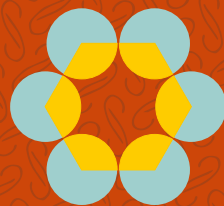
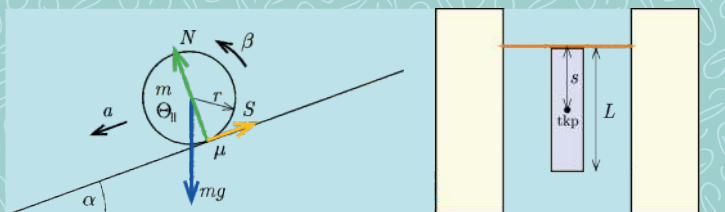


Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok

Informatika rovattal



KöMaL



Az M. 444-es mérési feladat kísérleteinek vázlatai



Kép a *Rejtvények, ördöglakatok* cikkhez

Beszámoló a 2025. évi Kürschák József matematika
versenyről | O'Beirne olvasztótégelye | Irány az egyetem! |
Tehetetlenségi nyomatók mérése | Felhívások: Kunfalvi
Rezső Olimpiai Válogatóverseny; Matek az utcán 2026

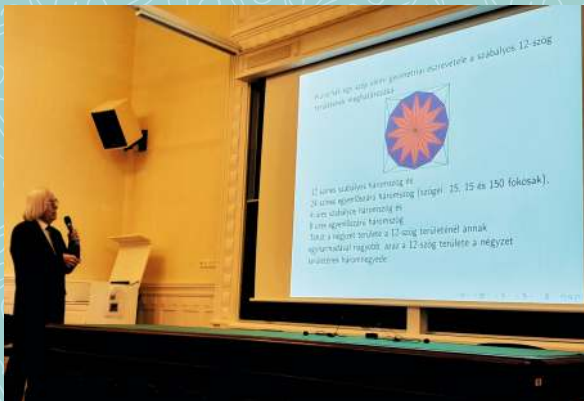
76. évfolyam
2. szám
2026.
február



Képek a 2025. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny díjkiosztójáról



Fleiner Tamás és Kovács Benedek



Pálffy Péter Pál előadása Kürschák Józsefről



Maga Péter előadása



Czanik Pál, dicséretet



Sarusi-Kis Balázs,
dicséretet



Morvai Várkonyi Albert,
II. díj



KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE

ALAPÍTOTTA: ARANY DÁNIEL 1894-ben

76. évfolyam 2. szám

Budapest, 2026. február

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta. ÁRA: 1600 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

<i>Fleiner Tamás:</i> Jelentés a 2025. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyéről.....	66
<i>Szilassi Lajos:</i> Rejtvények, ördöglatkok – O’Beirne olvasztótégléje.....	71
<i>Tatár Zsuzsanna Mária:</i> Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire.....	75
<i>Jócsik Csilla:</i> Megoldásvázlatok a 2026./1. szám matematika gyakorló feladatsorához.....	78
Matematika C gyakorlatok megoldása (1844., 1865.).....	87
Matematika feladatok megoldása (5472., 5489.)	90
A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok (889–893.).....	94
A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (892–893., 1888–1892.).....	95
A B pontversenyben kitűzött feladatok (5510–5517.).....	96
Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (926–928.).....	97
Matematikai képzések az ELTE TTK-n.....	98
Matematikatanár-képzés az ELTE TTK-n.....	99
Informatikából kitűzött feladatok (687–690.)..	100
Fedezd fel a világegyetemet – az atomoktól a csillagokig!.....	105
Mérési feladatok megoldása (444.).....	107
Fizika gyakorlatok megoldása (900.).....	111
Fizika feladatok megoldása (5660., 5670., 5676.)	112
Felhívás az idei Kunsfalvi Rezső Olimpiai Válogatóversenyre.....	122
Fizikából kitűzött feladatok (447., 913–916., 5706–5714.).....	122
Problems in Mathematics.....	125
Problems of the 2025 Kürschák competition...	127
Problems in Physics.....	127

Főszerkesztő: KORÁNDI JÓZSEF
Fizikus szerkesztő: VANKÓ PÉTER
Műszaki szerkesztő: FRIED KATALIN
Borító: BURGHARDT ZSUZSA
Kiadja: MATFUND ALAPÍTVÁNY
Alapítványi képviselő: KÓS RITA
Felelős kiadó: PATKÓS BALÁZS
Nyomda: OOK-PRESS Kft.
Felelős vezető: SZATHMÁRY ATTILA
INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A matematika bizottság tiszteletbeli elnöke:
HERMANN PÉTER

A matematika bizottság vezetője: KÓS GÉZA

Tagjai: BÁN-SZABÓ ÁRON, BÍRÓ BÁLINT, CZETT MÁTYÁS, GYENES ZOLTÁN, HUJTER BÁLINT, KISS GÉZA, KOZMA KATALIN ABIGÉL, MAGYAR ESZTER, NÉMETH MÁRTON, PACH PÉTER PÁL, PAULOVIČ ZOLTÁN, RATKÓ ÉVA, SIMON LÁSZLÓ BENCE, SZTRANYÁK ATTILA, UJHÁZY MÁRTON, VÍGH VIKTOR

A fizika bizottság vezetője: SZÉCHENYI GÁBOR

Tagjai: BARANYAI KLÁRA, GNÄDIG PÉTER, HONYEK GYULA, OLOSZ BALÁZS, SZÁSZ KRISZTIÁN, VÍGH MÁTÉ, VLADÁR KÁROLY, WOYNAROVICH FERENC

Az informatika bizottság vezetője:
SCHMIEDER LÁSZLÓ

Tagjai: LÓCZI LAJOS, SIEGLER GÁBOR, TÓTH TAMÁS

Fordítók: GYENES ZOLTÁN, TASNÁDI ANIKÓ

Nyelvi korrektor: ANDICS ÁGNES
Javítás koordinálása: CSOBÁNKA PETRA

Szerkesztőségi titkár: ONDINÉ SZABÓ SÁRA

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
Telefon: +36 20 320-1143
A lap megrendelhető a
<https://komalujsg.myshoprenter.hu>
oldalon keresztül.

Előfizetési díj egy évre: 12 500 Ft
Kéziratokat nem őrünk meg és nem küldünk vissza.
Minden jog a KöMaL tulajdonosaié.
E-mail: szerk@komal.hu
Internet: <http://www.komal.hu>

This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 20 320-1143
or on the Internet:
<https://komalujsg.myshoprenter.hu>.
A Lapban megjelenő hirdetések tartalmáért felelősséget nem vállalunk.



Jelentés a 2025. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyről

A Bolyai János Matematikai Társulat a 2025. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyt október 10-én, közép-európai idő szerint 14 órai kezdettel rendezte meg a következő tizenhárom helyszínen: Budapest, Cambridge, Csíkszereda, Debrecen, Eger, Győr, Gyula, Ithaca, Kolozsvár, Miskolc, Szeged, Székesfehérvár és Veszprém.

A Társulat elnöksége a verseny lebonyolítására az alábbi bizottságot kérte fel: Biró András, Fleiner Tamás (elnök), Frenkel Péter, Harangi Viktor, Kós Géza, Kovács Benedek (titkár), Maga Péter, Pach Péter Pál és Tóth Géza. A bizottság szeptember 10-i ülésén az alábbi feladatokat tűzte ki:

1. Legyen n rögzített pozitív egész. Írjuk fel a $0, 1, \dots, n-1$ számokat egy táblára valamilyen sorrendben. Két szám egymással *inverzióban áll*, ha a nagyobb megelőzi a kisebbet. Egy k számot nevezünk *sajátságosnak*, ha pontosan k másikkal áll inverzióban. Legfeljebb hány sajátágos szám lehet a táblán?

2. Ebben a feladatban tízes számrendszerben felírt számokról lesz szó. Megengedünk nullával kezdődő felírásokat is. Egy páros sok számjegyből álló számot *vághatónak* nevezünk, ha két egyenlő hosszú részre félbevágva a részek összegének négyzete az eredeti szám. Például $2025 = (20 + 25)^2$ és $0001 = (00 + 01)^2$ négyjegyű vágható számok. Bizonyítsuk be, hogy a $2n$ -jegyű vágható pozitív egész számok száma minden n -re 2-hatvány.

3. Adott $n \geq 10$ pont a síkon, nincs három egy egyenesen. Bizonyítsuk be, hogy ki lehet őket színezni pirossal és kézzel úgy, hogy minden félsík, ami legalább 10 pontot tartalmaz, tartalmaz piros és kék pontot is.

A bizottság november 27-i ülésén, a beérkezett dolgozatok átnézése után a következő jelentést fogadta el:

„A verseny minden helyszínen rendben zajlott le, 119 regisztrált versenyzőtől összesen 104 dolgozat érkezett be.

A bizottság a versenyt követően szerzett tudomást arról, hogy a 2. feladat szerepelt az MBL tábor idei felvételi tesztjén. Sajnos az is csak későn derült ki, hogy a 3. feladat nehezebb formában nem csupán az 1992. évi Kürschák versenyen, hanem 2002-ben a KöMaL-ban is kítűzésre került A.281-es sorszám alatt. A bizottság egyelőre nem tervezi, hogy a feladatot a jövőben ismételtelen kítűzi.

Az idei versenyen 53-an oldották meg az első feladatot kisebb-nagyobb hiányszággal, a második feladatban pedig 15-en értek el érdemi eredményt. A harmadik feladat bizonyult a legnehezebbnek: ebben mindössze 9 versenyző tudott nemtriviális részeredményt felmutatni.

Két versenyző lényegében helyesen oldotta meg mindhárom kítűzött feladatot, ezért

I. díjat és 100 000 Ft pénzjutalmat nyer

Aravin Péter, az Ithaca High School 9. osztályos tanulója (tanárai Frederick Deppe, Pósa Lajos és Damásdi Gábor) valamint

Bodor Mátyás, a csíkszeredai Márton Áron Főgimnázium 12. osztályos tanulója (tanára Páll Olga).

Egy versenyző helyesen oldotta meg az 1. feladatot, azonban a 2. és 3. feladatokra adott megoldása kisebb kiegészítésre szorul. Ezért a teljesítményért

II. díjban és 60 000 Ft pénzjutalomban részesül

Morvai Várkony Albert, a Gödöllői Török Ignác Gimnázium 10. osztályos tanulója (tanárai Balázsné Zsigó Ágnes, Damásdi Gábor, Dobos Sándor és Kovács Benedek).

Kilenc versenyző az 1. feladat mellett egy másik feladatot is lényegében helyesen oldott meg. Ennek megfelelően

dicséretet érdemel

Czanik Pál, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium érettségizett tanulója (tanárai Kocsis Szilveszter, Lenger Dániel, Dobos Sándor, Gyenes Zoltán, Hujter Bálint, Sándor András, Pósa Lajos, Nádor Benedek és Kovács Benedek),

Hajba Milán, a győri Révai Miklós Gimnázium és Kollégium 11. osztályos tanulója (tanárai Csete Lajos és Árki Tamás),

Holló Martin, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai Hujter Bálint, Gyenes Zoltán, Kiss Géza, Dobos Sándor, Surányi László és Nagy Kartal),

Sánta Gergely, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 11. osztályos tanulója (tanárai Dobos Sándor, Lenger Dániel, Gyenes Zoltán és Pósa Lajos),

Sárdinecz Dóra, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai Hujter Bálint, Gyenes Zoltán és Kiss Géza),

Sarusi-Kis Balázs, az ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai Steller Gábor, Kornai Júlia és Nagy Kartal),

Schmidt Botond, a budapesti Szent István Gimnázium 10. osztályos tanulója (tanárai Juhász István és Juhász Péter),

Varga Boldizsár, a Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium érettségizett tanulója, aki jelenleg az ELTE TTK matematika szakos hallgatója (tanára Holló Gábor) és

Vödrös Dániel, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 11. osztályos tanulója (tanárai Dobos Sándor, Lenger Dániel, Pósa Lajos, Simon Péter, Gyenes Zoltán, Ádám Réka és Fazakas Tünde).

A versenybizottság ezúton köszöni meg minden versenyző, felkészítő tanár és a lebonyolításban közreműködő kolléga munkáját, valamint a Lovász Alapítvány pénzdíjakhoz nyújtott támogatását, a díjazottaknak pedig további sikereket kívánva gratulál.”

A 2025. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatainak megoldásai

1. feladat. Legyen n rögzített pozitív egész. Írjuk fel a $0, 1, \dots, n-1$ számokat egy táblára valamilyen sorrendben. Két szám egymással *inverzióban áll*, ha a nagyobb megelőzi a kisebbet. Egy k számot nevezzünk *sajátságosnak*, ha pontosan k másikkal áll inverzióban. Legfeljebb hány sajátságos szám lehet a táblán?

Az 1. feladat 1. megoldása. Megmutatjuk, hogy egy k szám pontosan akkor sajátságos, ha az öt megelőző számok közül pontosan annyi k -nál kisebb van, mint ahány k -nál nagyobb. Egy k szám inverzióban áll

- azon k -nál kisebb számokkal, amik k után állnak a táblán, illetve
- azon k -nál nagyobb számokkal, amik k előtt állnak a táblán.

Az előbbiek számát jelölje x . Ekkor k pontosan akkor sajátságos, ha az utóbbiak száma $k-x$, ami viszont éppen azon k -nál kisebb számok száma, amik k előtt állnak a táblán.

