857–858.....	224	882–883.....	577
862–863.....	288		

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok:

1838–1842.	33	1863–1867.	370
1843–1847.	94	1868–1872.	431
1848–1852.	158	1873–1877.	497
1853–1857.	224	1878–1882.	577
1858–1862.	288		

A B pontversenyben kitűzött feladatok:	896–898..... 35	911–913..... 372
5430–5437..... 34	5470–5477..... 371	899–901..... 96
5438–5445..... 95	5478–5485..... 432	914–916..... 434
5446–5453..... 159	5486–6593..... 499	902–905..... 161
5454–5461..... 225	5494–5501..... 578	917–919..... 500
5462–5469..... 289		905–907..... 226
		920–922..... 579
		908–910..... 290

Angol nyelvű kivonatok:

Problems in Mathematics: 62, 125, 189,
253, 317, 397, 461, 525, 606

Az A pontversenyben kitűzött feladatok:

INFORMATIKA

Az I pontversenyben kitűzött feladatok:	663–666..... 291	675–678..... 501
647–650..... 36	655–658..... 162	667–670..... 373
651–654..... 97	659–662..... 227	671–674..... 435
		679–682..... 580

FIZIKA

Közlemények:

Felhívás a Forráspont Fizikátáborra ..	313
Versenyfelhívás	397
Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenye.	
Versenyfelhívás és beszámoló.....	444

Versenye, beszámoló:

<i>Széchenyi Gábor, Vankó Péter, Vigh Máté, Vladár Károly:</i> Beszámoló a 2024. évi Eötvös-versenyről	41
<i>Szász Krisztián, Vankó Péter</i> Beszámoló a 9. Európai Fizikai Diákolimpiáról.....	377
<i>Kurucz Márta, Varga Vázsony:</i> Indulj az Athletica Galactica versenyén, hogy kijuthass a Nemzetközi Csillagászati és Asztrofizikai Diákolimpiára!	384
<i>Sarkadi Tamás, Széchenyi Gábor, Tasnádi Tamás:</i> Két ezüst- és két bronz-érem az 55. Nemzetközi Fizikai Diákolimpián	441

Cikkek:

<i>Varga Vázsony, Veres Gábor, Vankó Péter:</i> A Föld sugarának mérése egy tájképről.....	105
<i>Wojnarovich Ferenc:</i> Egy egyszerű egyenletmegoldó eljárás	505

Megoldások:

A mérési feladatok megoldása:

433.	111	438.	386
436.	169	439.	446
437.	233	441., 442.	509

A fizika gyakorlatok megoldása:

866.	113	878.	388
867., 868.	234	881., 888.	448
873., 874., 876.,		891.	513
879., 880.	297	893., 896.	585

A fizika feladatok megoldása:

5575., 5589.....	55
5591., 5592., 5595., 5597.....	115

5604, 5615.	175
5599., 5600., 5607., 5611., 5612., 5618.	238
5610., 5616., 5619., 5626., 5631.	303
5622., 5624., 5627.	389
5632., 5652., 5659.	452
5635., 5636., 5639., 5645.	515
5634., 5640., 5644., 5646., 5651., 5664.,	
5667., 5669.	588

Kitűzések:

Kitűzött mérési feladatok:

437.	59	442.	393
438.	123	443.	458
439.	186	444.	521
440.	250	445.	603
441.	313		

Kitűzött gyakorlatok:

873–876.	59	893–896.	393
877–880.	123	897–900.	458
881–884.	186	901–904.	521
885–888.	250	905–908.	603
889–892.	313		

Kitűzött elméleti feladatok:

5616–5624.	59	5661–5669.	393
5625–5633.	123	5670–5678.	458
5634–5642.	186	5679–5687.	521
5643–5651.	250	5688–5696.	603
5652–5660.	313		

Angol nyelvű kivonatok:

Problems in Physics 63, 127, 191, 255, 319, 399, 463, 527, 607

A pontversenyben megoldott és kitűzött matematika és fizika példák csoportosítása tárgykörök szerint

A példák száma mögött zárójelben az oldalszám olvasható, ha két szám fordul elő, az első a kitűzés, a második a megoldás helyét jelöli. A matematika feladatok felsorolásának sorrendje: A jelű nehezebb feladatok, B feladatok, C gyakorlatok, K gyakorlatok, K/C gyakorlatok. A fizika feladatok felsorolásának sorrendje: M mérési feladatok, G gyakorlatok, P feladatok.

MATEMATIKA

Aritmetika, algebra (műveletek számokkal, kifejezésekkel, azonosságok):

A. 903 (161); 914 (434); 917 (500); 921 (579); – B. 5430 (34); 5438 (95); 5464 (289); 5471 (371); 5479 (432); 5482 (433); 5487 (499); – C. 1837 (151); 1845 (94); 1863 (370); 1868 (431); – K. 840 (32); 850 (157); 854 (222); 859 (287); 865 (369); 874 (497); 876 (497); 879 (559); 880 (559); – K/C. 862 (287); 868 (369); 872 (431).

Számelméleti feladatok (egész számok, prím-számok, oszthatóság, számrendszerek):

– A. 903 (161); 904 (161); 909 (290); 916 (434); – B. 5399 (27); 5434 (34); 5436 (35); 5443 (95); 5445 (96); 5449

(160); 5450 (160); 5461 (226); 5464 (289); 5467 (290); 5481 (433); 5485 (433); 5490 (499); 5491 (499); 5496 (578); – C. 1822 (22); 1833 (428); 1838 (33); 1843 (94); 1846 (94); 1857 (225); 1860 (288); 1878 (577); – K. 841 (32); 845 (93); 850 (157); 852 (157); 871 (430); – K/C. 847 (93); 862 (287); 868 (369); 877 (497); 878 (497).

Halmazok (ponthalmazok is):

C. 1875 (498); – K/C. 842 (32); 847 (93); 872 (431).

Valószínűség, kombinatorika, statisztika (ki-választás, leszámolás, binomiális együtt-hatók):

A. 896 (35); 904 (161); 908 (290); 913 (372); 922 (579); B. 5430 (34); 5438 (95); 5442 (95); 5454 (225); 5462 (289); 5470 (371); 5476 (371); 5482 (433); 5498

(578); 5499 (578); – C. 1846 (94); 1853 (224, 556); 1867 (370); 1876 (498); 1853 (556); – K. 839 (32); 841 (32); 861 (287); 869 (430); 879 (559); – K/C. 873 (431); 877 (497).

Logikai kérdések (játékok, színezések, táblázatok, sakktábla):

A. 908 (290); 914 (434); 918 (500); 922 (579); – B. 5448 (159); 5462 (289); 5483 (433); 5488 (499); 5492 (500); 5494 (578); – C. 1838 (33); 1844 (94); 1858 (288); 1870 (432); 1872 (432); 1875 (498); K. 819 (133); 844 (93); 845 (93); 849 (157); 856 (223); 864 (369).

Egyenletek (arányosság, százalék):

C. 1845 (94); 1868 (431).

Speciális egyenletek (egész rész, tört rész, exponenciális, logaritmikus):

C. 1842 (33, 285); 1880 (577).

Egyenletrendszerek:

C. 1833 (428); 1840 (33); 1852 (159); 1857 (225); 1873 (497); – K. 866 (369).

Egyenlőtlenségek, becslések (geometriai is):

A. 917 (500); 921 (579); – B. 5430 (34); 5435 (34); 5441 (95); 5446 (159); 5447 (159); 5456 (225); 5466 (289); 5468 (290); 5498 (578); 5500 (578); – C. 1837 (151); 1850 (158); – K/C. 857 (223).

Függvények (szélsőérték, határérték, függvényvizsgálat):

A. 916 (434); 921 (579); – B. 5432 (34); 5459 (226, 490); 5473 (371); 5500 (578);

Polinomok:

A. 898 (36); 904 (161); B. 5432 (34); 5434 (34); 5491 (499); C. 1872 (432).

Sorozatok:

B. 5443 (95); 5445 (96); 5469 (290); 5485 (433); 5487 (499); – K/C. 883 (559); – C. 1848 (158); 1860 (288).

Gráfok:

A. 918 (500); – B. 5403 (345); 5454 (225); 5483 (433); – C. 1844 (94); 1855 (224, 556); 1865 (370); 1870 (432); – K. 881 (559).

Síkmértani bizonyítások:

A. 897 (35); 902 (161); 910 (290); 912 (372); 915 (434); 919 (501); 920 (579); – B. 5394 (24); 5402 (29); 5404 (89); 5413

(153); 5431 (34); 5435 (34); 5437 (35); 5439 (95); 5440 (95, 488); 5444 (95); 5451 (160); 5452 (160); 5455 (225); 5457 (225); 5458 (226); 5460 (226); 5465 (289); 5472 (371); 5477 (372); 5478 (432); 5480 (433); 5484 (433); 5486 (499); 5489 (499); 5495 (578); 5497 (578); 5501 (579); – C. 1822 (22); 1839 (33); 1847 (94, 553); 1849 (158); 1851 (159); 1854 (224); 1859 (288); 1874 (498); 1877 (498); 1882 (577); – K. 860 (287); K/C. 848 (93); 863 (287); 882 (559).

Síkmértani szerkesztések:

B. 5463 (289); – C. 1839 (33); 1866 (370); 1874 (498); – K. 875 (497).

Síkmértani számítások:

A. 910 (290); 911 (372); B. 5402 (29); 5446 (159); 5451 (160); 5452 (160); 5455 (225); 5457 (225); 5475 (371); 5489 (499); 5495 (578); – C. 1841 (33); 1847 (94, 553); 1849 (158); 1851 (159); 1864 (370); 1869 (431); 1879 (577); – K. 855 (223); 860 (287); – K/C. 843 (32); 848 (93); 858 (223); 863 (287); 867 (369).

Kombinatorikus geometria, síkidomok darabolása, sík lefedése:

A. 919 (501); – B. 5474 (371); 5488 (499); – C. 1855 (224, 556); 1881 (577); – K. 846 (93); 851 (157); 870 (430).

Mértani helyek:

B. 5493 (500).

Koordinátagéometria:

B. 5433 (34); 5452 (160); 5493 (500); C. 1837 (151); 1871 (432).

Trigonometria, goniometria:

B. 5441 (95); – C. 1841 (33); 1856 (225).

Térmértani bizonyítások:

B. 5433 (34); 5453 (160); 5457 (225); – C. 1861 (288).

Térmértani számítások (térelemek távolsága, szöge, felszín, térfogat):

B. 5453 (160); – C. 1861 (288); – K. 853 (158).

Kinematika:

G. 873 (59, 297); 874 (59, 299); 877 (123); 881 (186, 448); 893 (393, 585); 901 (521); 902 (521); 905 (603); – M. 433 (111); 437 (59, 233); 440 (250); – P. 5589 (57); 5607 (242); 5616 (60, 304); 5619 (60, 306); 5625 (124); 5626 (124, 309); 5643 (251); 5652 (314, 453); 5653 (314); 5670 (459); 5688 (604).

Pontmechanika:

G. 878 (123, 388); 882 (187); 888 (251, 449); 889 (313); 897 (458); 899 (459); – M. 436 (169); – P. 5599 (238); 5610 (303); 5617 (60); 5618 (60, 246); 5622 (61, 389); 5627 (124, 391); 5629 (124); 5634 (187, 588); 5636 (188, 516); 5642 (189); 5599 (238); 5643 (251); 5644 (252, 592); 5645 (252, 518); 5646 (252, 594); 5660 (316); 5661 (394); 5662 (394); 5671 (459); 5672 (459); 5673 (460); 5678 (461); 5679 (522); 5680 (522); 5681 (522); 5687 (524); 5689 (604); 5690 (604); 5696 (605).

Merev testek mechanikája:

G. 875 (59); 894 (393); 898 (458); 903 (521); 907 (603); – M. 444 (521); – P. 5591 (115); 5600 (240); 5611 (243); 5624 (61, 390); 5628 (124); 5635 (188, 515); 5643 (251); 5654 (315); 5663 (394); 5664 (395, 597); 5669 (396, 601); 5691 (604).

Kötelek, láncok, granulált anyagok mechanikája:

M. 445 (603); – P. 5592 (117); 5671 (459).

Rugalmasságtan:

M. 436 (169); – P. 5654 (315).

Hangtan:

P. 5655 (315).

Folyadékok és gázok mechanikája:

G. 866 (113); 895 (393); 906 (603); – P. 5664 (395, 597); 5682 (523).

Fénytan:

G. 880 (123, 301); 884 (187); 885 (250); 892 (314); – M. 443 (458); – P. 5595 (118); 5621 (61); 5633 (125); 5640 (188, 591); 5649 (253); 5658 (315); 5667 (395, 599); 5685 (524); 5694 (605).

Hőtan:

G. 867 (234); 879 (123, 300); 887 (250); 904 (522); 908 (603); – M. 441 (313, 509); – P. 5612 (245); 5620 (61); 5630 (124); 5637 (188); 5647 (252); 5657 (315); 5665 (395); 5673 (460); 5674 (460); 5692 (604).

Csillagászat, asztrofizika:

G. 890 (314); – P. 5597 (120); 5610 (303); 5619 (60, 306); 5623 (61); 5629 (124); 5636 (188, 516); 5642 (189); 5646 (252, 594); 5672 (459); 5689 (604).

Statisztikus fizika:

P. 5650 (253).

Elektrosztatika:

G. 886 (250); 890 (314); – P. 5575 (55); 5622 (61, 389); 5631 (124, 311); 5632 (125, 452); 5638 (188); 5651 (253, 596); 5666 (395); 5675 (460).

Magnetosztatika:

– P. 5696 (605).

Egyenáramú hálózatok:

G. 868 (236); 876 (59, 300); 883 (187); 891 (314, 513); 896 (394, 586); 899 (459); 900 (459); 904 (522); – M. 439 (186, 446); – P. 5604 (175); 5648 (252); 5656 (315); 5676 (460); 5677 (461); 5683 (523); 5684 (523); 5693 (604).

Váltóáramú hálózatok:

P. 5615 (178); 5639 (188, 517).

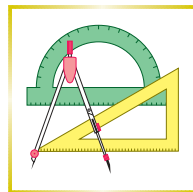
Atomfizika és magfizika:

P. 5641 (189); 5659 (316, 455); 5668 (396); 5677 (461); 5695 (605).

Egyéb:

M. 437 (59, 233); 438 (123, 386); 442 (393, 511); – G. 5623 (61); 5633 (125); 5686 (524).

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (882–883., 1878–1882.)



Feladatok 10. évfolyamig

K/C. 882. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

K/C. 883. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

Feladatok mindenkinek

C. 1878. Hány olyan tízes számrendszerbeli négyjegyű pozitív egész szám van, amelyben legfeljebb az egyik számjegy osztható 3-mal, a számjegyek összege 15, a számjegyek 3-as maradékainak összege pedig 6?

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

C. 1879. Adott az asztalon egy konvex n -szög, amelynek minden oldala 2 egység hosszúságú. A sokszög minden csúcsába egy egységsugarú korongot helyezünk úgy, hogy a szomszédos korongok érintsék egymást. Az így létrejött alakzaton kívülről végiggörgetünk egy ezektől különböző egységsugarú korongot úgy, hogy az a végén a kiindulási helyére kerüljön. Határozzuk meg n függvényében, hogy összesen mekkora szöggel fordul el ez a korong a végiggörgetés során.

német versenyfeladat

C. 1880. Oldjuk meg a természetes számok halmazán az $(x+1)! = x^3 - x$ egyenletet.

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1881. Adott egy $n \times n$ -es sakktábla, melyet szeretnénk lefedni átfedésmentesen 3 négyzetből álló L betűkkel úgy, hogy legfeljebb egy mező maradjon üresen. Mutassuk meg, hogy ez tetszőleges $n \neq 3$ pozitív természetes számra megtehető. (Az L betűk minden oldala rácsvonalra kell, hogy essen.)

Javasolta: *Czett Mátyás* (Zalaegerszeg)

C. 1882. Legyen $ABCD$ konvex négyszög, az ABD háromszög beírt körének középpontját jelölje I . Mutassuk meg, hogy ha $CB = CD = CI$, akkor $ABCD$ húrnégyszög.

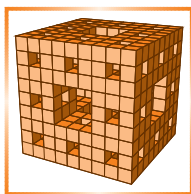
Javasolta: *Vígh Viktor* (Sándorfalva)



Beküldési határidő: 2026. január 12.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>





A B pontversenyben kitűzött feladatok (5494–5501.)

B. 5494. Anna és Béla a következő játékot játsszák egy 2×2026 -os táblán. Felváltva helyeznek le dominókat a táblára, egészen addig, amíg már nem lehet új dominót elhelyezni. Ha ekkor a tábla teljesen le van fedve, akkor Anna nyer, különben Béla. Kinek van nyerő stratégiája, ha Anna kezd? (Egy dominó két élszomszédos mezőt fed le. A dominók nem lóghatnak le a tábláról és nem fedhetik egymást.)

(3 pont)

Javasolta: *Lovas Márton* (Budakalász)

B. 5495. Egy derékszögű háromszög befogói a és b , átfogója c , beírt körének sugara r . Mutassuk meg, hogy

$$2r^2 = (c - a)(c - b).$$

(3 pont)

Javasolta: *Kiss Géza* (Csömör)

B. 5496. Jelöljük $p(r)$ -rel egy r pozitív egész szám pozitív osztóinak a szorzatát. Adott n pozitív egész szám esetén határozzuk meg azokat a k pozitív egész számokat, amelyekre $p(k^n)$ egy egész szám n -edik hatványa.

(4 pont)

Javasolta: *Horváth Áron* (Nemesböd)

B. 5497. Adott egy AB végpontú k körív, a felezőpontja F . Egy kör a P pontban belülről érinti k -t, és a Q pontban érinti az AB szakaszt. Mutassuk meg, hogy az APQ és BPQ körök sugarainak összege egyenlő az AF szakasz hosszával.

(4 pont)

Javasolta: *Németh László* (Fonyód)

B. 5498. Legyen $n \geq 2$ egy adott pozitív egész. Az $1, 2, \dots, n$ számok mely $a_1, a_2, \dots, a_n$ permutációjára lesz

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n$$

maximális?

(5 pont)

Javasolta: *Lovas Márton* (Budakalász)

B. 5499. Egy szabályos 45-szög minden csúcsát kiszíneztük a piros, sárga és zöld színek valamelyikével; mindegyik színnel 15 csúcsot. Egy háromszög piros (sárga, zöld), ha mindhárom csúcsa piros (sárga, zöld). Bizonyítsuk be, hogy van három egybevágó háromszög, amelyek közül az egyik piros, a másik sárga, a harmadik zöld.

(6 pont)

Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

B. 5500. Határozzuk meg $|a| + |b| + |c| + |d| + |e|$ legkisebb lehetséges értékét, ha az $x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + 1 = 0$ egyenletnek van valós gyöke.

(5 pont)

Javasolta: *Somogyi Ákos* (London)

B. 5501. Az ABC háromszög beírt köre a BC , CA , AB oldalakat rendre a D , E , F pontokban érinti, az F ponttal átellenes pont a beírt körön G . A GD és GE egyenesek az AB egyenest a D' , illetve E' pontokban metszik. Mutassuk meg, hogy az AED' és BDE' körök a beírt körön metszik egymást.

(6 pont)

Javasolta: Jármai Roland (Budapest)

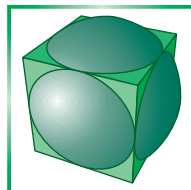


Beküldési határidő: 2026. január 12.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (920–922.)



A. 920. Adott egy nem egyenlő szárú ABC háromszög, melynek körülírt körét jelöljük Ω -val. Legyen ω_A az A csúshoz tartozó *mixtilineáris beírt kör* (azaz az a kör, ami érinti az AB , AC oldalakat és Ω -t belülről). Hasonlóan definiáljuk az ω_B , ω_C köröket. Jelölje az ω_A , ω_B , ω_C körök Ω -n lévő érintési pontjait rendre T_A , T_B és T_C .

Mutassuk meg, hogy az ω_A , ω_B , ω_C körök *Monge-egyenesé* (azaz a három kör páronként vett külső hasonlósági középpontjain átmenő egyenesé) egybeesik az $AT_CBT_ACT_B$ húrhatszög *Pascal-egyenesével* (azaz az $AT_C \cap T_AC$, $T_CB \cap CT_B$, $BT_A \cap T_BA$ pontokon átmenő egyenessel).

Javasolta: Sha Jingyuan (Budapest)

A. 921. Adott egy $n \geq 2$ egész szám. Legyenek $x_1, \dots, x_n$ olyan pozitív valós számok, melyek szorzata $n - 1$. Mutassuk meg, hogy

$$x_1 + \dots + x_n - \left(\frac{1}{x_1^{n-1}} + \dots + \frac{1}{x_n^{n-1}} \right) < (n-1)^{1+\frac{1}{n}}.$$

Javasolta: Bán-Szabó Áron (Palaiseau)

A. 922. Rögzítsünk két pozitív egész számot, a -t és b -t. Legyen n egy pozitív egész szám, és T egy $an \times bn$ -es tábla mezőinek egy fekete–fehér színezése, melyben van legalább két fehér mező. Csigusz, a csiga elindult egy fehér mezőről, bejárta az összes fehér mezőt pontosan egyszer, majd visszaért a kiinduló mezőjére, mindezt úgy, hogy végig csak oldalszomszédos fehér mezők között haladt. Ezután észrevette, hogy ezt pontosan egyféleképpen tudta megtenni (vagyis azután, hogy elindult, már csak egyféleképpen tudta befejezni a körutat).

Jelölje $\mathcal{T}_n$ azon T színezések halmazát, melyekre teljesül a fenti tulajdonság, és jelölje $\phi(T)$ a fehér mezők számát T -ben. Mutassuk meg, hogy

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\max_{T \in \mathcal{T}_n} \phi(T)}{abn^2}$$

létezik minden pozitív egész a és b esetén, és határozzuk meg L értékét.

Javasolta: *Lovas Márton és Beke Csongor* (Cambridge)



Beküldési határidő: 2026. január 12.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



Informatikából kitűzött feladatok (679–682.)

I. 679. Egy kisváros utcáin és terein a meleg nyári napokon a fákat és más köztéri növényeket locsolják. A modern locsolókocsi adatrögzítője feljegyzi, hogy az egyes növényeknél hány liter vizet használt fel a kertész.

Készítsünk programot **i679** néven, amely megadja a locsolási adatok átlagát, móduszát, mediánját és az éppen ennyit fogyasztó első növények sorszámát, valamint, hogy hány növény locsolásánál használtak fel éppen ennyi vizet.

A program standard bemenetének első sorában a meglocsolt növények N száma ($1 \leq N \leq 1000$) és egy növény locsolásához felhasznált víz maximális M térfogata ($1 \leq M \leq 200$) literben van szóközzel elválasztva. A következő sorban az N növény locsolásához felhasznált víz ($1 \leq V_i \leq M$, egész szám) térfogata szerepel.

A program standard kimenetére három sort írunk ki, bennük az adatokat szóközzel elválasztva. Az első sorba az átlagos locsolási térfogatot egész számra kerekítve, az első éppen átlagos vízfogyasztó növény sorszámát, és hogy hány növényt locsoltak éppen ennyi vízzel. A második sorba írjuk ki a locsolási térfogatok móduszát (több módusz esetén a legkisebbet), valamint az első ennyivel locsolt növény sorszámát, illetve összes számát. A harmadik sorban a vízmennyiségek mediánja legyen, az első ennyi vízzel locsolt növény sorszáma, majd az éppen ennyivel locsolt növények száma. Ha az adott középértéknek megfelelő vízzel egy növényt sem locsoltak, akkor a második szám az adott sorban legyen -1 .

Bemenet:	Kimenet:
11 100	18 3 4
48 15 18 18 15 18 8 15 11 18 10	18 3 4
	15 2 3

Beküldendő egy tömörített *i679.zip* állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely tartalmazza a megoldás rövid leírását, és megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

(10 pont)

I. 680. Nézzük meg a mintát, és nyissuk meg a mellékelt *F1-2024.xlsx* táblázatot.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
1	Futam	Város	Futam napja	Futamkör	Pályahossz [m]	Versenytáv [km]	Futamidő	Helyezés	Rajtszám	Versenyző	Szű
2	Bahreini nagydíj	Szahír	2024.03.02	57	5408	308,256	1:31:44,742	1	1	Max Verstappen	19
3	Bahreini nagydíj	Szahír	2024.03.02	57	5408	308,256		2	11	Sergio Perez	19
4	Bahreini nagydíj	Szahír	2024.03.02	57	5408	308,256		3	55	Carlos Sainz	19
5	Bahreini nagydíj	Szahír	2024.03.02	57	5408	308,256		4	16	Charles Leclerc	1
6	Bahreini nagydíj	Szahír	2024.03.02	57	5408	308,256		5	63	George Russell	1
7	Bahreini nagydíj	Szahír	2024.03.02	57	5408	308,256		6	4	Lando Norris	1

K	L	M	N	O	P	Q	R
Születési idő	Csapat	Rajtpozíció	Körök	Nem minősített	Pont	Leggyorsabb kör	Leggyorsabb kör idő
1997.09.30	Red Bull Racing Honda RBPT	1	57		26	Yes	1:32,608
1990.01.16	Red Bull Racing Honda RBPT	5	57		18	No	1:34,364
1994.09.01	Ferrari	4	57		15	No	1:34,507
1997.10.16	Ferrari	2	57		12	No	1:34,090
1998.02.15	Mercedes	3	57		10	No	1:35,065
1999.11.13	McLaren Mercedes	7	57		8	No	1:34,476

A táblázat a Formula 1 2024-es nagydíjainak néhány adatát tartalmazza. 480 sorból és 18 oszlopból áll. Azért ilyen nagy, mert az adatokat redundánsan – indokolatlanul többszörösen – tárolja.

Ezeket az adatokat – későbbi felhasználás céljából – alakítsuk át adatbázis táblákká. Ha alaposan átvizsgáljuk az adatokat, hét különböző entitás adatai keveredtek össze, ebből négy a *Futam*, a *Csapat*, a *Versenyző* és az *Eredmény*.

1. Válogassuk szét e négy entításhoz tartozó adatoszlopokat. Figyeljünk arra, hogy a többiek közül kiszámítható vagy megadható oszlop ne szerepeljen egyik adattáblában sem.
2. A maradék oszlopok alapján állapítsuk meg a maradék három entitást.
3. Hét új munkalapon, amelyek neve az egyes táblák/entitások nevével egyezző, jelenítsük meg a megfelelő tábla adatait.
4. Egészítsük ki számláló típusú elsődleges kulcsokkal a táblákat, valamint újabb mezők bevezetésével biztosítsuk a táblák közötti kapcsolatot. és a táblák kapcsolatát biztosító mezőkkel a táblákat.
5. Jelenítsük meg egy új munkalapon a táblák kapcsolatát a minta szerint.

	A	B	C	D	E
1	Csapat		Versenyző		Futam
2	csapatID		versenyzőID		futamID
3	csapatnév		versenyzőnév		futamnév
4			születési idő		város
5			rajtszám		futam napja
6			csapati		futamkör
7					pályahossz [m]

6. Egészítsük ki a táblákat azokkal a mezőkkel, amelyek a táblák kapcsolataiért felelősek!
7. Készítsük el az `F1-2024.sql` szöveges állományt.
 - a. Ez tartalmazza az adatbázist létrehozó SQL parancsokat,
 - b. a táblákat létrehozó SQL parancsokat,
 - c. és az adatokat a táblába beszűrő SQL parancsokat!

Beküldendő az *i680.zip* tömörtett állományban a munkafüzet az eredeti nevén, az *F1-2024.sql* állomány és egy rövid dokumentáció, a táblázatkezelő neve, verziószáma.

Letölthető fájl: *F1-2024.xlsx*

(10 pont)

I. 681. Budapest turisztalátványosságai közé tartoznak a szobrok, amelyek szét-szórva találhatók a városban népszerű és kevésbé látogatott helyeken. A köztéri szobrok adatai a bpszobrok adatbázisban állnak rendelkezésre.