Következésképp egy szám csak akkor lehet sajátságos, ha páros sok szám előzi meg a táblán (azaz páratlanadik pozícióban áll), így legfeljebb $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ db sajátságos szám állhat a táblán. Ennyi lehet is: tekintsük a

$$0, *, 1, *, 2, *, \dots$$

sorrendet, ahol a $2k+1$ -edik helyen a k szám áll $k=0, 1, \dots, \lceil n/2 \rceil - 1$ esetén, míg a $*$ -gal jelölt páros pozíciókban bármilyen szám állhat, ami legalább $\lceil n/2 \rceil$. Ekkor minden $k \in \{0, 1, \dots, \lceil n/2 \rceil - 1\}$ sajátságos, mert k után nincs nála kisebb szám, az előtte lévő $2k$ szám közül pedig minden második nagyobb nála, így valóban pontosan k számmal áll inverzióban. \square

Az 1. feladat 2. megoldása. Megmutatjuk, hogy a táblán nem lehet két szomszédos sajátságos szám. Tegyük fel, hogy a és b szomszédos számok a táblán (ab vagy ba sorrendben). Legyen $a < b$, és a többi számot osszuk három csoportba nagyság szerint: a -nál kisebbek (*kicsik*), a és b közöttiek (*közepesek*), valamint b -nél nagyobbak (*nagyok*). Jelölje az a, b előtt álló kicsi, közepes, illetve nagy számok számát rendre x_1, y_1 , illetve z_1 . Hasonlóan, az a, b után álló kicsi, közepes, illetve nagy számok száma legyen x_2, y_2 , illetve z_2 . Vegyük észre, hogy a közepes számok száma

$$y_1 + y_2 = b - a - 1.$$

1. eset: ab sorrend. Ekkor a pontosan $x_2 + y_1 + z_1$ számmal áll inverzióban, míg b pontosan $x_2 + y_2 + z_1$ számmal. Ha a és b is sajátságos volna, akkor

$$b - a = (x_2 + y_2 + z_1) - (x_2 + y_1 + z_1) = y_2 - y_1 \leq y_1 + y_2 = b - a - 1,$$

ami ellentmondás.

2. eset: ba sorrend. Ebben az esetben a és b egymással is inverzióban áll, így a pontosan $x_2 + y_1 + z_1 + 1$ számmal áll inverzióban, míg b pontosan $x_2 + y_2 + z_1 + 1$

számmal. Ha tehát a és b is sajátságos volna, akkor

$$a - b = (x_2 + y_1 + z_1 + 1) - (x_2 + y_2 + z_1 + 1) = y_1 - y_2 \leq y_1 + y_2 = a - b - 1,$$

ami ellentmondás.

Ezt a gondolatmenetet esetszétválasztás és képletek nélkül is el lehet mondani: a és b szomszédos számokra tekintünk azokat a számokat, amik pontosan az egyikkel állnak inverzióban. Könnyen meggondolható, hogy ezek éppen a közepes számok, azaz $b - a - 1$ ilyen van. Tehát legfeljebb ennyiben térhet el a és b „inverzió-száma”. Így nem lehet mindkettő sajátságos, különben ez az eltérés $b - a$ volna.

Vagyis a sajátságos számok között nincsenek szomszédosak, így legfeljebb $\lceil n/2 \rceil$ sajátságos szám lehet a táblán. Ennyi elő is fordulhat: tekintünk az

$$n - 1, *, n - 2, *, n - 3, *, \dots$$

sorrendet, ahol a *-gal jelölt páros pozíciókban bármilyen sorrendben állhatnak a maradék számok. \square

Az 1. feladat 3. megoldása. (Schmidt Botond megoldása alapján.) Egy táblán lévő k számra tekintünk a pozícióját (p), illetve a vele inverzióban álló számok számát (i). Azt állítjuk, hogy $k + p + i$ mindig páratlan.

Ez nyilván teljesül, amikor a számok növekvő sorrendben vannak, hiszen ekkor $p = k + 1$ és $i = 0$. Most egy tetszőleges sorrend esetén vizsgáljuk, mi történik, ha két szomszédos számot megcserélünk. Ha nincs köztük k , akkor persze p és i változatlanok maradnak. Ha az egyikük k , akkor pedig mind p , mind i pontosan 1-gyel változik, vagyis $p + i$ paritása ismét változatlan. Mivel szomszédos számok megcserélésével bármilyen sorrendhez eljuthatunk, beláttuk, hogy $k + p + i$ valóban mindig páratlan.

Ha k sajátságos, akkor $i = k$, vagyis ekkor $2k + p$ páratlan, azaz ez csak páratlan p pozíciójú számokkal eshet meg. \square

Az 1. feladat 4. megoldása. (Molnár István Ádám megoldása alapján.) Jelölje ℓ a táblán lévő utolsó számot. Ez a nála nagyobb számokkal áll inverzióban, azaz $n - 1 - \ell$ számmal. Vagyis pontosan akkor sajátságos, ha $n = 2\ell + 1$. Vagyis ez csak páratlan n esetén következhet be.

Továbbá vegyük észre, hogy ha töröljük ℓ -et a tábláról, valamint minden ℓ -nél nagyobb számot 1-gyel csökkentünk, akkor a sajátságosság tulajdonsága nem változik: az ℓ -nél kisebb számok inverzió-száma nem változik; egy ℓ -nél nagyobb számé ugyan 1-gyel csökken, de maga a szám is ugyanígy változik.

Most vegyük az n szám egy tetszőleges sorrendjét. Minden lépésben az utolsó számot a fenti módon törölve elérjük, hogy végül üres legyen a tábla. Az eredeti sorrendben m -edik szám pontosan akkor sajátságos, ha $n - m$ törlés után megmaradó m szám közül az utolsó sajátságos. Mint láttuk, ez az aktuálisan utolsó szám csak akkor lehet sajátságos, ha m páratlan. Ez azonnal mutatja, hogy csak a páratlan pozícióban álló számok lehetnek sajátságosak.

Ezzel a megközelítéssel az is könnyen átgondolható, milyen sorrendek esetén lesz minden páratlan pozícióban álló szám sajátságos. \square

2. feladat. Ebben a feladatban tízes számrendszerben felírt számokról lesz szó. Megengedünk nullával kezdődő felírásokat is. Egy páros sok számjegyből álló számot *vágható*nak nevezünk, ha két egyenlő hosszú részre félbevágva a részek összegének négyzete az eredeti szám. Például $2025 = (20 + 25)^2$ és $0001 = (00 + 01)^2$ négyjegyű vágható számok. Bizonyítsuk be, hogy a $2n$ -jegyű vágható pozitív egész számok száma minden n -re 2-hatvány.

A 2. feladat megoldása. Legyen $q = 99\dots 9 = 10^n - 1 = q_1 \cdots q_s$, ahol q_1, \dots, q_s egymáshoz páronként relatív prím prímhatalványok. Legyen $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ ($i = 1, \dots, s$); ez 2^s lehetőség. Az $x \equiv \varepsilon_i \pmod{q_i}$ ($i = 1, \dots, s$) szimultán kongruenciarendszernek a kínai maradéktétel szerint pontosan egy x megoldása van az $\{1, \dots, q\}$ halmazban, hiszen ez teljes maradékrendszer mod $q_1 \cdots q_s$. Ekkor x^2 egy $2n$ -jegyű vágható pozitív egész szám. Valóban, legyen $x^2 = 10^n u + v$, ahol $u, v \in \{0, \dots, q\}$. Ekkor $u < x$, emiatt $x - q \leq 0 < u + v < x + q$, továbbá $u + v \equiv (q + 1)u + v = x^2 \equiv \varepsilon_i^2 = \varepsilon_i \equiv x \pmod{q_i}$ minden i -re, ahonnan $u + v \equiv x \pmod{q}$; emiatt $u + v = x$.

Minden $2n$ -jegyű vágható pozitív egész számot pontosan egyszer kapunk meg a fenti eljárással. Valóban, ha legalább egy ε_i értékét megváltoztatjuk, akkor x és így x^2 is megváltozik. Másrészt, ha $10^n u + v = (u + v)^2$ egy $2n$ -jegyű vágható pozitív egész szám, akkor legyen $x = u + v \in \{1, \dots, q\}$. Ekkor $x(x - 1) = x^2 - x = qu$, de x és $x - 1$ relatív prímek, így minden i -re x vagy $x - 1$ osztható q_i -vel.

Mindezek alapján a $2n$ -jegyű vágható pozitív egész számok száma 2^s . □

3. feladat. Adott $n \geq 10$ pont a síkon, nincs három egy egyenesen. Bizonyítsuk be, hogy ki lehet őket színezni pirossal és kézzel úgy, hogy minden félsík, ami legalább 10 pontot tartalmaz, tartalmaz piros és kék pontot is.

A 3. feladat 1. megoldása. Megmutatjuk, hogy az állítás 10 helyett 3-mal is teljesül. Világos, hogy elég a pontosan három pontot levágó félsíkokról igazolni, hogy piros és kék pontot is tartalmaznak. Tekintsük a megadott pontok konvex burkának csúcsait, és vegyük ezen csúcsok egy olyan, tartalmazásra nézve minimális P részhalmazát, ami az összes, félsíkkal levágható ponthármasból legalább egy pontot tartalmaz. (Mivel minden levágható ponthármas tartalmazza a konvex buroknak legalább egy csúcsát, ezért bizonyosan létezik ilyen P részhalmaz.) Színezzük a P -beli pontokat pirosra, az összes többit pedig kékre.

Most vágjunk le 3 pontot egy félsíkkal. A P választása miatt a levágott 3 pont között van piros. Indirekt tegyük fel, hogy mind a három levágott pont piros. Ekkor e három pont mindegyike a konvex burok egy-egy csúcsa. Figyeljük meg, hogy e három piros pont közül a középsőt kékre átszínezve továbbra is igaz lesz, hogy minden levágható ponthármas tartalmaz piros pontot. Ez ellentmond a P halmaz minimalitásának. Tehát a levágott három pont között kéknek is kell lennie, és ezzel a bizonyítást befejeztük. □

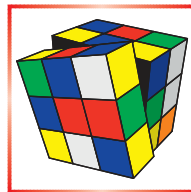
A 3. feladat 2. megoldása. Ez a megoldás 10 helyett 5-tel bizonyítja be az állítást. Sorszámozzuk meg a konvex burok csúcsait körbe (1-essel kezdve). Színezzük ki a konvex burok csúcsait pirosra, a konvex burok belsejébe eső pontokat pedig kékre. Ez majdnem jó: csak az olyan, félsíkkal levágható 5-ösökkel lehet gond, amelyek a konvex burok 5 egymást követő csúcsából állnak. Minden ilyen esetben színezzünk

át kékre egy olyan páros indexű csúcsot, ami nem az első és nem az utolsó a levágott 5 csúcs közül. A konvex burok kékre színezett csúcsai tehát rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy a konvex burok tetszőleges kék csúcsa és a vele szomszédos piros csúcsok alkotta háromszög belsejébe nem esik pontja a vizsgált halmaznak. Ezért ha egy félsík úgy vág le legalább két pontot a ponthalmazból, hogy az egyik levágott pont a konvex burok kék csúcsa, akkor e kék csúcs valamelyik piros szomszédját is le kell vágnia.

Most vágjunk le 5 pontot egy félsíkkal. Ha mind az 5 levágott pont a konvex burok csúcsa, akkor világos, hogy van köztük legalább egy páratlan indexű (ami biztosan piros) és van legalább egy kékre színezett páros indexű is. Ha a levágott pontok között van olyan is, ami a konvex burok belsejébe esik, akkor az nyilván kék. Ha a konvex buroknak legalább két csúcsát vágtuk le, akkor nem lehet ezek mindegyike kék, hiszen a páratlan indexű közülük piros. Ha pedig csak egy kék csúcsot vágunk le a konvex burokról, akkor levágtunk 4 kék pontot is a konvex burok belsejéből. Ekkor azonban a levágott konvex burok csúcs nem lehet kék a fenti megfigyelésünk miatt. Mivel minden esetet megvizsgáltunk, az állítást beláttuk. \square

Fleiner Tamás

Rejtvények, ördöglakatok O'Beirne olvasztótégelye



Rovatunkban minden hónapban valamilyen szórakoztató matematikai fejtörőt mutatunk be. Ezek között fontos helyet foglalnak el a különböző kirakós játékok, topológiai feladványok, ördöglakatok és a matematikát felhasználó bűvészmutatványok.

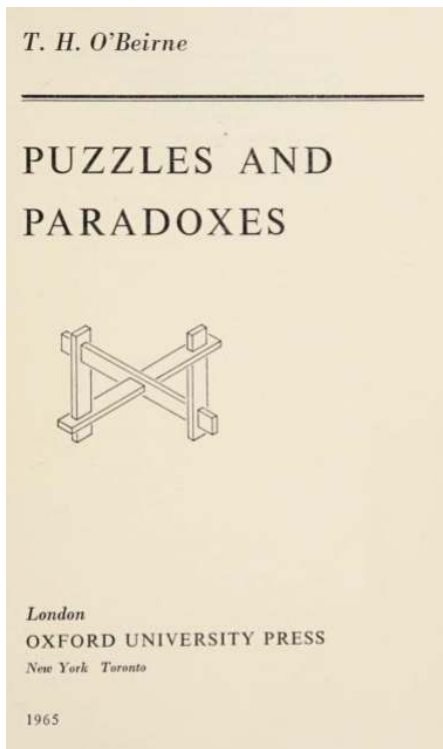
Manapság szinte mindent meg lehet találni az interneten, de az igazi élményt az adja, ha a feladatokat magunk oldjuk meg, a bűvészmutatványok trükkjeit mi találjuk ki, és a szükséges kellékeket is mi tervezzük meg és készítjük el. Próbáljuk meg a feladatokat továbbgondolni, általánosítani, igyekezzünk új feladatokat kitalálni.