Az adatbázis a következő táblákat tartalmazza:

Táblák:

szobor (*id, cím, év, kerület, hely*)

<i>id</i>	A szobor azonosítója (szám), ez a kulcs
<i>cím</i>	A szobor elnevezése (szöveg)
<i>év</i>	Melyik évben állították fel az alkotást (szám); üres, ha az adat nem ismert
<i>kerület</i>	Melyik budapesti kerületben található (szám)
<i>hely</i>	A szobor jelenlegi közterületi helye (szöveg)

alkoto (*id, szoborid, nev*)

<i>id</i>	A szobor alkotójának, illetve alkotóinak azonosítója (szám), ez a kulcs
<i>szoborid</i>	A szobor azonosítója (szám); egy-egy szobrot többen is készíthettek
<i>nev</i>	A művész neve (szöveg); a művészek között nincs két azonos nevű

anyag (*id, szoborid, nev*)

<i>id</i>	A szobor anyagának, illetve anyagainak azonosítója (szám), ez a kulcs
<i>szoborid</i>	A szobor azonosítója (szám); egy-egy szobor többféle anyagból is készülhetett
<i>nev</i>	Az anyag neve (szöveg)



A következő feladatok megoldását rögzítsük a *szobrok_megoldas.sql* állományban a feladatok végén zárójelben megadott névvel. A javítás során csak ennek az állománynak a tartalma lesz értékelve. Ügyeljünk arra, hogy a lekérdezésekben pontosan a kívánt mezők szerepeljenek, felesleges mezőt ne jelenítsünk meg.

1. A *bpszobrok.sql* állomány tartalmazza az adatbázist és a táblákat létrehozó, valamint az adatokat a táblába beszűrő SQL parancsokat. Futtassuk a lokális SQL szerveren a *bpszobrok.sql* parancsfájlt.
2. Soroljuk fel lekérdezés segítségével ábécérendben a Margitsziget szobrainak címét és a felállításuktól eltelt időt. (**2margit**)
3. Készítsünk lekérdezést, amely megadja az észak-pesti, azaz a 4., 13. és 15. kerületek szobrainak címét, kerületét és közterületi helyét. (**3eszak**)
4. Készítsünk lekérdezést, amely megadja az ismert felállítási évek alapján, hogy melyik évben állították fel a legtöbb szobrot, és ez hány alkotást jelent. (**4legtobb**)
5. A köztéri szobrokat különböző anyagokból készítik. Adjuk meg lekérdezés segítségével, hogy az egyes nyersanyagokat hány szobor elkészítéséhez használták. A listában darabszám szerint csökkenően jelenítsük meg a nyersanyag neveket és a darabszámokat. (**5anyagok**)
6. Soroljuk fel az Anonymus szobránál korábban felállított alkotások címét és felállításuk évét. A lista az alkotások címe szerint ábécérendben jelenjen meg. (**6anonymus**)
7. Liszt Ferencnek több szobra látható a városban. Lekérdezés segítségével határozzuk meg, hogy a Liszt Ferenc-szobrok alkotóinak milyen más című alkotásaik vannak még felállítva Budapesten. A listában a Liszt Ferenc-szobrok címe ne jelenjen meg, de a többi alkotás címe és a szobrászok neve szerepeljen. (**7liszt**)
8. Sokféle alapanyagból készítenek szobrokat, de a legnépszerűbb a mésző és a bronz. Készítsünk lekérdezést, amely megadja, hogy az adatbázisban hány olyan vegyes technikájú szobor van, amely egyszerre tartalmaz mészövet és bronzot. (**8vegyes**)
9. Azon művészek nevét keressük, akiknek szobrai 1990-től láthatók a városban, de előtte nem volt felállított művük. Készítsük el a szükséges lekérdezést. (**9valt**)

Letölthető állomány: *bpszobrok.sql*

(10 pont)

I. 682. András széles könyvespolcán egymás mellett sorakoznak a könyvek. A legtöbb könyv András kedvenc szerzőitől van, némelyiktől jó néhány, de vannak olyan szerzők is, akikről csak egy könyv. András könyvei egy sorban egymás mellett vannak a polcon, semmilyen szempontból nincsenek rendezve, és András nem szeretné őket átrendezni. Azért, hogy mégis jobban elkülönüljenek, kitalálta, hogy mindegyik könyv kapjon egy megfelelő színű papírkötést. Az azonos szerzőtől származó könyvek azonos színt kapjanak, de ezt a színt kaphatják még más szerzőtől származó könyvek is. De az nem fordulhat elő, hogy két egymás melletti könyv azonos színű, de nem azonos a szerzőjük. András alaposan elgondolkodott azon, hogy végül is hány különböző színű papírt kell vennie a bekötéshez, és melyikből mennyit.

Készítsünk programot *i682* néven, amely a polcon sorakozó könyvek száma és a könyvek szerzői ismeretében kiszámítja, hogy legkevesebb hány színt kell használni a bekötéshez, illetve melyik színnel hány könyvet kell majd bekötni.

A program standard bemenetének első sorában a könyvek száma ($1 \leq N \leq 500$) szerepel. A következő sorban egy-egy szóközzel elválasztva N darab egész szám található: az i -edik szám a polcon található i -edik könyv s_i szerzőjét jelenti ($1 \leq s_i \leq N$). Természetesen minden szerzőnek egyedi száma van, amely pontosan az ő könyveit jelöli.

A program a standard kimenet első sorába írja ki, hogy legalább hány színt kell használni a bekötéshez, a kimenet második sorába szóközzel elválasztva adja meg, hogy az egyes színekhez hány könyv tartozik, a kimenet harmadik sorában adja meg a könyvek egy lehetséges színezését. A program sorrendben adjon színt a könyveknek, az első könyvnek az 1-es színt, a következő eltérő színű könyvnek a 2-es színt és így tovább.

Példa:

Bemenet:	Kimenet:
12	3
3 4 3 3 2 3 5 4 2 7 3 6	6 3 3
	1 2 1 1 3 1 3 2 1 3 1 2

Beküldendő egy tömörített *i682.zip* állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

(10 pont)

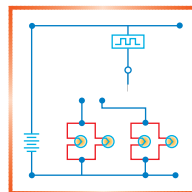


Beküldési határidő: 2026. január 15.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



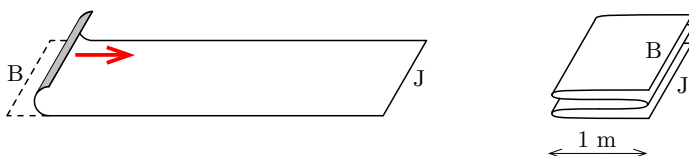
Fizika gyakorlatok megoldása



G. 893. A folyosó padlójára leterített, 4 m hosszúságú szőnyeget négyrét (négy egyforma rétegben) összehajtogatjuk úgy, hogy bal oldali szegélyét (B) megfogjuk, és folyamatosan 20 cm/s nagyságú, vízszintes irányú sebességgel először jobbra, azután balra, majd ismét jobbra visszük. (Lásd az ábrát!)

a) Mennyi időt vesz igénybe a szőnyeg összehajtása?

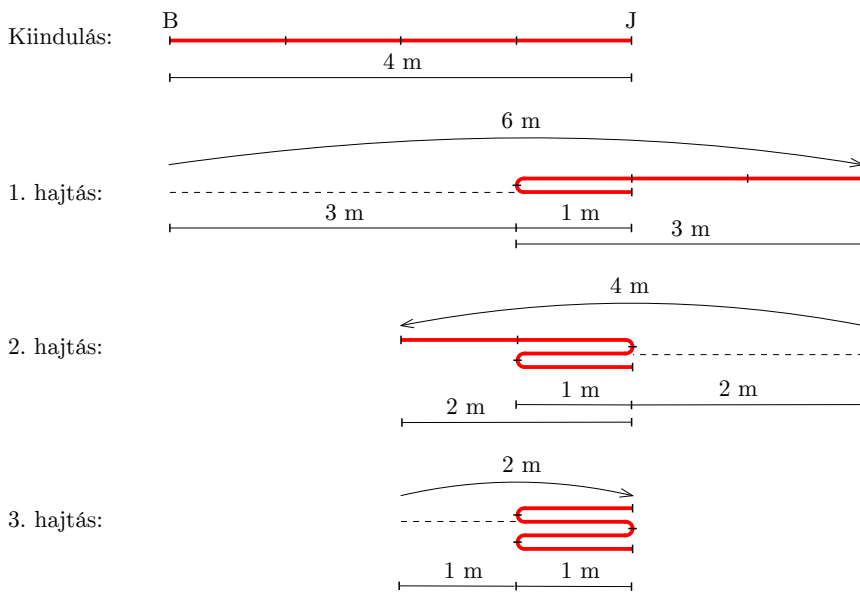
b) Az összehajtás megkezdésétől mért 5 s elteltével a szőnyegnek milyen hosszú darabja rendelkezik jobbra irányuló sebességgel? A szőnyeg vékony, könnyen hajtható anyagból készült, és nem csúszik meg a padlón. Az irányváltoztatások pillanatszerűen következnek be.



(4 pont)

Tornyai Sándor fizikaverseny, Hódmezővásárhely

Megoldás. a) A szőnyeg B szélét állandó $v = 20$ cm/s sebességgel húzzuk, míg a J széle végig egy helyben marad. Az összehajtás lépései az 1. ábrán láthatók.



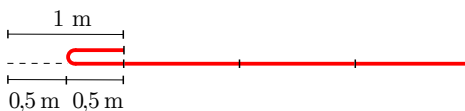
1. ábra

Az 1. ábráról leolvasható, hogy a szőnyeg B széle (és vele együtt a kezünk) összesen $s = 6 + 4 + 2 = 12$ m utat tett meg. Ezt $v = 20$ cm/s = 0,2 m/s sebességgel

$$t = \frac{s}{v} = \frac{12 \text{ m}}{0,2 \text{ m/s}} = 60 \text{ s} = 1 \text{ perc}$$

idő alatt lehetett megtenni. Tehát a szőnyeg összehajtása 1 percre tartott.

b) $t_1 = 5$ s alatt a szőnyeg B széle $s_1 = vt_1 = 0,2 \text{ cm/s} \cdot 5 \text{ s} = 1$ m utat tesz meg. Azonban a hajtás feleakkora sebességgel mozog, így eközben csak $\frac{s_1}{2} = 0,5$ m-t tesz meg, ahogy ez a 2. ábrán is látszik.

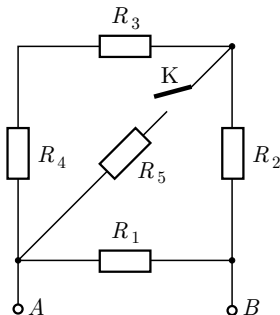


2. ábra

Ebből következően a szőnyegnek $\frac{s_1}{2} = 0,5$ m hosszú darabja fog ebben a pillanatban jobbra irányuló sebességgel rendelkezni.

Csikós Attila (Budapest, Városmajori Gimn., 9. évf.)

70 dolgozat érkezett. Helyes 22 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 27, hiányos (1–2 pont) 18, hibás 3 dolgozat.



G. 896. Öt ellenállást kapcsolunk az ábra szerint egy 24 V-os feszültségforrás A és B kimenetére. Az ellenállások: $R_1 = 40 \Omega$, $R_2 = 50 \Omega$, $R_3 = R_4 = 10 \Omega$ és $R_5 = 20 \Omega$.

a) Határozzuk meg az áramkör eredő ellenállását a kapcsoló zárt és nyitott állásában!

b) Mennyivel változik meg az R_4 ellenállás teljesítménye, ha a zárt kapcsolót kinyitjuk?

(4 pont)

Közli: Veres Dénes, Szolnok

Megoldás. a) Ha a K kapcsoló nyitva van, akkor az R_2 , R_3 és R_4 ellenállások sorba vannak kötve, és az R_1 ellenállás pedig velük párhuzamosan. Így nyitott kapcsoló esetében az eredő ellenállás:

$$R_{\text{ny}} = R_1 \times (R_2 + R_3 + R_4) = \frac{R_1(R_2 + R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{40 \cdot 70}{40 + 70} \Omega = 25,5 \Omega.$$

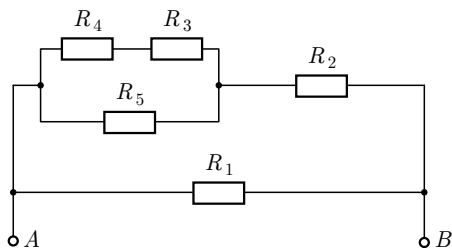
(Itt a $\times$ jel a „replusz” műveletet jelöli, ami a reciprokok összegének reciprokát írja le röviden.)

Zárt kapcsoló esetén a kapcsolás bonyolultabb, az áttekinthetőség érdekében érdemes ábrázolni (ábra a túloldalon).

A soros és párhuzamos kapcsolások egymásutánja alapján az eredő ellenállás:

$$R_z = R_1 \times (R_2 + R_5 \times (R_3 + R_4)).$$

Ez kifejtve nagyon bonyolult képlet, érdemes több lépésben kiszámítani:



$$R_3 + R_4 = 2 \cdot 10 \, \Omega = 20 \, \Omega,$$

$$R_5 \times (R_3 + R_4) = 20 \, \Omega \times 20 \, \Omega = 10 \, \Omega,$$

$$R_2 + R_5 \times (R_3 + R_4) = 50 \, \Omega + 10 \, \Omega = 60 \, \Omega,$$

$$R_z = R_1 \times (R_2 + R_5 \times (R_3 + R_4)) = 40 \, \Omega \times 60 \, \Omega = \frac{40 \cdot 60}{40 + 60} \, \Omega = 24 \, \Omega.$$

Az eredő ellenállás tehát zárt kapcsoló esetén $R_z = 24 \, \Omega$, nyitott kapcsolónál pedig $R_{ny} = 25,5 \, \Omega$, tehát a kapcsoló kinyitásakor kis mértékben megnövekszik.

b) Mindkét esetben meghatározzuk az R_4 ellenálláson eső feszültséget, és aztán abból a rajta disszipálódó teljesítményt. Nyitott kapcsoló esetén a sorba kapcsolt R_2 , R_3 és R_4 ellenállásokon $U = 24 \, \text{V}$ feszültség esik, így az R_4 ellenállásra eső feszültség a feszültségosztó képlet alapján:

$$U_{4,ny} = \frac{R_4}{R_2 + R_3 + R_4} U = \frac{10}{50 + 10 + 10} \cdot 24 \, \text{V} = 3,43 \, \text{V}.$$

Zárt kapcsoló esetén az $U = 24 \, \text{V}$ feszültséget először az egymással sorba kapcsolt $R_5 \times (R_3 + R_4) = 10 \, \Omega$ és $R_2 = 50 \, \Omega$ között kell elosztani:

$$U_{345,z} = \frac{R_5 \times (R_3 + R_4)}{R_2 + R_5 \times (R_3 + R_4)} U = \frac{10}{50 + 10} \cdot 24 \, \text{V} = 4 \, \text{V},$$

majd ezt kell tovább osztani a sorosan kapcsolt R_3 és R_4 ellenállások között. Ezek egyforma nagyságúak, így a feszültség feleződik:

$$U_{4,z} = \frac{U_{345,z}}{2} = 2 \, \text{V}.$$

Az ellenálláson disszipálódó teljesítmény nyitott kapcsolónál:

$$P_{4,ny} = \frac{U_{4,ny}^2}{R_4} \approx 1,2 \, \text{W},$$

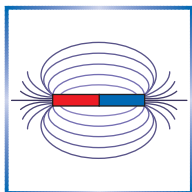
zárt kapcsolónál pedig:

$$P_{4,z} = \frac{U_{4,z}^2}{R_4} = 0,40 \, \text{W}.$$

A teljesítmény tehát közel háromszorosára növekszik a kapcsoló kinyitásakor.