Nem kell túl sokáig keresgelnünk az interneten a fejtörő feladatok között ahhoz, hogy sík vagy tér kitöltésre vonatkozó feladványra bukkanjunk. Ezek egyik fajtája az, amikor néhány síkidom vagy test valamilyen keretben van elhelyezve úgy, hogy látszólag teljesen kitöltik azt, de van még külön egy további eleme a játéknak. Ezt a különálló elemet is el kell – és lehet! – helyezni a keretben, a többivel együtt. Ami eredetileg lehetetlennek tűnik, csodálatos módon – ügyes átrendezéssel –



1. ábra

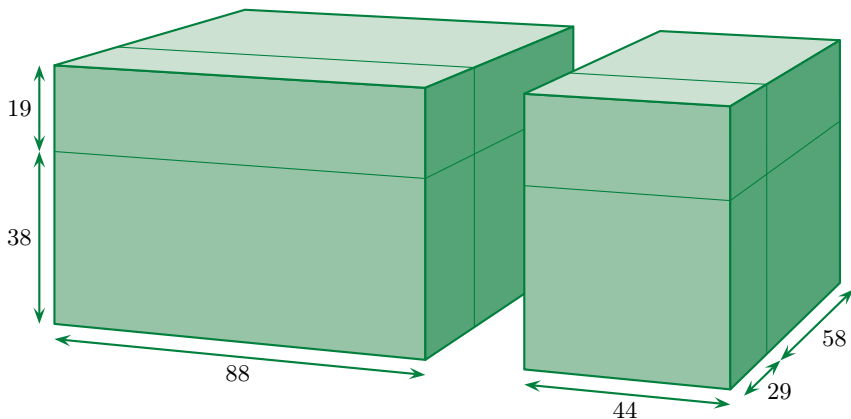
mégis megvalósítható! Ilyen például ez a háromszöges feladvány is (1. ábra): helyezzük be a nagy háromszög keretébe még a kicsi szabályos háromszöget is!



2. ábra

Hasonló, de talán még érdekesebb térbeli feladat Tom O'Beirne „olvasztótegele”, ahol egy nyolc téglatesttel – „fahasábbal” – látszólag teljesen megtöltött dobozba kell elhelyezni egy kilencediket is, mintegy „felolvasztva” és a többi közé csorgatva azt. (Valójában persze nem olvasztunk fel semmit – a fát a legkevésbé 😊 –, a hasábok ügyes átrendezését igényli a feladat.)

A probléma szerzője Thomas O'Beirne brit matematikus a *Puzzles and Paradoxes* (Oxford University Press, 1965, a könyv borítója a 2. ábrán látható) című könyvében közölte ezt a „paradoxont”, amely azért inkább a könyv címében is jelzett fejtörők közé tartozik, semmint a paradoxonok közé. A feladvány a következő. Helyezzünk el egy $58 \times 88 \times 133$ méretű dobozban nyolc téglatestet a 3. ábrán látható elrendezést követve. (A jobb áttekinthetőség kedvéért két tömbre választottuk szét a téglákat, a dobozba természetesen ezeket szorosan egymás mellé téve fér el a nyolc hasáb.)

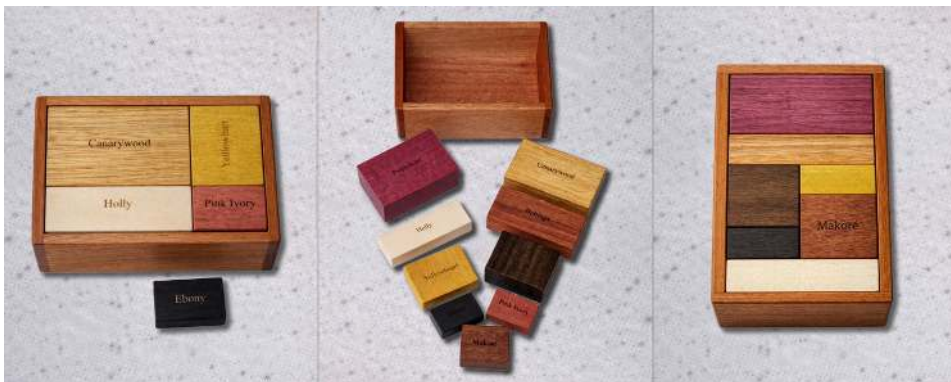


3. ábra

A feladat az, hogy a meglévő darabokat átrendezve egészítsük ki a doboz tartalmát egy kilencedik, $19 \times 29 \times 44$ méretű téglatesttel.

Aki szeretné kipróbálni a játékot, az még ne olvasson tovább, mert az 5. ábra már a feladat megoldását mutatja. A játék egyszerű elemekből áll, ezért akár fából, akár 3D nyomtatóval könnyen elkészíthetjük a téglatesteket. (Az egységet célszerű 1 mm-nek választani, így egy jól látható, kellemes méretű játékhoz jutunk.)

Mivel az eredeti elrendezésben a doboz mindhárom irányban egy egységgel nagyobb, mint a benne így elrendezett nyolc téglatest, számolással meggyőződhetünk róla, hogy „elvi” akadályja nincs az átrendezésnek (azaz a kilenc téglaterőfogata nem nagyobb a dobozénál).



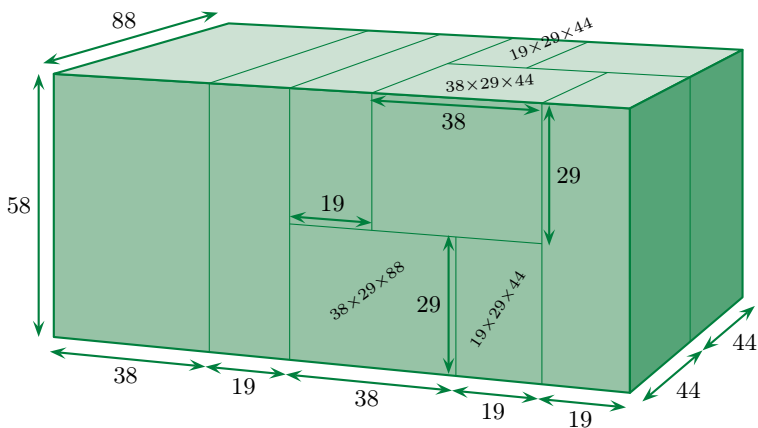
4. ábra. A képen a játék egy fából készült változata látható (Forrás: internet)

A doboz térfogata $58 \cdot 88 \cdot 133 = 678\,832$ térfogategység, a bele helyezett hasáboké pedig $57 \cdot 87 \cdot 132 = 654\,588$, így a kettő különbsége – $24\,244$ – éppen egyenlő a kilencedik test térfogatával. Ha tényleg önthetnénk a kilencedik testet – illetve vele egyenlő térfogatú folyadékot –, már készen is lennénk. De így még csak annyi nyilvánvaló, hogy úgy kell a téglatesteket elhelyezni a dobozban, hogy faltól falig érjenek, ne legyen rés sem köztük, sem egy ilyen test és a doboz fala között.

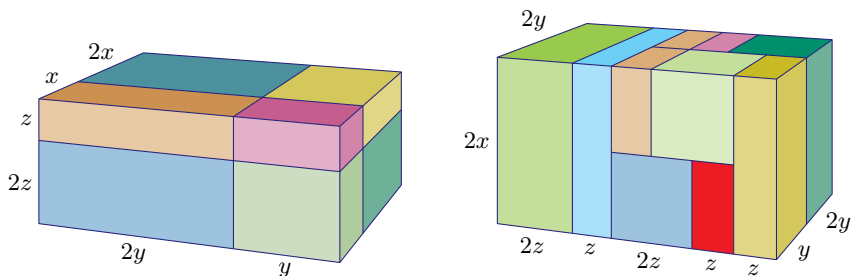
Az 5. ábrán látható a feladat megoldása.

Az átrendezés megtalálása természetesen a tervező zsenialitása. Érdekes végiggondolni, hogy miért éppen ezek a méretek szerepeltek a feladatban, miért éppen ekkorának érdemes választani a téglatesteket. Ehhez tekintsük a 6. ábra rajzait!

A bal oldali rajz méreteiből látszik, az első nyolc téglatest úgy keletkezett, hogy az eredeti téglatestet az élék harmadoló pontjain átmenő síkokkal nyolc részre osztottuk. Az átrendezés után kapott új téglatest élei rendre $2y$, $7z$, illetve $2x$. Ha az eredetihez hasonlóan csalfinta feladatot akarunk készíteni, akkor válasszunk olyan értékeket, hogy a kilencedik hasábot is tartalmazó nagy téglaterőfogata minden éle 1-gyel legyen nagyobb, mint az eredetié. Ennek az egyenletrendszernek pedig éppen a fenti számok a megoldásai: $x = 29$, $y = 44$ és $z = 19$.



5. ábra



6. ábra

Elviekben felírhatjuk másként is az egyenletrendszert attól függően, hogy a két téglát melyik élét állítjuk párba. Világos, hogy $3x + 1 = 2x$ nem teljesülhet. Ha $3x + 1 = 7z$, akkor $3y + 1 = 2x$ és $3z + 1 = 2y$, azaz x és y szerepet cserél, de nem kapunk lényegesen új esetet. Vagyis kiderült, hogy „az eredetihez hasonlóan csalafinta” feladat csak az eredeti feladat lehet.

Jó szórakozást!

Szilassi Lajos

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire



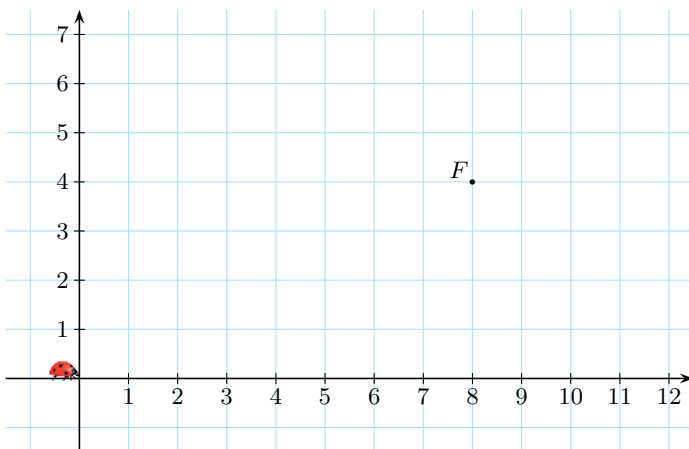
I. rész

1. Határozza meg a természetes számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amely értelmezési tartománya lehet az alábbi kifejezéseknek.

a) $\log_x(-2x^2 - 7x + 15)$ (6 pont)

b) $\sqrt{\frac{x^2 - 2x}{-2x^2 - 7x + 15}}$ (6 pont)

2. Egy online játékban a koordináta-rendszer origójából kell eljutni a katicabogár figurával az $F(8;4)$ koordinátájú pontba. A katicabogárral minden lépésben csak jobbra vagy felfelé léphetünk egyet.



a) Hányféle úton juthat el a katica az origóból F -be? (Két útvonal különböző, ha az egyikben lépünk olyan rácspontra, amelyre a másikban nem.) (6 pont)

b) Az $F(8;4)$ koordinátájú pont egy parabola fókuszpontja. Mi lehet a parabola egyenlete, ha tudjuk, hogy a parabola tengelye párhuzamos az y tengellyel és a 10 ordinátájú pontban metszi az y tengelyt? (6 pont)

3. Egy napközis csoport minden tagja egész délután papírrepülőket hajtogat. A tapasztalat szerint a meghajtogatott repülők 3 százaléka hibás – nem lehet repülésre bírni.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy ha 5-öt kiválasztunk – visszatevéssel – a papírrepülők közül, lesz köztük hibás? (5 pont)

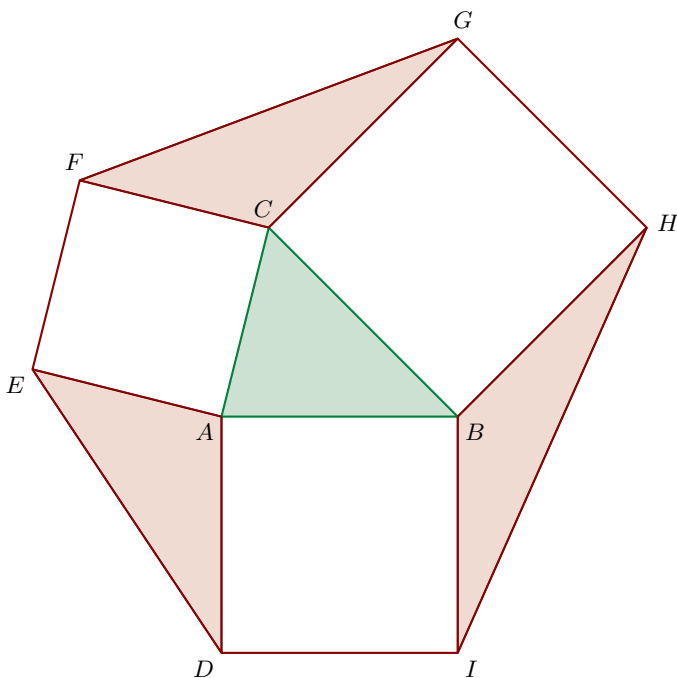
Egy tanuló statisztikát készített a 10 percenként elkészülő papírrepülők számából. Azt tapasztalta, hogy az adatok mediánjának és alsó kvartilisének összege 28, a felső és alsó kvartilis különbsége 6, valamint a felső kvartilis és medián eltérése 4.

b) Határozza meg az adatok ezen jellemzőit. (4 pont)

c) Ábrázolja dobozdiagramon az adatokat, ha a minimum 8, a maximum pedig 22 és kiugró érték nincs. (3 pont)

d) A csoport tagjai elhatározták, hogy felújítanak egy régi szokást: képeslappal lepik meg egymást a nyári szünetben. Ezért kicserélték egymással a lakcímkéket (kölsönösen). Egy gráfon képzelték el a cseréket. Az élek jelentették a lakcímcserét. Ha kettővel többen lettek volna – és ők is kicserélik mindenkivel a címüket –, a gráfnak 45-tel több éle lett volna. Hányan voltak a csoportban? (3 pont)

4. Egy háromszög mindhárom oldalára kifelé egy-egy, a háromszög oldalával egyenlő oldalhosszúságú négyzetet rajzolunk. A szomszédos négyzetek szabad csúcsait összekötve kapjuk az ADE , CFG és BHI háromszögeket az ábrának megfelelően.



a) Bizonyítsa be, hogy ezeknek a háromszögeknek a területe egyenlő az eredeti ABC háromszög területével. (4 pont)

b) Határozza meg a $DEFGHI$ hatszög területét, ha az eredeti háromszög oldalainak hossza 6 cm, 7 cm és 8 cm. (6 pont)

c) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét, ha α tetszőleges valós szám.

$$A: \cos(270^\circ + \alpha) = \sin(\alpha)$$

$$B: 1 + \cos(2\alpha) = 2\sin^2(\alpha)$$

$$C: \sin(60^\circ - \alpha) = \cos(30^\circ + \alpha) \quad (3 \text{ pont})$$

II. rész

5. Egy háromszög b oldalához tartozó magassága, az a oldala, a b oldala és a c oldala centiméterben kifejezve ebben a sorrendben egy 2 differenciájú számtani sorozat négy egymást követő tagja.

a) Hányszorosa a háromszög területének mérőszáma a kerület mérőszámának? (8 pont)

b) Mekkora részekre osztja a b oldalt a hozzátartozó magasság? (3 pont)

c) Bizonyítsa be, hogy minden pozitív egész n esetén $2^{4n} + 4$ kifejezés osztható 20-szal. (5 pont)

6. Koordináta-rendszerbe rajzolunk két körvonalat. A körök egyenlete $x^2 + y^2 - 14x - 12y + 60 = 0$ és $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$. A nagyobb sugarú kör középpontja legyen O_1 , a kisebb sugarú kör középpontja legyen O_2 . A két kör metszéspontjait jelölje A és B .

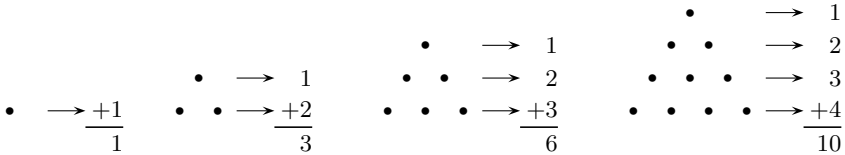
a) Igazolja, hogy az O_1AB háromszög területe kétszer akkora, mint az O_2AB háromszög területe. (8 pont)

Tekintsük az $x^2 + y^2 - 14x - 12y + 60 \leq 0$ és $x^2 + y^2 - 2x - 6y \leq 0$ körlapokat mint pontthalmazokat.

b) Határozza meg a két pontthalmaz metszetének területét. (5 pont)

c) Adja meg a két pontthalmaz egyesítésének területét. (3 pont)

7. Háromszögszámnak nevezzük az olyan számot, amelyet megkaphatunk úgy, hogy 1-től valameddig az összes természetes számot összeadjuk. Az első n pozitív egész szám összege az n -edik háromszögszám. Az ábrán látható elrendezés mutatja, hogy miért nevezik háromszögszámoknak.



a) Az első száz pozitív természetes számból kiválasztunk egyet. Nézzük az alábbi eseményeket:

A : a választott szám háromszögszám,

B : a választott szám négyzetszám,

C : a választott szám prímszám.

Határozza meg a következő valószínűségeket: $P(A)$; $P(A \cdot C)$; $P(\overline{A+B})$. (8 pont)

b) Az n -edik pozitív négyzetszámot hozzáadva az n -edik háromszögszámhoz 14 751-et kapunk. Mennyi az n értéke, és melyek ezek a számok? (8 pont)

8. Adott két, a pozitív valós számok halmazán értelmezett függvény: $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x)$ és $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x - \frac{\pi}{2}$.

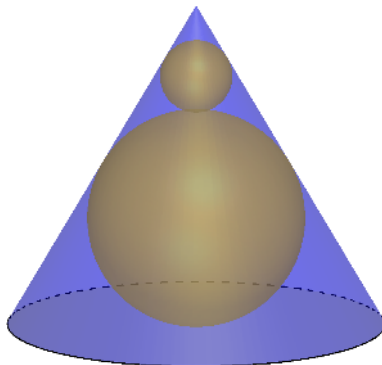
a) Határozza meg a következő értékeket: $f(g(\frac{3\pi}{4}))$; $g^{-1}(\frac{\pi}{2})$; $g(f(\frac{\pi}{4}))$. (3 pont)

b) Határozza meg az y tengely, az f és g függvény grafikonja, továbbá az $x = \frac{\pi}{4}$ egyenes által közrezárt terület nagyságát. (5 pont)

c) Oldja meg a következő egyenletet a $[0; 2\pi]$ intervallumon:

$$\cos(2x) + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \sin(x). \quad (8 \text{ pont})$$

9. Egy 60 fokos nyílásszögű egyenes körkúpba két darab gömböt helyezünk egymás fölé úgy, hogy a nagyobbik gömb a kúp alapján nyugszik, a két gömb érinti egymást és a kúp palástját is.



a) Határozza meg a két gömb sugarának arányát. (7 pont)

b) Hányszor nagyobb a kúp térfogata a két gömb össztérfogatánál? (6 pont)

c) Adja meg a kúp térfogatát, ha tudjuk, hogy a magassága 18 cm. (3 pont)

Tatár Zsuzsanna Mária

Esztergom

Megoldásvázlatok a 2026./1. szám matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. a) Oldja meg a következő egyenletet az egész számok halmazán:

$$(x^2 - 9) \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3} - 1 \right) = 9 + x. \quad (6 \text{ pont})$$

b) Egy négyszög α szögére teljesül, hogy $4\sin^2 \alpha - 3 = 0$. Mekkora lehet az α szög nagysága? (6 pont)

Megoldás. a) Az egyenlet értelmezési tartománya: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$. Az első zárójelben szereplő nevezetes azonosság alkalmazása és a szorzás elvégzése után az $(x+3) - (x-3) - (x^2-9) = 9+x$ egyenlethez jutunk. Rendezve ezt az $x^2 + x - 6 = 0$

másodfokú egyenletet kapjuk. Ennek gyökei $x_1 = -3$ és $x_2 = 2$, de az x_1 nem eleme az értelmezési tartománynak. Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért az egyenlet megoldása az $x = 2$.

b) A $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ egyenlet $]0^\circ; 360^\circ[$ intervallumba eső megoldásai az $\alpha_1 = 60^\circ$ és $\alpha_2 = 120^\circ$. A $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ egyenlet adott intervallumon belüli megoldásai az $\alpha_3 = 240^\circ$ és $\alpha_4 = 300^\circ$. A kapott négy megoldás igazá teszi az egyenletet.

2. Zoli biciklikerekének átmérője 70 cm, a pedálhoz kapcsolódó első váltója olyan fokozatban van, ahol a fogaskerék kerületén 56 „fog” van, míg a hátsó kerékhez kapcsolódó váltó esetén a fogaskeréken 20 „fog” helyezkedik el. (A biciklin a pedálhoz kapcsolódó első váltó fogaskereke és a pedál teljesen együtt forog. Az első és a hátsó fogaskereket köti össze a biciklilánc, így a két fogaskerék mindig ugyanannyi „fogat” fordul.)

a) Mekkora sebességgel halad Zoli, ha a pedálja 10 teljes kört 8 másodperc alatt tesz meg, illetve a hátsó kerék és a hátsó fogaskerék teljesen együtt forog? (4 pont)

b) Zoli 34 barátjával együtt közös kerékpártúrára indul. A biciklik minden kereke egymástól függetlenül két egész kilométer között 0,0005 valószínűséggel kap defektet. Milyen hosszú út esetén mondhatják, hogy legalább 0,95 valószínűséggel lesz defekt a túrán? (6 pont)

c) Egy biciklikölcsönzőben kedden 48-an kértek kerékpárt, 4-gyel több nő, mint férfi. A legalább 40 éves vendégek számának 60%-a volt a 40 évnél fiatalabbak száma; a legalább 40 évesek közül ötször annyian kértek hagyományos kerékpárt, mint elektromosat. Egyetlen férfi kért elektromosat, 2-vel több legalább 40 éves nő volt, mint férfi. Hány 40 évesnél fiatalabb nő kölcsönzött kedden biciklit? (4 pont)

Megoldás. a) 8 másodperc alatt az első fogaskerék 560 „fogat” fordul. Ugyannyi „fogat” fordul a hátsó fogaskerék is, ami $560 : 20 = 28$ teljes fordulatot jelent a hátsó kerék esetében. A kerék kerülete $2r\pi = 2 \cdot 35 \cdot \pi = 70\pi$ cm, ezért a Zoli által megtett út $28 \cdot 70\pi \approx 6158$ cm, így Zoli sebessége $61,58 : 8 = 7,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

b) Annak a valószínűsége, hogy n km alatt egy kerék nem lesz defektes: $0,9995^n$. Mivel a kerekeken függetlenül lesz defekt, ezért annak a valószínűsége, hogy 70 kerék közül nem lesz defekt n km alatt: $(0,9995^n)^{70} = 0,9995^{70n}$. Az előző esemény komplementere, hogy lesz defekt n km alatt: $1 - 0,9995^{70n}$, amelyre az alábbi egyenlőtlenségnek kell teljesülnie:

$$1 - 0,9995^{70n} \geq 0,95.$$

Ezt átrendezve kapjuk, hogy $0,05 \geq 0,9995^{70n}$, amelyet azonos alapra hozva a

$$0,9995^{\log_{0,9995} 0,05} \geq 0,9995^{70n}$$

egyenlőtlenség adódik. Mivel az $f(x) = 0,9995^x$ exponenciális függvény szigorúan monoton csökkenő, ezért

$$\log_{0,9995} 0,05 \leq 70n,$$

vagyis

$$n \geq \frac{\log_{0,9995} 0,05}{70} \approx 85,6.$$

Tehát legalább 86 km-es túra esetén legalább 0,95 annak a valószínűsége, hogy lesz defekt a túrán.

c) A kölcsönzőben $\frac{48-4}{2} = 22$ férfi kért kerékpárt, és $48 - 22 = 26$ nő. Összesen $\frac{48}{1,6} = 30$ -an voltak a legalább negyven évesek, és $48 - 30 = 18$ -an negyven év alattiak. A legalább 40 évesek közül $30 \cdot \frac{5}{6} = 25$ -en kértek hagyományos, míg 5-en elektromos kerékpárt. Készítsünk táblázatot a feladathoz, jelentse x a 40 évnél fiatalabb nők számát.

	Nők	Férfiak	Összesen
40 év alatti	x	$18 - x$	18
legalább 40 éves – elektromos kerékpárral	4	1	5
legalább 40 éves – hagyományos kerékpárral	$22 - x$	$x + 3$	25
Összesen	26	22	48

A legalább 40 éves nők és férfiak számára vonatkozó információ alapján

$$4 + (22 - x) = 1 + (x + 3) + 2,$$

ebből $x = 10$, azaz 10 negyven évesnél fiatalabb nő kölcsönzött kedden biciklit.

3. a) *Adja meg az $(m - 1)x^2 + (2m - 9)x + 1 = 0$ másodfokú egyenlet $m \in \mathbb{R}$ paraméterének lehetséges értékeit úgy, hogy az egyenlet két különböző pozitív gyökének összege 5-nél nagyobb legyen.* (7 pont)

b) *Gondoltam egy számra, lejegyeztem egy lapra, és leírtam mellé a négyzetét. Lehet-e a gondolt szám páros, ha a leírt számok tízes alapú logaritmusainak összege kisebb, mint a számok összegének tízes alapú logaritmus?* (6 pont)

Megoldás. a) Az m paraméter értéke nem lehet 1, mivel akkor nem lenne másodfokú az egyenlet. Egy másodfokú egyenletnek pontosan akkor van két különböző valós gyöke, ha a diszkriminánsa pozitív: $(2m - 9)^2 - 4(m - 1) > 0$, amiből $4m^2 - 40m + 85 > 0$. A másodfokú egyenlőtlenség megoldásával az $m < 3,06$ vagy $m > 6,94$ feltételeket kapjuk. Most alkalmazzuk az egyenlet x_1 és x_2 gyökeire a Viète-formulákat. Ekkor

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{25}{m - 1} > 0,$$

így $m > 1$.

$$x_1 + x_2 = -\frac{2m - 9}{m - 1} > 5.$$

Mivel a nevezőben szereplő algebrai kifejezés az előző feltétel miatt pozitív, ezért azzal beszorozva a $-(2m - 9) > 5(m - 1)$ egyenlőtlenséget kapjuk, amelyet átrendezve adódik, hogy $m < 2$. Ezt a fentiekkel összevetve az $1 < m < 2$ paraméterek kielégítik a feladat feltételeit.

b) Jelölje x a gondolt számot, a logaritmus definíciója miatt $x > 0$. Oldjuk meg a $\lg x + \lg x^2 < \lg(x + x^2)$ egyenlőtlenséget. Az összeg logaritmusára vonatkozó azonosságot alkalmazva $\lg x^3 < \lg(x + x^2)$. A 10-es alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekedő, illetve $x > 0$, ezért x -szel oszthatunk, így az $x^2 - x - 1 < 0$

egyenlőtlenséghez jutunk. Az egyenlőtlenség megoldása a $\left] \frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right[$ intervallum, amelyben nincs pozitív páros szám, tehát a gondolt szám nem lehet páros.