Blaskovics Bálint (Budapest, NKE Óbudai Árpád Gimn., 9. évf.)

49 dolgozat érkezett. Helyes 23 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 4, hiányos (1–2 pont) 17, hibás 5 dolgozat.



Fizika feladatok megoldása

P. 5634. Egy rajztábla és egy rajta nyugvó könyv között a súrlódási együttható μ . A rajztábla egyik szélét lassan emeljük.

- Mekkora α hajlásszög esetén csúszik meg a könyv?
- Mekkora a tábla 2α hajlásszögű helyzetében a lecsúszó könyv gyorsulása?
- Mekkora az a legkisebb vízszintes gyorsulás, amivel a 2α hajlásszögű táblát előre kellene tolni ahhoz, hogy a könyv ne csússzon meg?

A csúszási és a tapadási súrlódási együtthatót tekintsük egyenlőnek. Az eredményeket μ és g segítségével adjuk meg.

(5 pont)

Közli: Honyek Gyula, Veresegyház

I. megoldás. a) Egyensúly akkor áll fenn, ha a lejtővel párhuzamos és a lejtőre merőleges erők eredője is nulla. Az mg nehézségi erőt lejtővel párhuzamos és lejtőre merőleges komponensekre bontva, a nyomóerőt N_1 -nel, a súrlódási erőt S_1 -sel jelölve:

$$mg \sin \alpha = S_1,$$

$$mg \cos \alpha = N_1.$$

Határesetben

$$S_1 = \mu N_1,$$

ezt az első egyenlet jobb oldalába beírva, majd N_1 értékét a második egyenletből kifejezve kapjuk:

$$mg \sin \alpha = \mu mg \cos \alpha,$$

amiből

$$\operatorname{tg} \alpha = \mu$$

és

$$\alpha = \arctg \mu.$$

b) Jelölje a könyv keresett gyorsulását a megadott helyzetben a . Felírhatjuk a lejtővel párhuzamos irányban a dinamika alapegyenletét:

$$ma = mg \sin 2\alpha - S_2 = mg \sin 2\alpha - \mu mg \cos 2\alpha,$$

ahol felhasználtuk, hogy az a) részben követett gondolatmenet alapján a súrlódási erő most:

$$S_2 = \mu N_2 = \mu mg \cos 2\alpha.$$

A $\mu = \operatorname{tg} \alpha$ eredmény behelyettesítése és egyszerűsítés után:

$$a = g(\sin 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha \cos 2\alpha).$$

A kétszeres szögek szögfüggvényeire ismert összefüggések:

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Ezeket beírva és rendezve:

$$a = g \left(\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - \operatorname{tg} \alpha \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \right) = g \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = g \operatorname{tg} \alpha = \mu g.$$

Tehát a könyv gyorsulása ekkor $a = \mu g$.

c) Legyen a tábla minimális gyorsulása a_0 . Vizsgáljuk a mozgást a lejtőhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben, ebben a könyv nyugalomban van. Ugyanakkor, mivel nem inerciarendszerben dolgozunk, fel kell vennünk egy, a tábla gyorsulásával ellentétes irányú, ma_0 nagyságú tehetetlenségi erőt is (1. ábra). Az előbbieknél megfelelően ezt is lejtővel párhuzamos és lejtőre merőleges komponensekre bontjuk.

Az egyensúly feltétele a megcsúszás határánál (a tábla minimális gyorsulásánál):

$$mg \sin 2\alpha - ma_0 \cos 2\alpha = S_3,$$

$$mg \cos 2\alpha + ma_0 \sin 2\alpha = N_3,$$

$$S_3 = \mu N_3.$$

Ebből az a) részhez hasonlóan:

$$mg \sin 2\alpha - ma_0 \cos 2\alpha = \mu(mg \cos 2\alpha + ma_0 \sin 2\alpha),$$

amelyből rendezve:

$$a_0(\mu \sin 2\alpha + \cos 2\alpha) = g(\sin 2\alpha - \mu \cos 2\alpha).$$

Ismét felhasználva a $\mu = \operatorname{tg} \alpha$ egyenlőséget és a kétszeres szögek szögfüggvényeire már használt összefüggéseket:

$$a_0 \left(\operatorname{tg} \alpha \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \right) = g \left(\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - \operatorname{tg} \alpha \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \right),$$

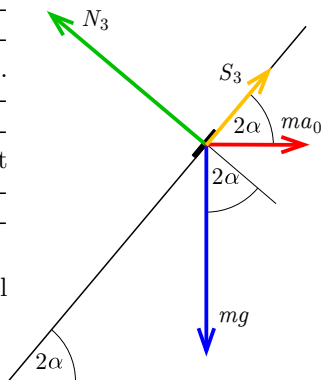
majd mindkét oldalon közös nevezőre hozva, összevonva és egyszerűsítve:

$$a_0 = g \operatorname{tg} \alpha = \mu g.$$

A táblát tehát legalább $a_0 = \mu g$ gyorsulással kell előre tolni ahhoz, hogy a könyv ne csússzon meg.

Klement Tamás (Pécsi Leőwey Klára Gimn., 12. évf.)

Megjegyzések. 1. A feladatnak csak akkor van értelme, ha $2\alpha < 90^\circ$, és így $\mu < 1$.



1. ábra

2. A feladat c) része megoldható inerciarendszerben is: ilyenkor a három erő a könyvet a_0 gyorsulással gyorsítja vízszintesen (hogy ne mozogjon a lejtőhöz képest). Ekkor az erőket célszerű vízszintes és függőleges komponensekre bontani. A mozgásegyenletek:

$$\begin{aligned}mg &= N_3 \cos 2\alpha + S_3 \sin 2\alpha, \\ ma_0 &= N_3 \sin 2\alpha - S_3 \cos 2\alpha, \\ S_3 &= \mu N_3,\end{aligned}$$

amelyből a minimális gyorsulásra ugyanazt az eredményt kapjuk.

3. A feladat a lejtő legkisebb gyorsulását keresi, de meghatározhatjuk a legnagyobb gyorsulást is, amely esetében a könyv nem csúszik meg. Ekkor a súrlódási erő nagysága szintén maximális, de iránya ellentétes (hiszen azt kell megakadályoznia, hogy a könyv felfelé megcsússzon). Ekkor az egyensúly feltétele (a lejtővel együtt gyorsuló vonatkoztatási rendszerben):

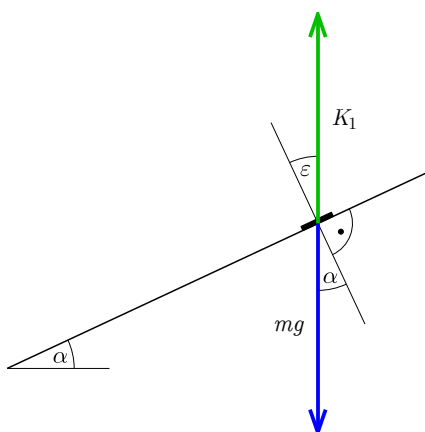
$$\begin{aligned}mg \cos 2\alpha + ma'_0 \sin 2\alpha &= N'_3, \\ mg \sin 2\alpha + S'_3 &= ma'_0 \cos 2\alpha, \\ S'_3 &= \mu N'_3,\end{aligned}$$

amiből a tábla maximális gyorsulása:

$$a'_0 = \frac{\sin 2\alpha + \mu \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha - \mu \sin 2\alpha} g = \frac{\mu(3 - \mu^2)}{1 - 3\mu^2} g.$$

A képlet $\mu > \frac{1}{\sqrt{3}}$ esetben negatív értéket ad, de ez hibás eredmény, mert a tapadó súrlódás nem tudja elindítani a könyvet – ilyenkor a súrlódási erő nagysága kisebb lesz a maximális értéknél. Ezt el lehetett volna kerülni, ha az egyenletrendszer harmadik egyenlete helyett egyenlőtlenséget írunk: $0 \leq S'_3 \leq \mu N'_3$.

Látható, ha $\mu \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$ (azaz $\alpha \geq 30^\circ$, $2\alpha \geq 60^\circ$), akkor a gyorsulás végtelen nagy lehet, a könyv „befeszül”, „rátapad” a lejtőre.



2. ábra

II. megoldás. A megcsúszás hatásán a nyomóerő és a súrlódási erő eredője a felület normálisával ε szöget zár be, ez a megcsúszás határszöge. Mivel a súrlódási erő nagysága ekkor éppen a nyomóerő nagyságának μ -szöröse, és a két erő merőleges egymásra, $\operatorname{tg} \varepsilon = \mu$.

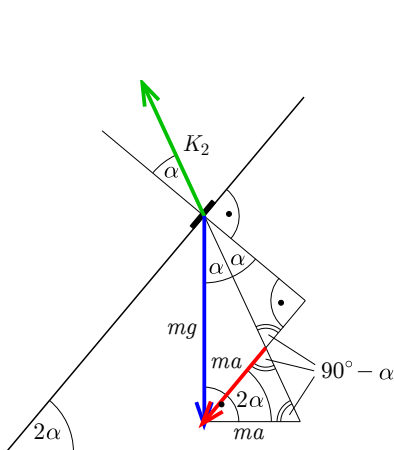
a) A könyvre a nehézségi erő és a rajztábla felülete által kifejtett kényszererő hat (2. ábra). A két erő csak akkor lehet egyensúlyban, ha irányuk (és nagyságuk) megegyezik. Ez alapján:

$$\alpha = \varepsilon = \operatorname{arctg} \mu.$$

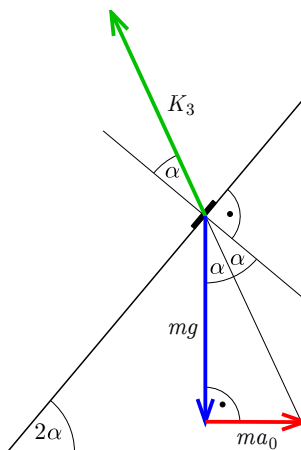
b) A könyvre most is csak a nehézségi erő és a kényszererő hat (amelynek a nagysága természetesen nem egyezik meg az a) részben szereplővel: akkorának kell lennie, hogy a lejtőre (rajztáblára) merőleges komponense kiegyenlítsa a nehézségi

erő lejtőre merőleges komponensét). Ezek eredőjének a felülettel párhuzamosnak kell lennie: ez az eredő erő hozza létre a könyv keresett lejtőirányú gyorsulását. A 3. ábrán berajzoltuk a könyvre ható erőket és ezek eredőjét is: ez utóbbi végpontját a kényszererő hatásvonala metszi ki a lejtővel párhuzamos egyenesből. Bejelöltünk szögeket, és megrajzoltunk néhány egyenest: látható, hogy az alul keletkező kis háromszög egyenlőszárú, és így a vízszintes szára is ma hosszúságú. Ezután már a 3. ábráról leolvashatjuk:

$$ma = mg \operatorname{tg} \alpha \quad \Rightarrow \quad a = g \operatorname{tg} \alpha = \mu g.$$



3. ábra



4. ábra

c) A mozgást vizsgáljuk a lejtővel együtt gyorsuló vonatkoztatási rendszerben. Legyen a lejtő minimális gyorsulása a_0 . Ekkor egy vízszintes, ma_0 nagyságú tehetetlenségi erő hatását is figyelembe kell venni (amely a lejtő gyorsulásával ellentétes irányba mutat). Az erőnek akkorának kell lennie, hogy kiegyenlítse a nehézségi erő és a kényszererő eredőjét. A legkisebb ilyen gyorsulást keressük, ezért a kényszererő most is az eddigi, „éppen nem csúszik meg lefele” határhelyzetben van. A 4. ábrán láthatjuk, hogy a kényszererő hatásvonala kimetszi az ma_0 erő végpontját (és egyben meghatározza K_3 nagyságát is, de arra a feladat megoldásához nincs szükségünk). Az ábráról közvetlenül leolvasható a lejtő keresett legkisebb gyorsulása:

$$ma_0 = mg \operatorname{tg} \alpha \quad \Rightarrow \quad a_0 = g \operatorname{tg} \alpha = \mu g.$$

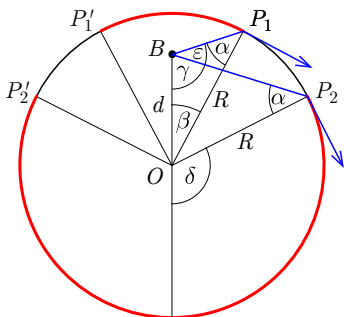
46 dolgozat érkezett. Helyes 19 megoldás. Kicsit hiányos (3–4 pont) 23, hiányos (1–2 pont) 4 dolgozat.

P. 5640. A Kanári-szigetek legnagyobb városában, Las Palmasban található egy Európában egyedülálló kiállítás, amely a Föld vizeinek élővilágát mutatja be. A kiállítás egyik attrakciója egy 400 köbméteres, függőleges, henger alakú tengeri akvárium, melynek karbantartását búvárok végzik. Vízszintesen körbenézve az akvárium falának hányad részén lát ki az a búvár, aki az R sugarú henger szimmetriatengelyétől d távolságra van? A tengervíz törésmutatója n .