4. Egy pozitív tagokból álló számtani sorozat első három tagjának összege 10,5. Az $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$ függvény helyettesítési értékeinek összege a sorozat első három tagjának helyén $73\sqrt{2}$. Határozza meg a sorozat differenciáját. (7 pont)

b) Igazolja, hogy ha egy sorozat első n tagjának összege $S_n = 1,5n^2 - n$, akkor az egy 3 differenciájú számtani sorozat. (5 pont)

Megoldás. a) A számtani sorozat második tagját a_2 -vel, differenciáját d -vel jelölve $a_2 - d + a_2 + a_2 + d = 10,5$, $a_2 = 3,5$. Az exponenciális függvény helyettesítési értékeinek összege

$$2^{3,5-d} + 2^{3,5} + 2^{3,5+d} = 73\sqrt{2},$$

$$\frac{8\sqrt{2}}{2^d} + 8\sqrt{2} + 8\sqrt{2} \cdot 2^d = 73\sqrt{2},$$

$$\frac{8\sqrt{2}}{2^d} + 8\sqrt{2} \cdot 2^d = 65\sqrt{2}.$$

Új változót vezethetünk be $y = 2^d$ helyett, és osztunk $\sqrt{2}$ -vel. Így a $8y^2 - 65y + 8 = 0$ egyenlethez jutunk. Ennek megoldásai $y_1 = 8$, amiből a 2^x függvény szigorú monotonitása miatt $d_1 = 3$ és $y_2 = \frac{1}{8}$, így $d_2 = -3$. A kapott megoldások valóban kielégítik a feladat feltételeit.

b) A sorozat n -edik tagját meghatározhatjuk az $a_n = S_n - S_{n-1}$ összefüggés alapján. Így $a_n = (1,5n^2 - n) - (1,5(n-1)^2 - (n-1)) = 3n - 2,5$. A sorozat differenciája $d = a_n - a_{n-1} = (3n - 2,5) - (3(n-1) - 2,5) = 3$. Ezzel igazoltuk a feladat állítását.

II. rész

5. Egy kastély parkjában a tulipánok virágágyása derékszögű trapéz alakú, amelynek párhuzamos oldalai 8 m és 5 m, derékszögű szára pedig 4 m hosszúságú.

a) Igazolja, hogy a hegyesszögű csúcsból induló átló mentén ültetett tulipánok a hegyesszög szögfelezőjére illeszkednek. (6 pont)

Egy olyan húrtrapéz alakú területet füvesítenek be a kertészek, amelynek alapjai 6 m és 3 m hosszúságúak, hegyesszögei 60° -osak. Erre a területre a gyerekek 30 cm sugarú műanyag hulahoppkarikákat dobálnak. A karikák (képzeltbeli) középpontjai véletlenszerűen esnek valahová a füvesített területre.

b) Mennyi a valószínűsége, hogy egy hulahoppkarika nem lóg le a füves területről? (5 pont)

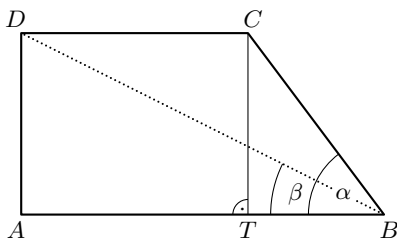
A park közepén lévő tóban tavirózsákat láthatunk. A virágzás időszakában naponta 30%-kal több kinyílt virágot láthatunk itt.

c) Ha június elsején tizenkét virágot számoltunk meg, akkor mikor lesz legalább kétszáz kinyílt virág ezen a tavon? (5 pont)

Megoldás. a) A TBC derékszögű háromszögben $TB = 8 - 5 = 3$ m, így

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}.$$

Az ABD derékszögű háromszögben $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2}$.

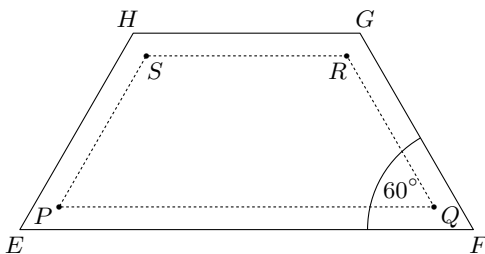


A kétszeres szögekre vonatkozó addíciós tételt alkalmazva

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

A hegyesszögű tartományban a tangensfüggvény kölcsönösen egyértelmű, ezért $2\beta = \alpha$. Ezzel igazoltuk az állítást.

b) A keresett valószínűség meghatározásához ki kell számítani az $EFGH$ húrtrapéz területét, és a $PQRS$ trapéz oldalainak hosszát, illetve területét, ahol ez utóbbi trapéz oldalai 0,3 m-re vannak az $EFGH$ trapéz oldalaitól párhuzamosan „befelé”.



Az $EFGH$ trapéz magassága $m_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, területe $t_1 = \frac{(6+3) \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$ m².

A $PQRS$ trapéz párhuzamos oldalainak hossza $PQ = 6 - 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{10} = 4,96$ m és $RS = 3 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{10} = 2,65$ m. Magassága pedig $m_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot 0,3 \approx 2$ m. Így területe $t_2 = 7,61$ m². A keresett valószínűséget geometriai modell alapján a két terület hányadosaként kapjuk $P = \frac{t_2}{t_1} = 0,651$.

c) A kinyílt virágok száma mértani sorozatot alkot, amelynek első tagja $a_1 = 12$, hányadosa pedig $q = 1,3$. Megoldandó az $a_n = 12 \cdot 1,3^{n-1} \geq 200$ egyenlőtlenség. Ez alapján $n \geq 11,7$, így június 12-étől lesz legalább 200 kinyílt virág a tavon.

6. A H halmazt azok az $(a;b)$ számpárok alkotják, amelyekre teljesülnek a következő feltételek:

- $a \in \mathbb{N}; b \in \mathbb{N}$
- $a \leq b$
- $a \mid 12; b \mid 12$

a) Igazolja, hogy a H halmaznak 21 eleme van. (3 pont)

Tekintsük azt a 21 pontú gráfot, amelynek csúcsai a H halmaz elemei. Ebben a gráfban két pontot akkor kötünk össze, ha a nekik megfelelő számpárok között vannak azonos számok. Pl. összekötjük a $(4;6)$ pontot és a $(6;12)$ pontokat, mert mindegyik számpárban szerepel a 6.

b) Csúcsai felsorolásával adjon meg egy 5 pontból álló kört ebben a gráfban. (2 pont)

c) Hány él van ebben a gráfban? (5 pont)

d) A 21 pontú gráfnak megfelelő szabályos 21 szöget szeretnénk egy körlapra megrajzolni úgy, hogy a szabályos sokszög leghosszabb átlója 18 cm legyen. Ehhez minimálisan mekkora sugarú körlapra lesz szükség? (6 pont)

Megoldás. a) A 12 pozitív osztói az $\{1;2;3;4;6;12\}$, az a és b értéke egyaránt ezek közül választható ki ismétléssel. Ha $a = 1$, akkor b hatféle értéket vehet fel; ha $a = 2$, akkor b ötféle lehet. Így tovább, a lehetőségek száma $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$.

Megjegyzés. Természetesen az ismétléses kombinációra vonatkozó összefüggést használva is megadható a lehetőségek száma $\binom{6+2-1}{2} = \binom{7}{2} = 21$.

b) Az 5 csúcs például $(1;2); (2;3); (3;4); (4;6)$ és $(1;6)$.

c) Annak a 6 darab csúcsnak mindegyike, amelyben azonos számok szerepelnek, 5 másik csúccsal vannak összekötve, a különböző számokból álló 15 csúcs 10-zel. A foksámok összege $6 \cdot 5 + 15 \cdot 10 = 180$, emiatt az élek száma 90.

d) A szabályos 21-szög egy belső szögének nagysága $162,86^\circ$, két szomszédos átló által bezárt szög $\alpha = 8,57^\circ$. Ekkora szöget zár be két 18 cm-es átló is, ezzel kiszámítható a szabályos sokszög oldalainak hossza: $a = 2 \cdot 18 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = 2,69$ cm. A szabályos sokszög köréírható körének sugarát kell kiszámítanunk:

$$R = \frac{a}{2 \cdot \sin \alpha} = 9,03 \text{ cm.}$$

7. a) Szilárd időjárás előrejelzésében hétfőtől péntekig a napi maximumok a következő módon alakulnak: 34°C , 30°C , 26°C , 22°C és 28°C . Szilárd azt is elmondta, hogy a teljes hétre számítva a napi maximumok átlaga 28°C és az átlagtól való átlagos abszolút eltérés értéke $\frac{18}{7}^\circ\text{C}$. Határozza meg a hétvégi napi maximumokat, ha vasárnapra várhatóan kicsit lehül az idő. (6 pont)

b) A 2023. évre vonatkozóan Szilárd összegyűjtötte a napi csapadékmennyiséget és megadta a sodrófadiagram elkészítéséhez szükséges adatokat. $Q_0 = 0$ mm; $Q_1 = 1$ mm; $Q_2 = 5$ mm; $Q_3 = 8$ mm és $Q_4 = 32$ mm. Mennyi lehet a 2023. évben összesen mért csapadék mennyiségének legkisebb, illetve legnagyobb értéke? (5 pont)

c) Szilárd számítógépén elromlott a 7-es számjegy, ezért az adatok továbbításához a 10-es számrendszer helyett a 7-es számrendszert használja. Mekkora a szélerősség, illetve a legalacsonyabb és legmagasabb hőmérséklet 10-es számrendszerbeli értéke, ha Szilárd üzenete így szólt:

A mai napon mért legnagyobb szélerősség 50 km/h. A legmagasabb és legalacsonyabb hőmérséklet összege 105 °C, különbsége pedig 15 °C. (5 pont)

Megoldás. a) Jelölje x_1 a szombati, x_2 a vasárnapi hőmérsékletet úgy, hogy $x_1 > x_2$. Megoldandó a következő egyenletrendszer:

$$\frac{140 + x_1 + x_2}{7} = 28,$$

$$\frac{16 + |x_1 - 28| + |x_2 - 28|}{7} = \frac{18}{7}.$$

Ennek a megoldásából a szombati maximum $x_1 = 30$ °C és a vasárnapi maximum $x_2 = 26$ °C. A kapott értékek megfelelnek a feladat feltételeinek.

b) A 365 nagyság szerint sorba rendezett adat esetén az első érték a minimum, a 91. és 92. adat átlaga az alsó kvartilis, a 183. adat a medián, a 274. és 275. adat átlaga a felső kvartilis, illetve a 365. adat a maximum. Az összesen mért csapadék mennyiségének legkisebb értéke így $90 \cdot 0 + 92 \cdot 1 + 91 \cdot 5 + 91 \cdot 8 + 32 = 1307$ mm. Az összesen mért csapadék mennyiségének legnagyobb értéke így $1 \cdot 0 + 91 \cdot 1 + 91 \cdot 5 + 92 \cdot 8 + 90 \cdot 32 = 4162$ mm.

c) A legnagyobb szélerősség 35 km/h. A legmagasabb hőmérséklet 7-es számrendszerbeli értéke 45, ami a 10-es számrendszerben 33 °C, a legalacsonyabb 7-es számrendszerbeli értéke 30, ami a 10-es számrendszerben 21 °C.

8. a) Egy négyzetes hasáb tetejére olyan 6 cm magas szabályos négyoldalú gúlát helyezünk, amelynek alaplapja pontosan illeszkedik a négyzetes hasáb négyzet alakú lapjára. Számítsa ki a test felszínét, ha az alapéleinek hossza 12 cm, teljes magassága pedig 30 cm. (4 pont)

b) Az előbbi test éleire pozitív prímszámokat írunk úgy, hogy az egy csúcsba befutó éleken különböző számoknak kell szerepelni. Lehetséges-e olyan eset, hogy az élekre írt számok összege kevesebb, mint 70? Válaszát indokolja! (4 pont)

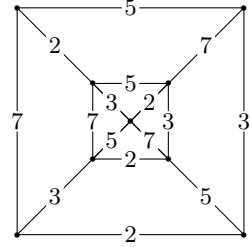
c) Van egy 22 cm magas négyzetes hasábunk, amelynek az egyik négyzet alakú lapjára 6 cm magas szabályos négyoldalú gúlát illesztünk. Az összeillesztett testet a négyzetlapjára állítjuk, 500 ml folyadékot töltünk bele, és megjelöljük a vízszintet. Ezt követően a testet a gúla csúcsára állítjuk, és azt tapasztaljuk, hogy a folyadék-szint most 2 cm-rel magasabban van, mint az első esetben bejelölt szint, de mindkét esetben a hasáb alakú részre esik. Mekkora a hasáb alapéleinek hossza? (8 pont)

Megoldás. a) Az ABCDEFGH téglatest felszíne a fedőlapja nélkül

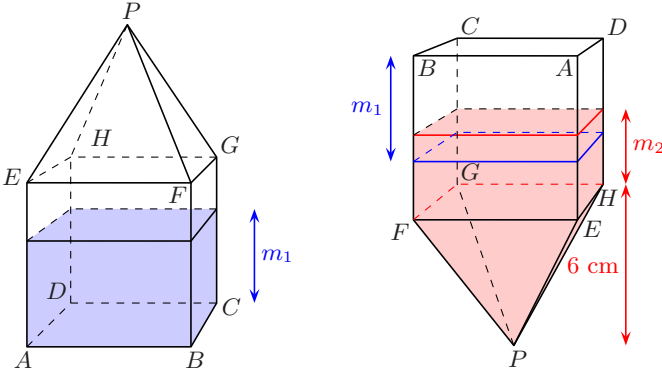
$$A_1 = 12 \cdot 12 + 4 \cdot 12 \cdot 24 = 1296 \text{ cm}^2.$$

A tetejére helyezett gúla oldallapjainak magassága $m_o = 6\sqrt{2}$, így az oldallapok területének összege $A_2 = 4 \cdot \frac{12 \cdot 6\sqrt{2}}{2} = 203,65 \text{ cm}^2$. A test felszíne $A \approx 1500 \text{ cm}^2$.

b) Igen, lehetséges. Szemléltessük a test élhálózatát gráffal. Induljunk el az ábra közepén lévő csúcsból, és írjuk a lehető legkisebb pozitív prímszámot az élekre a feltételeknek megfelelően. Az éleken megjelenő prímek összege 68.



c) $500 \text{ ml} = 500 \text{ cm}^3$.