(5 pont)

Közli: Vigh Máté, Herceghalom

Megoldás. A fénysugarak útja megfordítható, így a bűvár abba az irányba lát ki, amerre egy fénysugár ki tud lépni az akváriumból. Ennek az a feltétele, hogy az akvárium falánál a fénysugár beesési szöge ne legyen nagyobb a teljes visszaverődés $\alpha = \arcsin \frac{1}{n}$ határszögénél. Az akváriumot felülnézetben mutató ábrán ez a pirossal jelölt $P_1'P_1$ és $P_2'P_2$ íveken teljesül.



A keresett arány az ívekhez tartozó középponti szögek összegének és a teljes szögnek a hányadosa:

$$\eta = \frac{2(\beta + \delta)}{2\pi} = \frac{\beta + \delta}{\pi}.$$

A δ szög az OBP_2 háromszög külső szöge, így

$$\delta = \alpha + \gamma.$$

A szinusztételt az OBP_1 és OBP_2 háromszögekre is felírva:

$$\frac{R}{d} = \frac{\sin(\gamma + \varepsilon)}{\sin \alpha} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha},$$

amiből egyrészt

$$\gamma = \pi - (\gamma + \varepsilon) = \alpha + \beta,$$

másrészt

$$\sin \gamma = \frac{R}{d} \sin \alpha = \frac{R}{nd}.$$

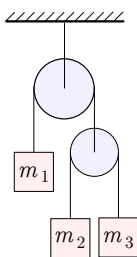
Mindezek alapján a keresett arány:

$$\eta = \frac{\beta + \delta}{\pi} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\pi} = \frac{2\gamma}{\pi} = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{R}{nd}.$$

A kifejezés csak $d \geq \frac{R}{n}$ értékeknél értelmezhető. Ha $d < \frac{R}{n}$, akkor $\eta = 1$, azaz a bűvár minden irányba kilát az akváriumból.

Fekete Lúcia (Budapest V. Ker. Eötvös J. Gimn., 12. évf.)

9 dolgozat érkezett. Helyes 3 megoldás. Kicsit hiányos (3–4 pont) 2, hiányos (2 pont) 2, nem versenyszerű 2 dolgozat.



P. 5644. Milyen egyetlen, m tömeggel kellene helyettesíteni az ábrán szereplő jobb oldali csigát és a rajta lévő tömegeket, hogy az m_1 tömegű test ugyanúgy mozogjon, mint az eredeti elrendezésben? Hanyagoljuk el a csigák tömegét és a súrlódást.

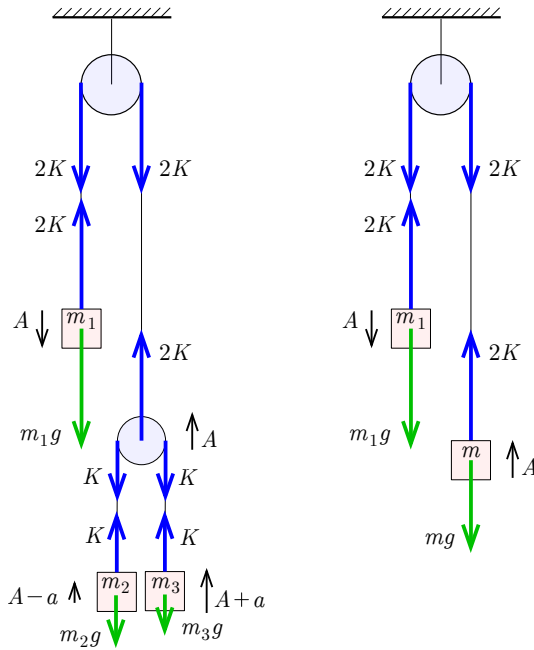
(4 pont)

Közli: Siposs András, Budapest

I. megoldás. A csigák és kötelek tömege, valamint a súrlódás elhanyagolható, így az egyes testek mozgásegyenlete:

- $$\begin{aligned} (1) \quad & m_1 g - 2K = m_1 A, \\ (2) \quad & K - m_3 g = m_3 (A + a), \\ (3) \quad & K - m_2 g = m_2 (A - a), \\ & 2K - mg = mA. \end{aligned}$$

Itt A az m_1 tömegű test, a köteléhez kapcsolódó csiga, valamint a keresett m helyettesítő tömeg gyorsulása, a az m_2 és m_3 tömegek gyorsulása a mozgócsigához viszonyítva, K pedig a mozgócsigán átvett kötélben a kötél erő. Az 1. ábra bal oldalán az eredeti, a jobb oldalán a helyettesítő elrendezés látható ($m_2 > m_3$ és $m_1 > m$, és ebből következően $A > 0$ és $a > 0$ választással, de ennek a megoldás szempontjából nincs jelentősége).



1. ábra

Az (1) és (2) egyenleteket a tömegekkel elosztva, majd az egyenleteket összeadva, és végül rendezve:

$$\frac{K}{m_3} - g + \frac{K}{m_2} - g = 2A, \quad \Rightarrow \quad A = \frac{m_2 + m_3}{2m_2m_3} K - g,$$

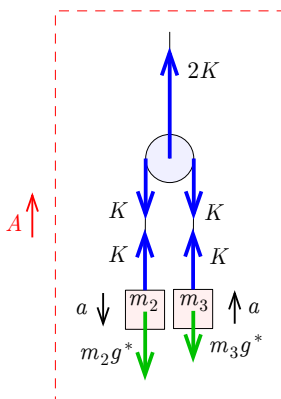
majd A értékét (3)-ba beírva:

$$\frac{2K}{m} - g = \frac{m_2 + m_3}{2m_2m_3} K - g.$$

Ebből a keresett helyettesítő tömeg:

$$m = \frac{4m_2m_3}{m_2 + m_3}.$$

Zádori Gellért (Szegedi Radnóti M. Kísérleti Gimn., 11. évf.)



2. ábra

II. megoldás. Vizsgáljuk a mozgást a jobb oldali csigával együtt mozgó vonatkoztatási rendszerben. A csiga gyorsulása legyen A , így ebben a rendszerben vizsgálva a mozgást az m_i tömegű testre az $m_i g$ nehézségi erőn kívül egy $m_i A$ nagyságú, lefelé mutató tehetetlenségi erő hatását is figyelembe kell vennünk, tehát olyan, mintha a nehézségi gyorsulás értéke $g^* = g + A$ lenne.

A 2. ábra alapján a mozgásegyenletek:

$$m_2 a = m_2 g^* - K,$$

$$m_3 a = K - m_3 g^*.$$

Ebből

$$a = \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3} g^* \quad \text{és} \quad K = \frac{2m_2 m_3}{m_2 + m_3} g^*.$$

A csigát tartó kötélre (a csiga elhanyagolható tömege miatt) $2K$ erő hat. Ha a csigát és a két rajta lógó testet egyetlen m tömeggel helyettesítenénk, akkor arra (mivel ebben a rendszerben nyugalomban van) $2K - mg^* = 0$ erő hatna. Ebből a keresett tömeg:

$$m = \frac{2K}{g^*} = \frac{4m_2 m_3}{m_2 + m_3}.$$

Megjegyzés. Látható, hogy a megoldás szempontjából az m_1 tömeg nagysága érdektelen.

24 dolgozat érkezett. Helyes 9 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 4, hiányos (1–2 pont) 8, hibás 3 dolgozat.

P. 5646. Űrutazást terveznek a Marsra. Az űrhajó a Földet elhagyva olyan elliptikus pályára áll, amely érinti a két bolygópályát, perihéliumába esik a felszállás, aphéliumába pedig a megérkezés. A visszaút hasonló ellipszispályán történik. Az induláshoz mindkét esetben ki kell várni, amíg a két bolygó megfelelő helyzetbe kerül. Mennyi ideig tart az oda-, illetve visszaút, és legalább mennyi időt fognak a Marson tölteni? A bolygópályákat tekintsük azonos síkban fekvő köröknek, a Mars keringési ideje 687,0 földi nap.

(5 pont)

Közli: Vladár Károly, Kiskunhalas

Megoldás. A Mars keringési ideje $T_M = 687,0$ nap = 1,881 év. Kepler III. törvénye alapján a Mars-pálya sugara:

$$\frac{R_M^3}{T_M^2} = \frac{R_F^3}{T_F^2}, \quad \Rightarrow \quad R_M = \sqrt[3]{\left(\frac{T_M}{T_F}\right)^2} R_F = 1,524 \text{ CsE},$$

ahol $R_F = 1$ CsE a Föld-pálya sugara és $T_F = 1$ év a Föld keringési ideje. Az oda- és visszaút ellipszispályájának félnagy tengelye:

$$a = \frac{R_M + R_F}{2} = 1,262 \text{ CsE},$$

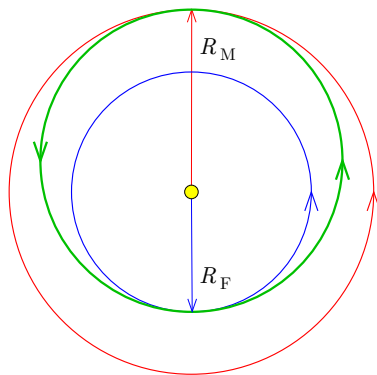
amelyen a keringési idő (ismét Kepler III. törvénye alapján):

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{R_F^3}{T_F^2}, \quad \Rightarrow \quad T = \sqrt{\left(\frac{a}{R_F}\right)^3} T_F = 1,418 \text{ év.}$$

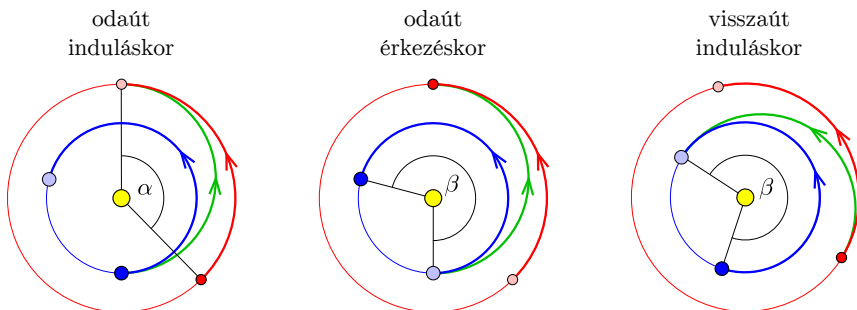
Az oda- és visszaút időtartama egyaránt ennek az időnek a fele:

$$t = \frac{T}{2} = 0,709 \text{ év} \approx 259 \text{ nap.}$$

Az űrhajót akkor lehet visszaindítani, ha a t ideig tartó visszaút után éppen a Földdel egyszerre ér az ellipszis napközei pontjába. A 2. ábrán az odaút indulásának és megérkezésének, valamint a visszaút indulásának pillanata látható.



1. ábra



2. ábra

Az odautazás indulásakor a Mars még $\alpha = \frac{360^\circ}{T_M} t = 135,7^\circ$ -kal a találkozási pont előtt jár. Mire az űrhajó pontosan fél fordulat után eléri a Marsot, a Föld $\beta = \frac{360^\circ}{T_F} t = 255,2^\circ$ -ot tesz meg a pályáján, így a Föld ekkor $\beta - 180^\circ = 75,2^\circ$ -kal jár a Mars előtt. Emiatt a visszainduláskor a Marsnak kell ugyanekkora szöggel a Föld előtt járnia. Tehát a Földnek az űrhajó megérkezése és visszaindulása között a *Marshoz viszonyítva*

$$\gamma = 360^\circ - 2(\beta - 180^\circ) = 209,6^\circ$$

szöget kell elfordulnia a Nap körül. A két bolygó relatív szögsebessége

$$\omega_{\text{rel}} = \frac{360^\circ}{T_F} - \frac{360^\circ}{T_M} = \frac{168,6^\circ}{\text{év}},$$

így a legrövidebb várakozási idő:

$$t_1 = \frac{\gamma}{\omega_{\text{rel}}} = 1,243 \text{ év} \approx 454 \text{ nap.}$$

Elekes Panni (Budapest-Fasori Evangélikus Gimn., 10. évf.)

Megjegyzések. 1. A megadott ellipszispályát *Hohmann-pályának* nevezik *Walter Hohmann* német mérnök után, aki 1925-ben javasolta, mint rakétaüzemanyag-felhasználás szempontjából leggazdaságosabb bolygóközi pályát.

2. A Mars és a Föld

$$T_{\text{rel}} = \frac{360^\circ}{\omega_{\text{rel}}} = 2,135 \text{ év} \approx 780 \text{ nap}$$

időközönként kerül ugyanilyen relatív helyzetbe, így az első lehetséges alkalom után ennyi időnként adódik újabb lehetőség a visszaindulásra.

3. A Föld és a Mars pályájának numerikus excentricitása: 0,0167, illetve 0,0934. A Mars-pálya inklinációja (a pálya síkjának a Föld pályájáéval, vagyis az ekliptikával bezárt szöge): $1,85^\circ$. Ezeket a végső, pontosabb tervezéskor figyelembe kell venni.

22 dolgozat érkezett. Helyes 8 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 4, hiányos (2–3 pont) 10 dolgozat.