Az első esetben a folyadék térfogatára felírhatjuk az

$$(1) \quad a^2 \cdot m_1 = 500$$

egyenletet. A második esetben, a gúla alakú rész teljesen megtelik és még hozzáadódik egy téglatest alakú rész, így

$$(2) \quad \frac{a^2 \cdot 6}{3} + a^2 \cdot m_2 = 500.$$

A hasáb alakú rész magassága és a 2 cm-es szintkülönbség miatt

$$(3) \quad m_1 + m_2 = 22 + 2.$$

Az első egyenletből m_1 -et, a másodikból m_2 -t kifejezzük, és beírjuk a harmadikba. Így az

$$\frac{500}{a^2} + \frac{500 - 2a^2}{a^2} = 24$$

egyenlet adódik. Ennek pozitív megoldása

$$a = \sqrt{\frac{500}{13}} \approx 6,2 \text{ cm}.$$

Tehát a hasáb alapélének hossza 6,2 cm.

9. Az emelt szintű matematika érettségi szóbeli vizsgarészének fontos eleme az adott témakörhöz kapcsolódó gyakorlati alkalmazások ismertetése. A diákok a differenciál- és integrálszámításhoz kapcsolódóan gyakran hoznak példákat a fizika területéről.

a) Egy autó pillanatnyi sebességét olyan másodfokú függvény írja le az idő függvényében, amelynek két zérushelye a 0 másodpercnél, illetve a 10 másodpercnél van, maximális értéke pedig a mozgás 5. másodpercében 8 m/s. Igazolja, hogy a sebességnek megfelelő függvény hozzárendelési szabálya $f(x) = -0,32x^2 + 3,2x$. (4 pont)

b) Az autó által megtett út nagyságát a sebesség-idő grafikon alatti terület számértéke adja meg. Számítsa ki az autó által a megállásig megtett utat. (4 pont)

c) A testek gyorsulását úgy számíthatjuk ki a sebesség-idő függvény ismeretében, ha meghatározzuk a függvény adott időponthoz tartozó érintőjének a meredekségét. Egy harmonikus rezgő mozgást végző test esetén a sebességet leíró függvény: $f(x) = 0,3\cos(3x)$. Számítsa ki az $x = 2$ másodperchez tartozó gyorsulás számértékét. (4 pont)

d) A munka kiszámításához az erő és az erő irányába történő elmozdulás szorzatát kell kiszámítani. Mekkora a munkavégzés számértéke abban az esetben, ha a testre ható állandó 45 N nagyságú erő a derékszögű koordináta-rendszer x tengelyének pozitív irányába mutat, miközben a test az origóból felfelé induló $f(x) = \frac{1}{2}x$ függvényre illeszkedő emelkedőn 160 m utat tesz meg? (4 pont)

Megoldás. a) Legyen a pillanatnyi sebességet leíró másodfokú függvény általános hozzárendelési szabálya $f(x) = ax^2 + bx + c$. A függvény átmegy az origón, így $f(0) = 0$, amiből $c = 0$. A másik zérushely $x = 10$, így $a \cdot 10^2 + b \cdot 10 = 0$, valamint a maximumra vonatkozó információ alapján használhatjuk az $f(5) = a \cdot 5^2 + b \cdot 5 = 8$ egyenletet vagy a szélsőértékre alkalmazható $-\frac{b}{2a} = 5$ összefüggést. Ezekből kiszámítható az $a = -0,32$ és a $b = 3,2$ együtthatók értéke, tehát a hozzárendelési szabály valóban a megadott.

b) A grafikon alatti területet az alábbi határozott integrál kiszámításával határozhatjuk meg:

$$\int_0^{10} (-0,32x^2 + 3,2x) dx = \left[-0,32 \cdot \frac{x^3}{3} + 3,2 \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^{10} = 53,33$$

méter a megtett út.

c) Az érintő meredekségének meghatározásához szükségünk van a deriváltfüggvény megadására: $f'(x) = -0,3\sin(3x) \cdot 3$. A deriváltfüggvény $x = 2$ helyen felvett helyettesítési értéke az érintő meredeksége, így a gyorsulás számértéke

$$f'(2) = -0,3\sin(3 \cdot 2) \cdot 3 = 0,25.$$

d) A megadott $f(x)$ függvény meredeksége $m = \frac{1}{2}$, így irányszöge $m = \operatorname{tg} \alpha$ alapján $\alpha = 26,6^\circ$. Az erő irányába történő elmozdulás nagysága

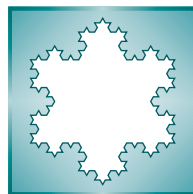
$$160 \cdot \cos \alpha = 143,11 \text{ m.}$$

Ebből kiszámíthatjuk a végzett munka nagyságát $W = 45 \cdot 143,11 = 6439,9$ (J).

Jócsik Csilla

Győr

Matematika C gyakorlatok megoldása



C. 1844 *Ági pirossal, Laci késsel színezzeti egy $n \times n$ -es ($n > 1$) fehér táblázat mezőit, amely i -edik sorának j -edik mezőjét $(i; j)$ -vel jelöljük. Első lépésben Ági pirosra festi a főátló (bal felsőtől a jobb alsóig) mezőit. Ezután felváltva jönnek: ha Laci $(i; j)$ -t színezi, akkor Ági $(j; i)$ -t. Minden mezőt pontosan egyszer színeznek be. A k -adik sort különlegesnek hívjuk, ha bármely kék $(k; j)$ esetén létezik l , hogy $(k; l)$ és $(l; j)$ is piros. Bizonyítsuk be, hogy a színezgetés végeztével Ági talál különleges sort.*

Javasolta: *Paulovics Zoltán* (Budapest)

1. megoldás. Tegyük fel, hogy nem talál. Válasszunk ki egy olyan sort, amelyben maximális számú piros van. Ez a sor legyen a k -adik, és legyen benne m darab piros négyzet.

Mindenképpen lesz legalább egy olyan kék $(k; j)$ mező, amihez nem talál megfelelő l -et, különben a sor különleges lenne.

A k -adik sorból válasszunk egy ilyen kék $(k; j)$ -t. Ekkor nézzük meg az összes l -re, hogy $(k; l)$ piros-e. Összesen m darab olyan l van, amelyre piros. Ekkor, mivel nincs megfelelő l , ezért mind az m darab $(l; j)$ kék lesz.

Viszont mivel minden $(l; j)$ kék, ezért minden $(j; l)$ piros (m darab) a színezési szabály szerint. Valamint $(j; k)$ is biztosan piros, mivel $(k; j)$ kék. Tehát a j -edik sorban legalább $m + 1$ darab piros négyzet van, ami ellentmond annak, hogy a k -adikban maximális számú m van.

Bodó Rókus Dániel (Szegedi Radnóti M. Kísérleti Gimn., 8. o. t.)
dolgozata alapján

2. megoldás. Képzeljük el ezt a táblázatot úgy, mintha egy focibajnokság táblázatát látnánk. Ekkor ha az (i, j) -edik piros, akkor az i -edik csapat megverte a j -edik csapatot, ha pedig kék, akkor meg a j -edik csapat verte meg az i -edik csapatot. (Tegyük fel, hogy nem született döntetlen, továbbá a piros $(i; i)$ mezők jelentésével ne foglalkozzunk.) Ekkor igazából az a kérdés, hogy ha n csapat van, akkor biztosan van-e olyan csapat, amelyik minden csapatot vagy megvert, vagy legyőzött egy olyan csapatot, amelyik legyőzte azt a csapatot, amelyik legyőzte őt. Hiszen, ha egy különleges sor valamely (például a j -edik) eleme kék (tehát valakitől kikapott), de létezik egy olyan eleme (például az l -edik), amely piros – azaz az l -edik csapatot legyőzte –, és ráadásul $(l; j)$ is piros – azaz az l -edik csapat legyőzte a j -edik csapatot –, akkor a különleges sorunkra valóban teljesül, hogy az őt legyőző csapat egyik legyőzőjét legyőzte.

Jelöljön X egy olyan csapatot, amelyik a legtöbbször győzött, bebizonyítjuk, hogy X teljesíti ezeket a feltételeket, vagyis X sora különleges.

Most vizsgáljuk azokat a csapatokat, amelyek legyőzték X -et. Ha X nem teljesíti a feltételeket, akkor valamelyik csapat, amelyik megverte X -et biztos, hogy megvert minden olyan csapatot is, amit X megvert, így ekkor ez a csapat többet nyert volna, mint X , tehát ez ellentmondás. Tehát mindig lesz ilyen csapat. Így egy olyan sort kell kiválasztania Áginak, ahol maximális számú piros mező van. Így beláttuk, hogy a színezgetés végeztével Ági talál különleges sort.

Molnár-Sáska Tamás (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 7. o. t.) dolgozata alapján

3. megoldás. Teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást. Az állítás $n = 2, 3$ -ra igaz, ez könnyen ellenőrizhető.

Tegyük fel, hogy igaz az állítás (azaz létezik különleges sor) n -re. Ekkor bebizonyítjuk, hogy igaz $(n + 1)$ -re is.

Tekintsünk tehát egy tetszőleges $(n + 1) \times (n + 1)$ -es, a feladat szerint kiszínezett táblázatot, és vizsgáljuk annak első n sorából és oszlopából képzett $n \times n$ -es résztáblázatát.

Az indukciós feltétel miatt ennek a résztáblázatnak van különleges sora, legyen ez a p -edik sor. Ha a p -edik sor a teljes táblázatban is különleges, akkor készen vagyunk. Ha nem az, akkor van olyan kék $(p; j)$ mezője a sornak, amelyre bármely l esetén a $(p; l)$ vagy az $(l; j)$ kék. Melyik szám lehet a j ?

Mivel a résztáblázatban ez a sor különleges volt, ezért minden $1 \leq j \leq n$ számra, ha $(p; j)$ kék, úgy a teljes, $(n + 1) \times (n + 1)$ -es táblázatunkban is megfelelő lesz ugyanaz az l , amelyre teljesült, hogy $(p; l)$ és $(l; j)$ piros. Tehát $j = n + 1$.

Ha tehát $j = n + 1$ „rontotta el” a p -edik sort, akkor az $(n + 1)$ -edik sor olyan, hogy $(p; n + 1)$ kék (így $(n + 1; p)$ piros), továbbá bármely l -re, ha (p, l) piros, úgy $(l; n + 1)$ kék. Ám ha $(l; n + 1)$ kék, akkor $(n + 1; l)$ piros. Tehát arra jutottunk, hogy az $(n + 1)$ -edik sorban minden olyan mező piros, amely a p -edik sorban is piros. Ekkor könnyű ellenőrizni a különlegesség feltételét az $(n + 1)$ -edik sorra – mivel $(n + 1; n + 1)$ piros, ezért elég a sor $1 \leq j \leq n$ mezőire. Ha ugyanis a j -edik mezője kék, akkor $(p; j)$ is kék, így – a p -edik sor résztáblázatban való különlegessége miatt – létezik olyan l , amelyre $(p; l)$ és $(l; j)$ is piros, de ekkor $(n + 1; l)$ és $(l; j)$ is piros. Ezzel beláttuk, hogy amennyiben a p -edik sor nem különleges a teljes táblázatban, úgy az $(n + 1)$ -edik sor az.

Bencze Mátyás (Székelyudvarhely, Tamási Á. Gimn., 12. o. t.) ötlete alapján

A feladatra összesen 71 versenyző és csapat küldött megoldást. 5 pontos 10, 4 pontos 3, 3 pontos 5, 1 pontos 50 dolgozat.

C. 1865. *Az iskolai szkanderbajnokságon 17 fő indult el. Mindenki pontosan egyszer mérkőzött meg mindenkivel, döntetlen nem született. A versenyzők egy csoportját erősnek hívjuk, ha teljesül rájuk, hogy bármely rajtuk kívüli versenyzőt legyőzött közülük valaki. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható legfeljebb 9 fős erős csoport.*

Javasolta: *Paulovics Zoltán* (Budapest)

1. megoldás. Osszuk a 17 versenyzőt tetszőlegesen 8 párra, ekkor marad egy „páratlan” játékos. Minden párból válasszuk a győztest; legyen az S halmaz az így kapott 8 győztes, plusz még a páratlan játékos. Tehát $|S| = 9$.

Ekkor minden, S -en kívüli játékos valamely pár vesztese, tehát legyőzi őt a párjának S -be vett győztese. Következésképpen az S -en kívül álló minden játékost megveri valaki S -ből, azaz S erős csoport.

Yan Zhebeier (Miskolci Herman Ottó Gimn., 11. o. t.) dolgozata alapján

2. megoldás. A 17 főből kiválasztjuk bármely 9-et. Ha ez egy *erős* csoport, akkor kész vagyunk.

Ha ez nem *erős*, akkor az azt jelenti, hogy a maradék 8 emberből van valaki, aki mind a 9-üket legyőzte.

Ekkor kiválasztjuk a másik – tehát a kezdetben nem választott – 8 embert, ők mindenképpen erősek lesznek, mert köztük van egy olyan ember aki a másik 9 emberből mindenkit legyőzött.

Bodó Rókus Dániel (Szegedi Radnóti M. Kísérleti Gimn., 9. o. t.)
dolgozata alapján

3. megoldás. Az összes meccs száma: $\frac{17 \cdot 16}{2}$. Mivel minden meccset megnyerte az egyik résztvevő, így a nyert meccsek átlagos száma $\frac{17 \cdot 16}{2 \cdot 17} = 8$, tehát biztosan van olyan ember, aki legalább 8 meccset nyert.