P. 5651. *Egy szigetelt, egyenletesen σ felületi töltéssűrűséggel rendelkező szabályos háromszög alakú lap minden oldala $\sqrt{2}a$ hosszúságú. Mekkora az elektromos térerősség értéke abban a pontban, amely minden csúcsponttól a távolságra helyezkedik el?*

(6 pont)

KVANT feladat

Megoldás. Tegyük fel, hogy a csúcsoktól a távolságra lévő pontban van egy q töltésű pontszerű test. Ekkor Newton III. törvénye alapján ugyanakkora erővel hat a ponttöltés a lapra, mint a lap a ponttöltésre. Osszuk a lapot kis darabkákra, és jelöljük az i -edik darabka területét ΔA_i -vel. Ekkor az egyenletes töltéseloszlás miatt az i -edik darabka töltése

$$\Delta Q_i = \sigma \Delta A_i$$

nagyságú, így a ráható elektromos erő nagysága

$$F_i = E_i \Delta Q_i,$$

ahol E_i a q ponttöltés által a darabka helyén létrehozott térerősség nagysága. A szigetelőlapra ható erőt a lemezdarabkákra ható erők vektori összegeként számíthatjuk ki. A szimmetria miatt az eredő erő a lemezre merőleges lesz, így elegendő az ilyen irányú erőkomponenseket összegezni:

$$F = \sum_i F_i \cos \alpha_i = \sum_i E_i \sigma \Delta A_i \cos \alpha_i = \sigma \sum_i E_i \Delta A_i \cos \alpha_i,$$

ahol α_i a ponttöltést a felületdarabkával összekötő egyenes és a felület normálisa által bezárt szög. A kapott kifejezésben az összeg a q ponttöltés által a lapon létrehozott elektromos fluxus:

$$\Psi = \sum_i E_i \Delta A_i \cos \alpha_i.$$

Ha gondolatban körbe vesszük a ponttöltést szimmetrikusan egy $\sqrt{2}a$ oldalélű oktaéderrel, akkor a ponttöltés távolsága a csúcsoktól a lesz. A Gauss-törvény alapján

az oktaéder lapjain összesen q/ε_0 fluxus halad át, ezért egyetlen háromszöglapon ennek a nyolcada:

$$\Psi = \frac{q}{8\varepsilon_0}.$$

Ezt felhasználva a ponttöltés és a háromszöglap között ható erő:

$$F = \frac{\sigma q}{8\varepsilon_0},$$

és ebből a q ponttöltés helyén létrejövő elektromos térerősség:

$$E = \frac{F}{q} = \frac{\sigma}{8\varepsilon_0}.$$

Kiss Adorján Timon (Kaposvári Táncsics M. Gimn., 12. évf.)

7 dolgozat érkezett. Helyes 6 megoldás. Hiányos (2 pont) 1 dolgozat.

P. 5664. *Sokszor halljuk, hogy a sarkokon olvadó jég lassítja a Föld tengely körüli forgását. Becsüljük meg a jelenség nagyságát! Az Antarktisz területe 14 millió km^2 , az Arktisz jégtakaróját is tekintsük ugyanekkorának. Vizsgáljuk azt, ha a Déli, illetve az Északi sarkon 1 m vastagságban elolvad a jég.*

a) *Mennyivel változik a tengerszint az egyik és a másik esetben?*

b) *Mennyivel változik egy földi nap hossza?*

(5 pont)

Közli: Cserti József, Budapest

Megoldás. A feladatban felhasznált megadott, táblázatokból kikeresett és számított adatok:

az Antarktisz (és az Arktisz) területe: $A = 14$ millió $\text{km}^2 = 1,4 \cdot 10^{13} \text{ m}^2$,

az olvadó jég vastagsága: $h = 1 \text{ m}$,

a jég sűrűsége: $\rho_j = 917 \text{ kg/m}^3$, a víz sűrűsége: $\rho_v \approx 1000 \text{ kg/m}^3$,

a Föld sugara: $R = 6,371 \cdot 10^6 \text{ km}$,

a Föld tehetetlenségi nyomatéka⁴: $\Theta_{\oplus} = 8,04 \cdot 10^{37} \text{ kgm}^2$,

az óceánok és tengerek felszíne: $A_o \approx 3,61 \cdot 10^{14} \text{ m}^2$ (a Föld felszínének 70,8%-a),

a) I. Antarktisz (szárazföldi jég).

Az elolvadó jég térfogata:

$$V_j = Ah = 1,4 \cdot 10^{13} \text{ m}^3,$$

a keletkező víz térfogata:

$$V_v = \frac{\rho_j}{\rho_v} V_j \approx 1,28 \cdot 10^{13} \text{ m}^3.$$

Ebből a tengerek vízszintemelkedése:

$$\Delta h = \frac{V_v}{A_o} \approx 0,0358 \text{ m} \approx 3,6 \text{ cm}.$$

⁴Irodalmi adat. A Föld tehetetlenségi nyomatékára az egyszerű homogén gömb modellel ennél nagyobb érték adódik: $\Theta = \frac{2}{5}mR^2 \approx 9,7 \cdot 10^{37} \text{ kgm}^2$. Az eltérés fő oka (a nem teljesen szabályos gömb alakon kívül), hogy a Föld nem homogén, a magjának sokkal nagyobb a sűrűsége, mint a kéregnek.

II. Arktisz (tengeri jég).

A tengeri jég úszik a vízen, így a megolvadás előtt is a súlyának megfelelő mennyiségű vizet szorít ki. A tengerek szintje ezért az olvadás miatt nem emelkedik.

b) Az olvadás közben a Föld perdülete nem változik, így

$$N = \Theta\omega = \text{állandó}.$$

Ebből a napok $T = 1 \text{ nap} \approx 86400 \text{ s}$ hosszának⁵ változása:

$$\Delta T = \frac{\Delta\Theta}{\Theta_{\oplus}} T.$$

Az elolvadó jég tömege:

$$m_j = \varrho_j V_j = 1,284 \cdot 10^{16} \text{ kg}.$$

A (kezdeti) tehetetlenségi nyomaték meghatározásához a jeget göombsüveg alakúnak tekintjük.⁶ Ekkor a területe így is felírható:

$$A = 2\pi R^2(1 - \cos\vartheta),$$

ahol ϑ a jégtakaró peremének szögtávolsága a sarkoktól. Az adatokat behelyettesítve $\vartheta \approx 19^\circ$.

A jégsapka tehetetlenségi nyomatéka a Föld forgástengelyére vonatkoztatva:

$$\Theta_0 = \int_V \varrho_j (R \sin\vartheta)^2 dV = 2\pi \varrho_j h R^4 \int_0^\vartheta \sin^3\vartheta d\vartheta,$$

ahol $dV = 2\pi R \sin\vartheta h R d\vartheta$ a jégsapka elemi gömbvének térfogata. Az integrál értéke:

$$\int_0^\vartheta \sin^3\vartheta d\vartheta = \left[-\cos\vartheta + \frac{1}{3} \cos^3\vartheta \right]_0^\vartheta = \frac{2}{3} - \cos\vartheta + \frac{1}{3} \cos^3\vartheta \approx 0,0029.$$

Ezt felhasználva és az adatokat behelyettesítve:

$$\Theta_0 \approx 2,7 \cdot 10^{28} \text{ kgm}^2.$$

I. Antarktisz.

Az olvadás után a víz elterül a világtengereken. A kontinensek eloszlása nem egyenletes, de közelítőleg úgy számolhatunk, mintha egy vékony gömbhéj lenne. Ennek tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta_1 = \frac{2}{3} m_j R^2 = 3,47 \cdot 10^{29} \text{ kgm}^2.$$

A tehetetlenségi nyomaték változása:

$$\Delta\Theta = \Theta_1 - \Theta_0 = 3,20 \cdot 10^{29} \text{ kgm}^2,$$

és ez alapján a napok hosszának változása:

$$\Delta T = \frac{\Delta\Theta}{\Theta_{\oplus}} T = 3,4 \cdot 10^{-4} \text{ s} = 0,34 \text{ ms}.$$

⁵Azért csak közelítően, mert valójában itt nem a 24 órás nap, hanem a $23^{\text{h}} 56' 4''$ -es csillagnap, a Föld állócsillagokhoz viszonyított forgási periódusának változását számítjuk.

⁶Mivel a göombsüveg magassága mindössze a Föld sugarának 5%-a, feladat megoldásának közelítései mellett a göombsüveg helyett – sokkal egyszerűbben – körlappal is számolhatunk.

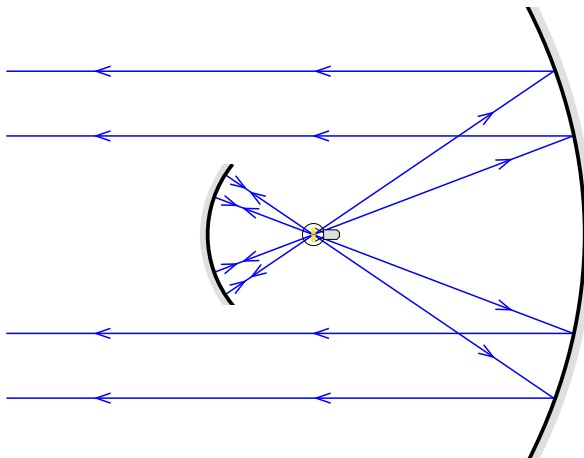
II. Arktisz.

Ebben az esetben nincs tömegátrendeződés, így a napok hossza se változik.

*Az Entrópiatagadók csapat: Budai Máté, Nacsá Domán
(Gyula, Erkel F. Gimn., 12. évf.)*

26 dolgozat érkezett. Helyes 4 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 10, hiányos (2–3 pont) 8, hibás 1, nem versenyszerű 3 dolgozat.

P. 5667. Az ábrán egy izzólámpa látható két homorú tükör között. A jobb oldali tükör párhuzamos fénynyalábot állít elő, míg a bal oldali, kis méretű tükör megakadályozza, hogy az izzólámpa fényének jelentős része kiszökjön ebből az összeállításból, ami egy gépkocsi reflektorának felel meg.



a) Magyarázzuk el, hogy miért ad erősebb fényt a reflektor a bal oldali kis tükör használatával, mint nélküle!

b) Vonalzóval végezzünk méréseket az ábrán, és állapítsuk meg a két tükör fókusz távolságának arányát!

c) Vonalzóval elvégzett méréseink alapján becsüljük meg, hogy az izzólámpa fényének hány százaléka kerül a reflektor által előállított párhuzamos fénynyalábba a kis tükör használata nélkül, illetve a kis tükör beépítésével!

(5 pont)

Példatári feladat nyomán

Megoldás. a) A reflektornak párhuzamos fénynyalábot kell előállítania. A kis tükör visszajuttat a parabolatükörre olyan fénysugarakat, amelyek enélkül más irányokba szóródtak volna. Ezáltal annak ellenére megnő a reflektor fényereje, hogy a kis tükör a fénynyaláb egy részét kitakarja.

b) A nagy tükör egy parabolatükör, aminek éppen a fókuszában helyezkedik el az izzó (ezért hoz létre párhuzamos nyalábot), így annak f_1 fókusz távolsága közvetlenül lemérhető. A kis tükör egy gömbtükör, ennek középpontjában van az izzó (ezért a fény ugyanabba az irányba verődik vissza), így a gömb r sugara olvasható le. Az f_2 fókusz távolság ennek fele.

A kinyomtatott ábráról leolvasott és az ezekből számolt értékek:

$$\begin{aligned}f_1 &= 8,8 \text{ cm}, \\r &= 3,5 \text{ cm}, \\f_2 &= \frac{r}{2} = 1,75 \text{ cm}, \\\frac{f_1}{f_2} &= 5,03 \approx 5.\end{aligned}$$

Megjegyzés. A feladatban nincsenek abszolút méretek megadva, a kinyomtatott ábráról leolvasott méretek a nagyítástól függenek. Így csak a fókusz távolságok keresett aránya független a nyomtatás nagyításától.

c) A Φ fényáramokat a *térszögek*⁷ alapján lehet kiszámolni:

$$\Phi = I\Omega,$$

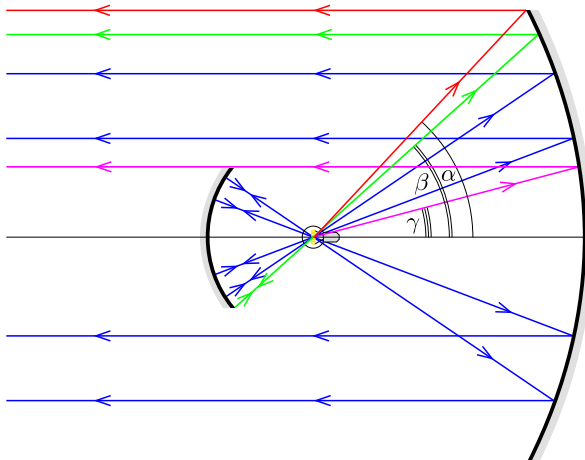
ahol I a fényforrás intenzitása, Ω pedig a térszög. Egy φ félnyílásszögű kúphoz tartozó térszög:

$$\Omega(\varphi) = 2\pi(1 - \cos \varphi),$$

a teljes térszög pedig 4π .

Az *ábrán* három különböző szöget jelöltünk be: α és β a nagy, illetve a kis tükör pereméhez húzott sugarak optikai tengellyel bezárt szöge, γ pedig annak a sugárnak a szöge, amely a parabolatükörről visszaverődve éppen a kis tükör peremét érinti. Erre azért van szükségünk, mert az ennél kisebb szögben induló fénysugarakat a kis tükör kitakarja. A kinyomtatott ábrán lemérve:

$$\alpha \approx 47^\circ, \quad \beta \approx 42^\circ, \quad \gamma \approx 15^\circ.$$



⁷A térszög nagysága a térszög által egy r sugarú gömb felületéből kimetszett felületdarab területe osztva r^2 -tel ($\Omega = A/r^2$). Mértékegysége a szteradián (sr).

A kis tükör nélkül az izzó fényének hasznosuló hányada:

$$\frac{\Omega(\alpha)}{4\pi} = \frac{2\pi(1 - \cos\alpha)}{4\pi} = \frac{1 - \cos\alpha}{2} \approx 16\%.$$

A kis tükör használatával ehhez hozzáadódik az arról visszaverődő fény is, viszont mindkettőből le kell vonnunk a kitakart részt. Ez alapján a hasznosuló fényáram és a teljes fényáram aránya:

$$\frac{\Omega(\alpha) + \Omega(\beta) - 2\Omega(\gamma)}{4\pi} = \frac{2\cos\gamma - \cos\alpha - \cos\beta}{2} \approx 25\%.$$

Láthatjuk, hogy a kis tükör több mint másfélszeresére növeli a reflektor teljesítményét.

Bús László Teodor (Ceglédi Kossuth L. Gimn., 12. évf.) és
Sümeghi Nándor (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján.

Megjegyzés. A fényből az izzó foglalata is kitakar valamennyit, de ezt nem vettük figyelembe a számításnál. A kis tükröt gyakran beleépítik az izzóba.

26 dolgozat érkezett. Helyes 3 megoldás. Kicsit hiányos (3–4 pont) 15, hiányos (1–2 pont) 7, nem versenyszerű 1 dolgozat.

P. 5669. Egy $R = 5$ cm sugarú, $m = 0,5$ kg tömegű, homogén anyageloszlású tárcsa $r = 0,5$ cm sugarú tengelyéhez egy $L = 20$ cm hosszúságú, vékony fonál egyik végét rögzítjük, és a fonál $L/2$ hosszúságú részét a tengelyre feltekerjük. A függőleges fonál másik végét rögzített helyzetben tartva a tárcsát elengedjük.