Ekkor megalkotható az erős csapat úgy, hogy annak tagja ő (az egyik legalább 8 meccset nyert diák), és még azon legfeljebb 8 ember, akiket nem győzött le. Az elsőnek kiválasztott diák ugyanis minden csoporton kívüli diákot legyőzött, ezért a kiválasztottak erős csoportot alkotnak. Tehát az állítás igaz: mindig van legfeljebb 9 fős erős csoport.

Rákóczi Bartos (Szegedi Radnóti M. Kísérleti Gimn., 9. o. t.) és *Kallós Klára* (Nyíregyháza, Szent Imre Kat. Gimn., Két Tan. Nyelvű Ált. Isk., Koll., 8. o. t.)
dolgozata alapján

4. Megoldás. A 17 játékost tekintsük egy G gráf csúcsainak. Ha A legyőzi B -t, akkor rajzoljunk irányított élt A -ból B felé. Így egy 17 csúcsú irányított teljes gráfot kapunk.

Tekintsük a csúcsok egy K részhalmazát. G egy csúcsát K által lefedettnek fogunk nevezni, ha olyan él végpontja, amelynek kezdőpontja K -ban van.

Készítsük el a csúcsok egy E halmazát a következő módon:

Mivel egy n -csúcsú gráfban az összes (kimenő) él száma

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$

ezért van legalább egy olyan csúcs, amelynek kimenő foka legalább $\frac{n-1}{2}$. (És így legalább 8.) Válasszunk ki egy ilyen csúcsot, nevezzük el v_1 -nek és „tegyük bele” az E halmazba. (Egyelőre ez a halmaz egyetlen eleme.) Jelölje m azon csúcsok számát, amelyeket E nem fed le, vagyis v_1 nem győzött le. Nyilván $m \leq 8$. Ha $m = 0$, akkor készen vagyunk, E egy (egyfős) erős csoport. Ha $m > 0$, akkor tekintsük az E által le nem fedett csúcsokat a közöttük levő élekkel. Ez is egy irányított teljes gráf, így itt van olyan csúcs, amelynek itteni foka legalább $(m-1)/2$. Egy ilyen v_2 csúcsot is tegyünk bele E -be.

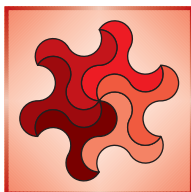
Ismételjük meg az eljárást a maradék csúcsokon. 17 csúcs esetén m az egyes lépések után legfeljebb 8, 3, 1, majd 0 lesz.

Tehát legfeljebb 4 lépés szükséges, hogy minden csúcsot lefedjünk.

Az így kiválasztott csúcsok E halmaza erős csoportot határoz meg, a mérete 4, tehát biztosan van legfeljebb 9 fős erős csoport.

Pap Lola (Budapest, Madách I. Gimn., 11. o. t.) dolgozata alapján

A feladatra összesen 155 versenyző és csapat küldött megoldást. 5 pontos 99, 4 pontos 5, 3 pontos 6, 2 pontos 4, 1 pontos 17.



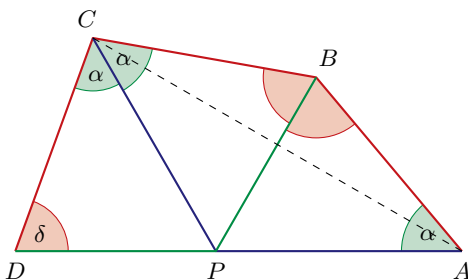
Matematika feladatok megoldása

B. 5472. Az $ABCD$ konvex négyszögben $AB = BC = CD$. Igazoljuk, hogy ha $BCD\angle = 2DAB\angle$, akkor $ABC\angle = 2CDA\angle$.

(4 pont)

Javasolta: *Kós Géza* (Budapest) és *Vigh Viktor* (Sándorfalva)

1. megoldás. Legyen a négyszög A csúcsnál fekvő szöge α , a feladatban szereplő feltétel szerint akkor $BCD\angle = 2\alpha$.



A BCD szögfelezője messe az AD oldalt a P pontban. Az $ABCP$ négyszög deltoid, mivel $AB = BC$ és a $BCD\angle$ felezése után $DAB\angle = BCP\angle = \alpha$. Ezzel beláttuk, hogy $CP = PA$ is teljesül.

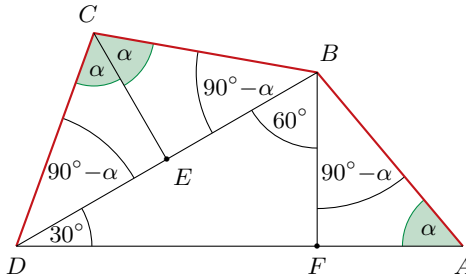
Az ABP és CDP háromszögek egybevágók, mert két-két oldaluk – $AB = CD$, $PA = PC$ – egyenlő és megegyezik az ezek által közbezárt szögük is: $BAP\angle = DCP\angle$. Az egybevágóság alapján a két háromszög további megfelelő szögei is egyenlők, $ABP\angle = CDP\angle$. A deltoid BP átlója felezi az ABC szöveget, tehát az ABC szög valóban kétszerese a CDA szögnek.

Megjegyzés. A négyszöget a CP szögfelezővel és az $ABCP$ deltoid BP átlójával három egybevágó háromszögre bontottuk, így

$$APB\angle = BPC\angle = CPD\angle = 60^\circ.$$

Székrenyes Sára Róza (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 8. o. t.)

2. megoldás. Az előző megoldás jelöléseit megtartva legyen a C pontból a BD átlóra állított merőleges talppontja E , továbbá a B pontból az AD -re állított merőleges talppontja F .



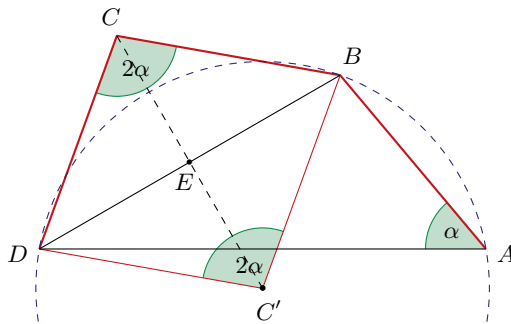
Tudjuk, hogy $BC = CD$, így EC a BD szakaszfelező merőlegese, $BE = ED$ és $BCE\angle = ECD\angle = \alpha$. Az ABF, BCE, DCE derékszögű háromszögek átfogói ugyanakkorak és egy hegyesszögük α , tehát egybevágók. Így $FB = BE = ED$ és a BFD derékszögű háromszög átfogója kétszerese az FB befogónak, a háromszög félszabályos. Ezután az állításban szereplő szögek:

$$CDA\angle = CDE\angle + BDA\angle = 90^\circ - ECD\angle + BDF\angle = 90^\circ - \alpha + 30^\circ = 120^\circ - \alpha,$$

$$ABC\angle = ABF\angle + FBD\angle + EBC\angle = 2(90^\circ - \alpha) + 60^\circ = 240^\circ - 2\alpha = 2 \cdot CDA\angle.$$

Kiss Villő Zsófia (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. o. t.)

3. megoldás. Az eddigi jelöléseket továbbra is megtartjuk. Tükrözzük a C pontot a négyszög BD átlójára. Legyen a tükörképpont C' .



Megmutatjuk, hogy ez a C' pont az ABD háromszög körülírt körének középpontja. Ez a C' pont a BD felezőmerőlegesén helyezkedik el, a C' és A pontok a BD egyenesnek ugyanabban a félsíkjában vannak, továbbá

$$BC'D\angle = DCB\angle = 2\alpha = 2 \cdot BAD\angle.$$

Ezek alapján a $BC'D\angle$ csak a BD ívhez tartozó középponti szög lehet az ABD körülírt körben.

A körülírt kör sugara $BC' = BC = AB = C'A$, az ABC' háromszög szabályos. Az ABD körben az AB ívhez tartozó középponti szög 60° , így az ADB kerületi szög 30° .

Ezután a 2. megoldáshoz hasonló szögszámolással:

$$ADB\angle = 90^\circ - \alpha + 30^\circ = 120^\circ - \alpha,$$

$$CBA\angle = CBD\angle + DBC'\angle + C'BA\angle = 2(90^\circ - \alpha) + 60^\circ = 240^\circ - 2\alpha.$$

Ezzel beláttuk, hogy

$$CBA\angle = 2 \cdot CDA\angle.$$

Hajba Milán (Győr, Révai Miklós Gimn. és Koll., 11. o. t.)

A feladatra összesen 105 versenyző és csapat küldött megoldást. 4 pontos 73, 3 pontos 11 dolgozat. 2 pontot kapott 9, 1 pontot 2 versenyző. Nem versenyszerű 1 tanuló dolgozata, 0 pontos 8 dolgozat. Nem értékeljük 1 fő dolgozatát.

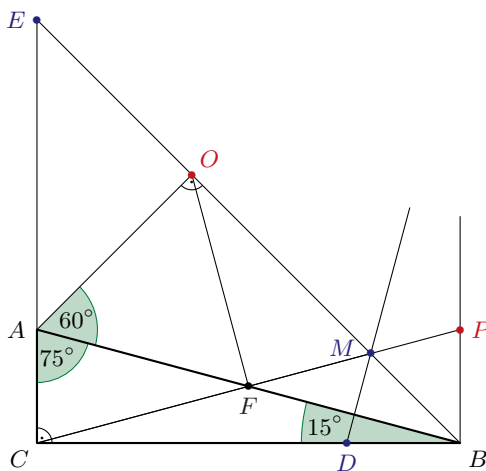
B. 5489. Az ABC derékszögű háromszögben $ABC\angle = 15^\circ$ és $CAB\angle = 75^\circ$, továbbá az AB átfogó felezőpontja F . A BC befogón vegyük fel a D pontot úgy, hogy $BD = CA$, a CA félegyenesen az A ponton túl az E pontot úgy, hogy $CE = BC$ teljesüljön. A BE és CF egyenesek metszéspontja legyen M . Bizonyítsuk be, hogy a DM és CM egyenesek érintik az AEF háromszög köré írt kört.

(4 pont)

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

Megoldás. Mivel a feltétel szerint $CE = CB$, ezért a BEC egyenlő szárú derékszögű háromszög, így egyrészt $BEC\angle = CBE\angle = 45^\circ$, másrészt $ABE\angle = 30^\circ$.

Állítsunk A -ból merőlegest BE -re, a merőleges talppontja legyen O . Ekkor $ABE\angle = 30^\circ$ miatt az ABO derékszögű háromszög egy szabályos háromszög fele, tehát $OAB\angle = 60^\circ$, valamint $OA = \frac{AB}{2} = AF$. Tekintsük az ábrát.



Az AFO egyenlő szárú háromszög szabályos, mert az AF és OA szárak által bezárt szög nagysága 60° . Ebből az is következik, hogy O illeszkedik az AF

felezőmerőlegesére. Nyilvánvaló, hogy $\sphericalangle BEA = 45^\circ$, ezért az EOA egyenlő szárú derékszögű háromszög és így

$$OA = AF = FO = OE.$$

Eszerint az O egyenlő távolságra van az A, E, F pontoktól, tehát O az AEF háromszög körülírt körének középpontja.

Az ACF egyenlő szárú háromszögben $\sphericalangle FAC = \sphericalangle ACF = 75^\circ$, ezért $\sphericalangle CFA = 30^\circ$, innen $\sphericalangle AFO = 60^\circ$ miatt $\sphericalangle CFO = 90^\circ$, tehát $OF \perp CM$, vagyis az AEF kör sugara merőleges CM -re, tehát CM érintője a körnek.

Párhuzamost húztunk a B ponton keresztül CE -vel, a párhuzamos és a CM egyenes metszéspontja P . A párhuzamosságból következik, hogy $\sphericalangle MBP = 45^\circ$.

Tudjuk, hogy a CBF egyenlő szárú háromszög, emiatt $\sphericalangle FCB = 15^\circ$ és így a PCB derékszögű háromszögben $\sphericalangle BPC = 75^\circ$. A megfelelő szögek egyenlősége és a 75° -os szöggel szemközti közös BC oldal azt jelenti, hogy az ABC és PCB háromszögek egybevágók, ezért

$$AC = BD = BP.$$

A PMB és BMD háromszögek egybevágók, mert közös bennük a BM szakasz, és $BP = BD$, valamint a két háromszögben az egyenlő hosszúságú szakaszok által bezárt $\sphericalangle MBP$, illetve $\sphericalangle DBM$ szögek mindegyike 45° -os. Ez azt is jelenti, hogy a PMB háromszögnek a BE egyenesre vonatkozó tükörképe éppen a BMD háromszög.

Mivel a PM egyenessel azonos CF egyenes érintője az AEF körnek, ezért a PM egyenesnek a BE -re vonatkozó DM tükörképe is érinti az AEF kört.

Ezzel a feladat mindkét állítását igazoltuk.

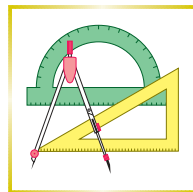
Maróti Olga (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium, 9. o. t.)
dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. A helyes megoldások egy része a honlapon található első megoldásnak felelt meg, néhány pedig a honlap második megoldásában szereplő $BGEC$ négyzetet (vagy annak megfelelőt) konstruálta meg és ennek alapján bizonyított. Több, a fenti megoldáshoz hasonló helyes megoldás is született, amelyben az A pontból a BE -re bocsátott merőleges talppontjáról látták be, hogy az nem más, mint az AEF kör középpontja, majd egy geometriai konstrukció segítségével megadták a D pontnak a BE -re vonatkozó tükörképét (ez az ábrán a P pont). Jó néhányan koordináta-geometriai megközelítést használtak, célszerűen a C pontot választva origónak, a CB és CA oldalak egyeneseit koordinátatengelyeknek.