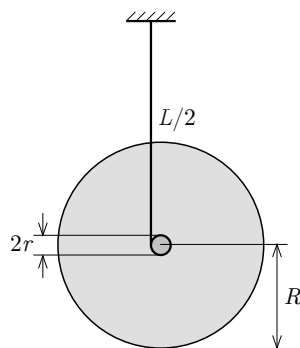
a) Mekkora erő feszíti a fonalat az egyenletesen gyorsuló tárcsa („jojó”) mozgása közben?

b) Mekkora a tárcsa tengelyének sebessége a fonál kitekeredésének pillanatában?

c) A tárcsa függőleges mozgásának megfordulásakor a fonalat feszítő erő egy rövid időre megnő (a tárcsa „ránt egyet” a fonálon). Becsüljük meg a fonálerő átlagos értékét a rántás alatt!

A tengely tömegét, a fonál függőlegestől való eltérését és a közegellenállást elhanyagolhatjuk. A tárcsa szögsebességét az „átfordulás” alatt tekintsük állandónak.

(6 pont)



Közli: Gnädig Péter, Vácduka

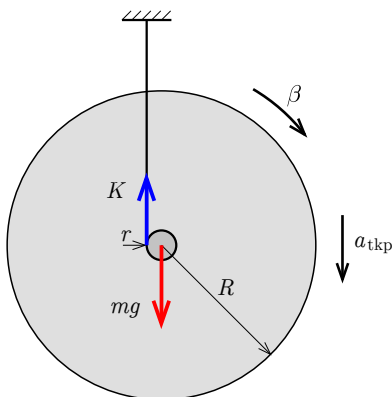
Megoldás. a) A tárcsára két erő hat: a nehézségi erő és a fonálerő (ábra). A tömegközéppont gyorsulása a_{tkp} , a tárcsa szöggyorsulása β . A mozgásegyenletek:

$$ma_{\text{tkp}} = mg - K,$$

$$\Theta\beta = Kr,$$

ahol $\Theta = \frac{1}{2}mR^2$ a tárcsa tehetetlenségi nyomatéka. A kényszerfeltétel miatt (a fonál nem csúszik meg a tengelyen):

$$a_{\text{tkp}} = r\beta.$$



Az egyenletrendszer megoldása:

$$K = \frac{mg}{1 + \frac{2r^2}{R^2}} = 4,81 \text{ N},$$

$$a_{\text{tkp}} = \frac{g}{1 + \frac{R^2}{2r^2}} = 0,192 \text{ m/s}^2.$$

Tehát a fonálerő a letékeredés alatt: $K = 4,81 \text{ N}$.

b) A tengely a_{tkp} gyorsulással tesz meg $L/2$ távolságot, így a végsebessége:

$$v = \sqrt{La_{\text{tkp}}} = \sqrt{\frac{Lg}{1 + \frac{R^2}{2r^2}}} = 0,196 \text{ m/s}.$$

Megjegyzés. A végsebesség (a gyorsulás ismerete nélkül) az energiamegmaradásból is meghatározható:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2 = mg\frac{L}{2},$$

amiből a $v = r\omega$ kényszerfeltétel és $\Theta = \frac{1}{2}mR^2$ felhasználásával:

$$v^2 \left(1 + \frac{R^2}{2r^2} \right) = Lg,$$

$$v = \sqrt{\frac{Lg}{1 + \frac{R^2}{2r^2}}},$$

az előző megoldással megegyezően.

c) A rántás alatt a tömegközéppont sebessége irányt vált, így a rendszer impulzusa

$$\Delta I = 2mv$$

értékkel megváltozik. Eközben a tengely közel állandó szögsebességgel átfordul, a π szögelforduláshoz

$$\Delta t = \frac{\pi}{\omega} = \frac{r\pi}{v}$$

időre van szükség. (Itt ismét felhasználtuk a $v = r\omega$ kényszerfeltételt.) A rántás alatt a testre ható átlagos erő:

$$K_r - mg = \frac{\Delta I}{\Delta t},$$

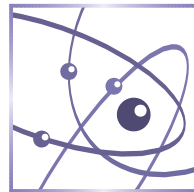
amiből a keresett (átlagos) fonálerő a rántás közben:

$$K_r = \frac{\Delta I}{\Delta t} + mg = \frac{2mv^2}{r\pi} + mg = \left(\frac{4Lr}{\pi(2r^2 + R^2)} + 1 \right) mg = 7,35 \text{ N}.$$

Papp Emese Petra (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 11. évf.)

36 dolgozat érkezett. Helyes 11 megoldás. Kicsit hiányos (4–5 pont) 17, hiányos (1–3 pont) 7, nem versenyszerű 1 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok



M. 445. Mérjük meg, hogy egy adott granuláris anyagnak (pl. rizs, gersli stb.) mekkora a térkitöltése! Mennyire függ ez a rendszer preparálásától (pl.: tömörítés, rázogatózás stb.)?

(6 pont)

Közli: Széchenyi Gábor, Budapest

G. 905. A folyón lefelé halad egy evezős, a parthoz képest 8 m/s sebességgel. Szembe jön vele egy motorcsónak a vízhez viszonyított 10 m/s sebességgel. Találkozásuk után 10 másodperccel 160 méterre vannak egymástól. Mekkora sebességgel folyik a folyó?

(3 pont)

Versenypontszám nyomán

G. 906. A sós tengervíz sűrűsége 1025 kg/m^3 , az édesvízé 1000 kg/m^3 .

a) Hogyan változik a hajóra ható felhajtóerő nagysága, amikor a folyó torkolatát elhagyva kiúszik a nyílt tengerre?

b) Számítsuk ki, hogy 1 m^3 tengervíz hány kg sót tartalmaz, ha tudjuk, hogy a tengeri só sűrűsége 2200 kg/m^3 .

Tegyük fel, hogy a só és a víz keverése nem jár térfogatváltozással.

(3 pont)

Versenypontszám nyomán

G. 907. Az egyenletes tömegeloszlású, $m = 0,7 \text{ kg}$ tömegű, ABC szabályos háromszög alakú lemez A csúcsa az ábra szerint csuklóval csatlakozik a függőleges falhoz. A háromszög vízszintes AB oldalának B végpontját egy fonál köti össze a fallal. A fonál a vízszintessel $\varphi = 60^\circ$ -os szöget zár be.

a) Mekkora erő ébred a fonálban?

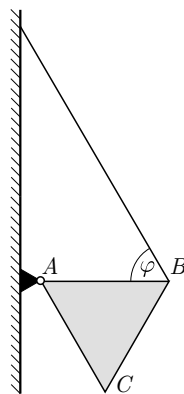
b) Mekkora nagyságú, és milyen irányú erővel terheli a háromszöglemez a csuklót?

(4 pont)

Közli: Zsigri Ferenc, Budapest

G. 908. Mennyi hőt közölünk egy 15°C -os, $4,00 \text{ cm}$ átmérőjű rézgolyóval, hogy ne férjen át egy $4,02 \text{ cm}$ átmérőjű lyukon?

(3 pont)



P. 5688. Egy adott pontból α szög alatt v_0 kezdősebességgel elhajítunk egy súlyos testet. Adjuk meg a pálya egyenletét abban a ferdeszögű koordináta-rendszerben, amelynek egyik tengelye a hajtás irányába, a másik pedig a nehézségi erő irányába mutat. Kapcsolatba hozható-e az egyenletben fellépő állandó a parabola alakú pályagörbe p „paraméterével”?

(4 pont)

Példatári feladat nyomán

P. 5689. Tekintsük a Föld Nap körüli pályáját 150 millió kilométer sugarú körnek. Tegyük fel, hogy egy üstökös az ekliptika síkjában, parabolapályán közelít a Naphoz úgy, hogy a Föld pályáját kétszer metszi, és a két metszéspontot összekötő egyenes szakasz hossza éppen a földpálya átmérője. (Szerencsére a Föld jó messzire elkerüli az üstököst, amikor az a földpálya közelében mozog.)

a) Mennyire közel halad el az üstökös a Nap középpontjához, és mekkora a sebessége ekkor?

b) Mekkora szögben metszi egymást a Föld és az üstökös pályája?

(5 pont)

Közli: *Honyek Gyula*, Veresegyház

P. 5690. Egy α hajlásszögű lejtőn G súlyú kicsiny test nyugszik. A test és a lejtő közötti tapadó súrlódás együtthatója $\mu > \tan \alpha$.

Legalább mekkora nagyságú és milyen irányú erővel tudjuk a testet megmozdítani?

(5 pont)

Közli: *Gnädig Péter*, Vácduka

P. 5691. Határozzuk meg egy vékony, m tömegű, homogén tömegeloszlású, a oldalú szabályos háromszög alakú lemez tehetetlenségi nyomatékát az egyik csúcán áthaladó tengelyre vonatkozóan, ha az

- a háromszög síkjára merőleges,
- a magasságvonal,
- az előző két tengelyre merőleges.

(5 pont)

Közli: *Zsigri Ferenc*, Budapest

P. 5692. Egy adott mennyiségű egyatomos ideális gáz kvázisztatikusan eljut a kezdeti p_0 nyomású és V_0 térfogatú állapotából a p_0 nyomású és $2V_0$ térfogatú végállapotába. A folyamatot úgy választjuk meg, hogy a gáz hőmérséklete sohasem csökkenhet, illetve a gáz sohasem adhat le hőt.

a) Minimálisan mekkora hőt közölhettünk a gázzal?

b) Maximálisan mekkora hőt közölhettünk a gázzal?

(5 pont)

KVANT feladat

P. 5693. Hat darab egyforma R ellenállásból egy $ABCD$ tetraédert állítunk össze, és a tetraéder A és B , valamint C és D csúcsa közé egy-egy U_0 feszültségű telepet kapcsolunk. Mennyi hő fejlődik adott T idő alatt az egész hálózaton? (A telepek belső ellenállása elhanyagolható.)

(4 pont)

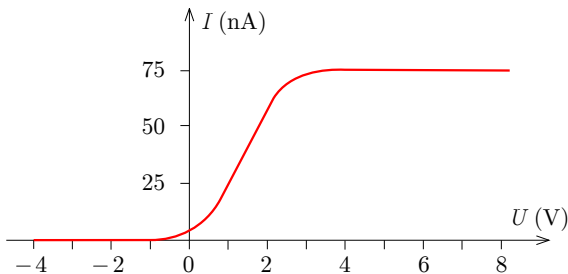
Példatári feladat nyomán

P. 5694. Egy hagyományos optikai ráccsal előállítjuk egy nátriumgőzlámpa fényének diffrakciós képét. Becsüljük meg, hogy hány vékony részből áll a rács, ha első rendben éppen hogy csak fel tudjuk bontani a nátriumlámpa két, 589,6 nm és 590,0 nm hullámhosszú spektrumvonalát!

(5 pont)

Példatári feladat nyomán

P. 5695. Állandó teljesítményű, 420 nm hullámhosszúságú fénynyalábbal cézium katódú vákuum-fotocellát világítunk meg. Az alábbi grafikon mutatja a fotocella fotoáramának I erősségét az anód katódhoz viszonyított U feszültségének függvényében.



a) Mekkora a cézium kilépési munkája?

b) Legalább mekkora teljesítményű fénynyaláb érkezett a fotocella katódjára?

(4 pont)

Tornyai Sándor fizikaverseny, Hódmezővásárhely

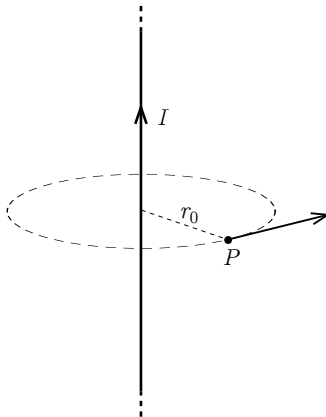
P. 5696. Vákuumban függőlegesen elhelyezkedő, hosszú, egyenes vezetőben időben állandó áram folyik. A vezetőtől r_0 távolságra lévő P pontból az ábra szerint egy protont indítunk az egyenes vezetőre és a P pontra illeszkedő síkra merőleges irányban. Mozgása során a proton maximális távolsága a vezetőtől $4r_0$.

a) A mozgás során mekkora maximális ϑ szöget zár be a proton mozgásiránya a vízszintessel?

b) Mekkora a ϑ szög abban a pillanatban, amikor a proton $2r_0$ távolságra van az egyenes vezetőtől?

(6 pont)

Közli: Vigh Máté, Herceghalom

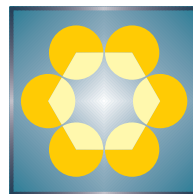


Beküldési határidő: 2026. január 15.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS (Volume 75. No. 9. December 2025)



Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 559): **K. 879.** A bunny is carrying carrots in its basket. If it meets another bunny, it gives it one carrot. If it meets a fox, the fox takes half of its carrots. It meets 4 animals in total (each one is either a bunny or a fox) during which, at some point, it is left with no carrots. How many carrots could it have started with? **K. 880.** Eight three-legged dragons formed a choir. As we all know, a three-legged dragon can have one, three, seven, or nine heads. The three-headed ones are sopranos, the seven-headed ones are mezzos, the nine-headed ones are all altos, and the one-headed ones do not sing, they can only be choir leaders. The dragons have altogether twice as many heads as legs. How many heads could have sung each voice of the famous three-voice choral piece: “I wish I were a rosebud”. **K. 881.** Andris, Bori, Csaba, Dóri, Egon, Fanni and Gábor took part in a summer camp together. Andris knows everybody except Fanni, Bori knows three of the kids, Csaba knows one kid, and Dóri knows half as much of the kids as Egon. Fanni knows one less kid than Gábor. (Acquaintances are considered mutual.) Find the possible number of acquaintances of Fanni. **K/C. 882.** Inside regular dodecagon $ABCDEFGHIJKL$ we draw squares on diagonals AC and FH . Prove that the two squares share a common vertex. **K/C. 883.** A sequence is obtained with the following recursive method: if member t is a positive odd number, then the next member is $3t - 9$, if it's a positive even number, then the next member is $2t - 7$. Suppose that the sequence alternates between two positive values: $a, b, a, b, \dots$. Find the possible values of a and b .

New exercises for practice – competition C (see page 577): **Exercises up to grade 10:** **K/C. 882.** See the text at Exercises **K. K/C. 883.** See the text at Exercises **K. Exercises for everyone:** **C. 1878.** How many four-digit positive integers in base ten are there in which at most one of the digits is divisible by 3, the sum of the digits is 15, and the sum of the mod 3 remainders of the digits is 6? (Proposed by Bálint Bíró, Eger) **C. 1879.** A convex n -gon is given on the table, the sides of which have length 2. We place a disk with unit radius on each vertex of the polygon such that the adjacent disks are tangent to each other. We roll another circular token with unit radius around this arrangement such that it returns to its initial position. Determine, as a function of n , the total angle through which this disk rotates during the rolling process. (German competition problem) **C. 1880.** Solve equation $(x+1)! = x^3 - x$ on the set of natural numbers. (Proposed by Bálint Bíró, Eger) **Exercises upwards of grade 11:** **C. 1881.** Given an $n \times n$ chessboard, we want to cover it without overlaps using L-shaped pieces consisting of 3 squares, in such a way that at most one square remains uncovered. Prove that this is possible for any positive integer $n \neq 3$. (All the sides of the L-shape should follow the grid lines.) (Proposed by Mátyás Czett, Zalaegerszeg) **C. 1882.** Let $ABCD$ be a convex quadrilateral, and let I be the incentre of triangle ABD . Prove that if $CB = CD = CI$, then $ABCD$ is a cyclic quadrilateral. (Proposed by Viktor Vigh, Sándorfalva)

New exercises – competition B (see page 578): **B. 5494.** Anna and Béla plays the following game on a 2×2026 board. They take turns to place dominoes on the board until no new domino can be placed on the board. If the board is fully covered, the winner is Anna, otherwise Béla is the winner. Who has a winning strategy, if Anna is the first player? (A domino covers two adjacent squares on the board. The dominoes cannot extend beyond the edges of the board and cannot overlap each other.) (3 points) (Proposed by Márton Lovas, Budakalász) **B. 5495.** The legs of a right triangle are a and b , its hypotenuse is c , and its inradius is r . Prove that $2r^2 = (c-a)(c-b)$. (3 points) (Proposed by Géza

Kiss, Csömör) **B. 5496.** Let $p(r)$ denote the product of the divisors of positive integer r . For a given positive integer n determine those positive integers k for which $p(k^n)$ is the n^{th} power of an integer. (4 points) (Proposed by *Áron Hotvátth, Nemesbőd*) **B. 5497.** Circular arc k with endpoints AB is given. Let F be the midpoint of the arc. A circle is tangent internally to k at point P , and tangent internally to line segment AB at point Q . Prove that the sum of the radii of circle APQ and BPQ equals the length of line segment AF . (4 points) (Proposed by *László Németh, Fonyód*) **B. 5498.** Let $n \geq 2$ be a given positive integer. For which permutation $a_1, a_2, \dots, a_n$ of numbers $1, 2, \dots, n$ will the value of $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n$ be maximal? (5 points) (Proposed by *Márton Lovas, Budakalász*) **B. 5499.** Each of the vertices of a regular 45-gon are colored red, yellow or green, and each color is used exactly 15 times. A triangle is red (yellow, green), if all three of its vertices is red (yellow, green). Prove that there exists a red, a yellow and a green triangle, all three of which are congruent to each other. (6 points) (Proposed by *Sándor Róka, Nyíregyháza*) **B. 5500.** Find the smallest possible value of $|a| + |b| + |c| + |d| + |e|$, if equation $x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + 1 = 0$ has a real root. (5 points) (Proposed by *Ákos Somogyi, London*) **B. 5501.** The incircle of triangle ABC is tangent to sides BC , CA and AB at points D , E and F , respectively. Let G be the antipode of point F on the incircle. Lines GD and GE intersect line AB at points D' and E' , respectively. Prove that circles AED' and BDE' intersect each other on the incircle. (6 points) (Proposed by *Roland Jármai, Budapest*)

New problems – competition A (see page 579): **A. 920.** Given a non-isosceles triangle ABC , let its circumcircle be denoted by Ω . Let ω_A be the *mixtilinear incircle* corresponding to vertex A (that is, the circle tangent to sides AB , AC , and internally tangent to Ω). Define ω_B and ω_C analogously. Let the points where $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ touch Ω be denoted by T_A, T_B, T_C , respectively. Show that the *Monge line* of the circles $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ (that is, the line passing through the pairwise external homothety centers of the three circles) coincides with the *Pascal line* of the hexagon $AT_C B T_A C T_B$ (that is, the line passing through the points $AT_C \cap T_A C$, $T_C B \cap C T_B$, $B T_A \cap T_B A$). (Proposed by *Sha Jingyuan, Budapest*) **A. 921.** Let $n \geq 2$ be an integer. Let $x_1, \dots, x_n$ be positive real numbers whose product is $n - 1$. Prove that $x_1 + \dots + x_n - \left(\frac{1}{x_1^{n-1}} + \dots + \frac{1}{x_n^{n-1}} \right) < (n - 1)^{1 + \frac{1}{n}}$. (Proposed by *Áron Bán-Szabó, Palaiseau*) **A. 922.** Fix two positive integers a and b . Let n be a positive integer, and let T be a black–white coloring of the cells of an $an \times bn$ grid, containing at least two white cells. Csizusz the snail starts on a white cell, visits all white cells exactly once, and then returns to the starting cell, always moving between side-adjacent white cells. He then notices that he was able to do this in exactly one way (that is, once he made his first move, there was a unique way to complete the cycle). Let $\mathcal{T}_n$ denote the set of all colorings T satisfying this property, and let $\phi(T)$ denote the number of white lattice points in T . Show that $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\max_{T \in \mathcal{T}_n} \phi(T)}{abn^2}$ exists for every choice of positive integers a and b , and determine the value of L . (Proposed by *Márton Lovas and Csongor Beke, Cambridge*)

Problems in Physics

(see page 603)

M. 445. Measure the space-filling properties of a given granular material (e.g. rice, barley, etc.). To what extent does this depend on the preparation of the system (e.g., compaction, shaking, etc.)?

G. 905. A row boat is moving downstream at a speed of 8 m/s relative to the shore. A motorboat is coming upstream towards the row boat at a speed of 10 m/s relative to the water. Ten seconds after they meet, they are 160 meters apart. What is the speed of the river? **G. 906.** The density of salt water is 1025 kg/m^3 , while that of fresh water is 1000 kg/m^3 . a) How does the buoyant force exerted on a ship change when the ship leaves the river mouth and sails out into the open sea? b) Calculate how many kilograms

of salt are contained in 1 m^3 of seawater, given that the density of sea salt is 2200 kg/m^3 . Assume that mixing salt and water does not cause any change in volume. **G. 907.** Vertex A of the ABC equilateral triangle-shaped plate, which has uniform mass distribution and mass $m = 0.7 \text{ kg}$, is connected to the vertical wall with a hinge, as shown in the figure. Vertex B , which is the vertex at the other end of the horizontal side AB of the triangle, is connected to the wall by a string. The string makes an angle of $\varphi = 60^\circ$ with the horizontal. *a)* What is the tension in the string? *b)* What is the magnitude and the direction of the force exerted on the hinge by the triangle-shaped plate? **G. 908.** How much heat must be transferred to a copper ball with a diameter of 4.00 cm and a temperature of 15°C so that it cannot pass through a hole with a diameter of 4.02 cm ?

P. 5688. From a given point, a heavy body is thrown at an angle α with an initial velocity v_0 . Give the equation of the trajectory in the oblique coordinate system, where one axis points in the direction of the initial velocity and the other in the direction of the gravitational force. Can the constant in the equation be related to the “parameter” p of the parabolic trajectory? **P. 5689.** Consider the Earth’s orbit around the Sun as a circle with a radius of 150 million kilometres. Suppose that a comet in the plane of the ecliptic approaches the Sun along a parabolic path such that it intersects the Earth’s orbit twice, and the length of the straight line connecting the two points of intersection is exactly the diameter of the Earth’s orbit. (Fortunately, the Earth misses the comet by a wide margin when it moves close to the Earth’s orbit.) *a)* How close does the comet get to the centre of the Sun, and what is its speed at that position? *b)* What is the angle between the Earth’s orbit and the comet’s orbit? **P. 5690.** A small body of weight G rests on a slope of angle α . The coefficient of friction between the body and the slope is $\mu > \tan \alpha$. What is the minimum force needed to move the body, and in what direction should it be exerted? **P. 5691.** Determine the moment of inertia of a thin, equilateral triangle-shaped plate of uniform mass distribution, with mass m , and side length a , with respect to an axis, which goes through one of the vertices of the triangle, and *a)* which is perpendicular to the plane of the plate, *b)* which coincides with the altitude of the triangle, *c)* the axis is perpendicular to the previously described two axes. **P. 5692.** A given quantity of monatomic ideal gas is quasi-statically taken from its initial state of pressure p_0 and volume V_0 to its final state of pressure p_0 and volume $2V_0$. The process is chosen so that the temperature of the gas never decreases and the gas never releases heat. *a)* What is the minimum amount of heat that can be transferred to the gas? *b)* What is the maximum amount of heat that can be transferred to the gas? **P. 5693.** A tetrahedron is assembled from six identical resistors each of resistance R , and two batteries, each with a voltage of U_0 , such that one battery is connected across the vertices AB and the other is connected across the vertices CD . How much heat is generated over a given time T across the entire network? (The internal resistance of the batteries is negligible.) **P. 5694.** We use a conventional diffraction grating to produce the diffraction pattern of the light from a sodium vapour lamp. Estimate how many thin slits the grating consists of if we can just resolve the two spectral lines of the sodium lamp with wavelengths of 589.6 nm and 590.0 nm in the first order. **P. 5695.** We illuminate a vacuum photocell with a caesium cathode using a constant-power light beam with a wavelength of 420 nm . The graph on page 605 shows the intensity I of the photocell’s photocurrent as a function of the voltage U between the anode and cathode. *a)* What is the work function of caesium? *b)* What is the minimum power of the light beam that reaches the cathode of the photocell? **P. 5696.** A constant current flows through a long, straight conductor positioned vertically in vacuum. From point P , located at a distance r_0 from the conductor, we launch a proton onto the straight conductor in a direction perpendicular to the plane containing point P , as shown in the figure. During its motion, the maximum distance of the proton from the conductor is $4r_0$. *a)* During the motion, what is the maximum angle ϑ between the direction of motion of the proton and the horizontal? *b)* What is the angle ϑ at the moment when the proton is at a distance $2r_0$ from the straight conductor?

FIZIKA AZ ELTE-N

TANULJ FIZIKÁT AZ ELTE-N!

ALAKÍTSD A JÖVŐ TECHNOLÓGIÁJÁT!

6 FÉLÉV

ALAPKÉPZÉS

- ERŐS ELMÉLETI TUDÁSALAP MEGSZERZÉSE
- ÖNÁLLÓ GONDOLKODÁS
- KÍSÉRLETEZÉS ÉS PROGRAMOZÁSI KÉSZSÉGEK FEJLESZTÉSE

VÁLASZTHATÓ IRÁNYOK:

FIZIKUS
INFORMATIKUS FIZIKUS
BIOFIZIKUS
CSILLAGÁSZ
GEOFIZIKUS

10 FÉLÉV

TANÁRKÉPZÉS

TANÁRNAK LENNI NEM CSAK HIVATÁS, HANEM ALKOTÁS IS!

KREATÍV, VÁLTOZATOS, FIATALOK KÖZÖTT VÉGZETT MUNKA, AHOL MEGMUTATOD A DIÁKOKNAK A FIZIKAI VILÁG SZÉPSÉGEIT.

4 FÉLÉV

MESTERKÉPZÉS

- SZAKMAI TUDÁS ELMÉLYÍTÉSE
- KUTATÁSBA VALÓ BEKAPCSOLÓDÁS
- FELKÉSZÜLÉS A KUTATÓ- FEJLESZTŐ KARRIERRE

FIZIKUS MSc
CSILLAGÁSZ MSc
ANYAGTUDOMÁNYI MSc

KUTATÁSI TERÜLETEK

- ANYAGTUDOMÁNY ÉS SZILÁRDTESTFIZIKA
- RÉSZECSCKE- ÉS ATOMMAGFIZIKA
- STATISZTIKUS FIZIKA
- BIOLÓGIAI FIZIKA ÉS KVANTUMRENDSZEREK FIZIKÁJA
- CSILLAGÁSZAT ÉS ŰRFIZIKA
- A FIZIKA TANÍTÁSA

8 FÉLÉV

DOKTORI KÉPZÉS

ÖNÁLLÓ KUTATÁS ÉS VALÓDI TUDOMÁNYOS EREDMÉNYEK ELÉRÉSE AKÁR NEMZETKÖZI KUTATÓCSOPORTOKKAL EGYÜTTMŰKÖDVE!



[HTTPS://PHYSICS.ELTE.HU/](https://physics.elte.hu/)



ELTE | TTK
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

AIT-BUDAPEST



Morgan Stanley



hiflylabs

Az ELTE a legrégebbi, mindmáig
működő magyar egyetem



Természettudományi Kar



Az ELTE Természettudományi Kara (TTK) minden felmérés szerint az egyik legjobb egyetemi kar Magyarországon. A képzések a természettudományok teljes spektrumát felölelik: *matematika, biológia, fizika, földrajz, földtudományi, kémia, környezettan* alapszakok (BSc) – ezeken belül különböző specializációk (biofizikus, csillagász, meteorológus...) – kerülnek meghirdetésre. <https://ttk.elte.hu/>



Matematikai Intézet



A matematika alapszak (BSc) egyaránt felkészít a kutatói életpályára és a matematika különböző területeken történő magas szintű alkalmazására is – kiváló karrierlehetőségeket nyújtva.

Az intézetben nagy hangsúlyt helyezünk a tehetséggondozásra, és hogy a választható szintek és blokkok révén mindenki megtalálja a neki megfelelő kurzusokat.

Az intézetben általános- és középiskolai tanárképzést is folytatunk osztatlan *matematikatanári* szakon. <https://www.math.elte.hu/>

Az ELTE TTK idén december 9-én tartja nyílt napját: https://ttk.elte.hu/nyiltnap_2025. Ha esetleg későn jutna el hozzád ez a hír, a program a fenti linken vissza is nézhető.