2. A felmerülő hibák főként az indoklás vagy a hivatkozások hiányosságai, bizonyítási lépések hibái és elhanyagolásai, illetve az ábra hiánya voltak.

A feladatra 71 dolgozat érkezett. 4 pontos 37, 3 pontos 5, 2 pontos 13, 1 pontos 10, 0 pontos 4. Nem versenyszerű 2 dolgozat.

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (892–893., 1888–1892.)



Feladatok 10. évfolyamig

K/C. 892. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

K/C. 893. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

Feladatok mindenkinek

C. 1888. Anna felírt minden háromjegyű pozitív egész számot a táblára, mindegyiket pontosan egyszer. Boglárka egymás után letörölte Anna számait, és mindegyik helyére azt a számot írta fel, amelyet úgy kapott, hogy az első és a második számjegy összegéből kivonta az utolsó számjegyet. Például a 225 helyett $2 + 2 - 5 = -1$ -et, a 973 helyett $9 + 7 - 3 = 13$ -at írt. Mennyi a Boglárka által a táblára felírt számok összege?

Javasolta: *Kozma Katalin Abigél* (Győr)

C. 1889. Egy számegegyenesen be van jelölve az 1 és a $\sqrt{5}$, semmi más. Adjuk meg szerkesztéssel a számegegyenesen a 0 helyét. (Az elemi szerkesztési lépéseket, mint például szög felezése, tengelyes tükrözés, nem kell részletezni.)

Javasolta: *Veszprémi Ferenc* (Budapest)

C. 1890. Bizonyítsuk be, hogy a $\sqrt[3]{a}$ irracionális szám nem írható fel $b + c\sqrt{d}$ alakban, ahol a, b, c, d természetes számok.

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1891. Az ABC háromszög beírt körének középpontja I , az AI egyenes a háromszög körülírt körét másodszor a D pontban metszi. A CDI háromszög körülírt körének és a BC szakasznak a második metszéspontja E . Bizonyítsuk be, hogy $BE = IE$.

Javasolta: *David Nguyen* (Sydney, Ausztrália)

C. 1892. Bizonyítsuk be, hogy

$$\binom{\binom{n}{2}}{3} = 15 \binom{n}{6} + 30 \binom{n}{5} + 16 \binom{n}{4} + \binom{n}{3}$$

teljesül minden pozitív egész n számra.

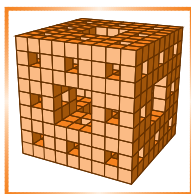
Javasolta: *Paulovics Zoltán* (Budapest)



Beküldési határidő: 2026. március 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>





A B pontversenyben kitűzött feladatok (5510–5517.)

B. 5510. Egy kocka lapjaira írjunk valós számokat úgy, hogy a szemközti lapokon levő számok összege mindig 7 legyen. Ezután képezzük mindegyik csúcsnál a vele érintkező lapokra írt számok szorzatát. Legfeljebb mennyi lehet ennek a nyolc szorzatnak az összege?

(3 pont)

Javasolta: *Németh László* (Fonyód)

B. 5511. Mutassuk meg, hogy ha az egységkör átmérőjét egy húr 45 fokban metszi, akkor a húron keletkező két szakasz hosszának négyzetösszege 2.

(3 pont)

Javasolta: *Vígh Viktor* (Sándorfalva)

B. 5512. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges k és n pozitív egészekre

$$\frac{1}{\sqrt[n]{k}} + \frac{1}{\sqrt[k]{n}} \geq 1 + \frac{1}{kn}.$$

(4 pont)

Javasolta: *Holló Gábor* (Budapest)

B. 5513. Az $ABCDEF$ szabályos hatszög belsejében adott egy P pont úgy, hogy az ABP , BCP és CDP háromszögek területe rendre 25, 31, illetve 32 egység. Számítsuk ki a DEP , EFP és FAP háromszögek területét.

(4 pont)

Javasolta: *Kós Géza* (Budapest)

B. 5514. Az ABC háromszög oldalait a szokásos módon jelölve $a \geq b \geq c$. A C csúcsból induló szögfelező talppontja P . Bizonyítsuk be, hogy a CP , BP , CP , PA hosszúságú oldalakkal szerkesztett húrtrapéz átlója \sqrt{ab} hosszúságú.

(5 pont)

Javasolta: *Hujter Mihály* (Budapest)

B. 5515. Fel lehet-e írni egy szabályos 1000-szög minden csúcsára egy-egy számjegyet úgy, hogy a 000, 001, 002, ..., 998, 999 számok mindegyike összeolvasható legyen valamely három egymást követő csúcstről az óramutató irányában haladva?

(5 pont)

Javasolta: *Beke Csongor* (Cambridge) ötletéből

B. 5516. Egy parabolába beleírtunk egy derékszögű háromszöget úgy, hogy az átfogóhoz tartozó magasság talppontja a parabola fókuszpontja. Mekkora lehetnek a háromszög szögei?

(6 pont)

Javasolta: *Holló Gábor* (Budapest)

B. 5517. Mely p prímszámok esetén létezik az $1, 2, \dots, p-1$ számoknak olyan a_1, a_2, \dots, a_{p-1} permutációja, amelyre $a_1^1, a_2^2, \dots, a_{p-1}^{p-1}$ páronként különböző maradékot adnak p -vel osztva?

(6 pont)

Javasolta: *Pach Péter Pál* (Budapest)

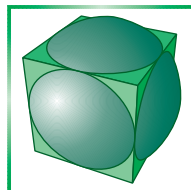


Beküldési határidő: 2026. március 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (926–928.)



A. 926. Legyen

$$A = \left\{ \left[\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \cdot n \right] : n = 1, 2, 3, \dots \right\} = \{2, 5, 7, 10, 13, 15, \dots\}.$$

Két játékos, Kezdő és Második egy N érméből álló kupaccal játszik a következő szabályok szerint. A játékosok felváltva lépnek, Kezdő kezd. Minden lépésben a soron következő játékos választ egy $k \in A$ számot, majd elvesz k darab érmét a kupacból. Az a játékos, aki nem tud szabályos lépést tenni, elveszíti a játékot.

Határozzuk meg, hogy N -től függően melyik játékosnak van nyerő stratégiája, és adjuk meg egy nyerő stratégiáját.

Javasolta: *Sztranyák Attila* (Budapest)

A. 927. Legyen $ABCDEF$ egy bicentrikus hatszög, azaz olyan húrhatározott, amelybe kör írható. Tegyük fel, hogy létezik olyan P pont, amelyre az AP egyenes merőleges a BF egyenesre, CP merőleges BD -re, és EP merőleges DF -re. Bizonyítsuk be, hogy a hatszög valamelyik két szemközti oldalának összege egyenlő a hatszög köré írt kör átmérőjével.

Javasolta: *Andrei Chirita* (Cambridge)

A. 928. Legyenek $a_0 = 0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$ olyan egész számok, amelyekre a $b_k = \frac{a_{k+1} - a_k}{2k + 1}$ sorozat ($k = 0, 1, \dots, n-1$) monoton nő. Tegyük fel, hogy c_1, c_2, \dots, c_n olyan valós számok, amelyekre az $1 + \sum_{k=1}^n c_k x^{a_k}$ polinom osztható az $(x+1)^n$ polinommal. Mutassuk meg, hogy

$$2 > |c_1| > |c_2| > \dots > |c_n|.$$

Javasolta: *Kós Géza* (Budapest)



Matematikai képzések az ELTE TTK-n

Kedves leendő Egyetemista! A *KöMaL* olvasójaként bizonyára szívesen foglalkozol matematikával, és felmerülhetett már Benned az a gondolat, hogy életpályádul ennek a szép tudománynak a művelését választod, illetve szeretnél megismerkedni alkalmazásaival a műszaki, gazdasági és pénzügyi élet különböző területein.

Az alkalmazott matematika ma már az élet szinte minden területén nélkülözhetetlen, és az ilyen képzettségű munkaerő iránt egyre növekszik az igény. A *Fortune* magazin cikke szerint a legjelentősebb változás az üzleti életben az ipari forradalom óta a matematikai algoritmusok térhódítása (<https://fortune.com/2015/01/22/the-algorithmic-ceo/>). Egy amerikai felmérés évről évre a legjobb foglalkozások között tartja számon a matematikus végzettségűek számára elérhető adattudós, aktuárius és statisztikus munkaköröket (<https://money.usnews.com/careers/best-jobs/rankings/the-100-best-jobs>). Mindez Magyarországra is igaz, az ELTE-n végzett matematikusokat nemcsak a kutatóintézetek, egyetemek várják, hanem számos cég is, igen jó fizetéssel.

Esetleg még nem döntöttél, de leginkább matematikából folytatnál felsőfokú tanulmányokat? Minderre kitűnő lehetőség nyílik az ország egyik legnagyobb múltú egyetemén, az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karán, ahol világhírű professzoroktól és lelkes, közvetlen fiatal oktatóktól tanulhatsz. Pezsgő diákélet vár rád az ELTE korszerű számítógépparkkal felszerelt, a *KöMaL* szerkesztőségének is otthont adó modern lágymányosi épületegyüttesében.

A bolognai képzési rendszerbe illeszkedik BSc képesítést nyújtó hároméves matematikai alapképzésünk. Itt az első évben hallgatói és oktatói mentorok biztosítják, hogy mindenki be tudjon illeszkedni és találjon előismereteinek, képességeinek és tanulási sebességének megfelelő nehézségű feladatokat. Az első év végén dönthetsz arról, hogy milyen témákkal szeretnél a továbbiakban behatóbban foglalkozni.

A kínálat széles: aki szeretne, elmélyedhet az elméleti matematika kérdéseiben, hiszen szinte minden fontos területről hirdetünk kurzusokat. Ezek építenek a magyar matematikai kutatások méltán világhírű hagyományaira, ugyanakkor szilárd alapokat nyújtanak a modern matematika műveléséhez, jól felkészítve hallgatóinkat a leendő kutatói munkára.

Akit viszont az alkalmazások érdekelnek, megteheti, hogy az alapok elsajátítása után olyan modern témákkal is foglalkozzon, mint az adattudomány vagy a mesterséges intelligencia matematikai kérdései. Azoknak is ajánljuk a matematika alapképzési szakot, akik ismereteiket később inkább a matematikán kívül szeretnék majd gyümölcsöztetni. Itt szerzett tudásukat hasznosíthatják például gazdasági területen, médiában, a matematika népszerűsítésében, a közművelődésben – és a megszerzett matematikai gondolkodásmód mindvégig segíteni fogja őket a munkájukban.

A képzés egyéb vonatkozásairól további részletek a <http://www.math.elte.hu/> honlapon a Képzések menüpont alatt találhatóak. Ajánljuk a középiskolásoknak szülő oldalainkat is, ahol végzett diákjainkkal készült interjúk is láthatók.

A legkiemelkedőbb hallgatók az egyetemi oktatómunkába is bekapcsolódhatnak, és jó eséllyel pályázhatnak ösztöndíjakra, külföldi részképzésre (pl. az Erasmus+ program keretében). Az EKÖP ösztöndíjprogramja már a leendő elsőéveseknek is elérhető! Részletes tájékoztató: http://csikvarip.web.elte.hu/diak_kutatas.html.

Az alapképzést további kétéves szakasz követ(het)i (mesterképzés vagy röviden MSc), egyetemünkön a Matematikai Intézet gondozásában matematikus, alkalmazott matematikus, valamint biztosítási és pénzügyi matematika mesterszakok indulnak. BSc-t végzett hallgatóink természetesen más (bel- és külföldi) oktatási intézmény programjain is folytathatják tanulmányaikat. A mesterszakot végzettek közül a legkiválóbbak számára biztosítjuk a doktori fokozat megszerzésének lehetőségét (PhD-képzés).

Egyetemünkön gondosan ápolt hagyomány, hogy a rátermett, tehetséges diákok neves professzorok vezetésével bekapcsolódnak a tudományos kutatásba. A legkiválóbb hallgatók matematikai versenyeken is sikerrel szerepelnek, például az Egyetemi Hallgatók Nemzetközi Matematikaversenyén kétszer is az ELTE csapata végzett az élen több mint 70 egyetem csapatának versenyében – olyan nagyhírű egyetemeket is megelőzve, mint a Yale, a Princeton vagy a Moszkvai Állami Egyetem.

Matematikatanár-képzés az ELTE TTK-n

Az ELTE Természettudományi Karán sok évtizedes múltra tekint vissza a matematika szakos tanárképzés. Az általános és középiskolák részéről mindig jelentős igény mutatkozott a nálunk végzett matematikatanárok iránt, akik közül sokan külföldön is sikeres oktatói pályát futottak be.

A matematika szakos tanári pályát elsősorban azoknak a középiskolás diákoknak ajánljuk, akik számára örömet jelent érdekes matematikai feladatokon gondolkodni, és jó érzést okoz a megoldásokra másokat is rávezetni, másokkal is megosztani azt az élvezetet, amit a matematika megismerése jelent.

A tanárképzés osztatlan formában zajlik. A tanárképzésre való jelentkezés során a leendő hallgatóknak egy szakpárt kell megjelölni. Az ELTE-n a matematika szak mellé természettudományos szakokon és az informatikán kívül választani lehet a bölcsész szakok (például a magyar, a történelem vagy a nyelvszakok) közül is. A szaktárgyi tanítási gyakorlatok teljesítésére az ELTE hallgatóinak a legjobb budapesti iskolákban, kiváló vezetőtanárok irányítása mellett nyílik lehetőségük.

Bátran állíthatjuk tehát, hogy a KöMaL minden olvasójának testhezálló képzést tudunk nyújtani az ELTE Matematikai Intézetében. Az ELTE TTK idén december 9-én tartotta a nyílt napját: <https://ttk.elte.hu/nyiltnap2023>. Ha esetleg későn jutna el hozzád ez a hír, a program a fenti linken vissza is nézhető.



Informatikából kitűzött feladatok (687–690.)

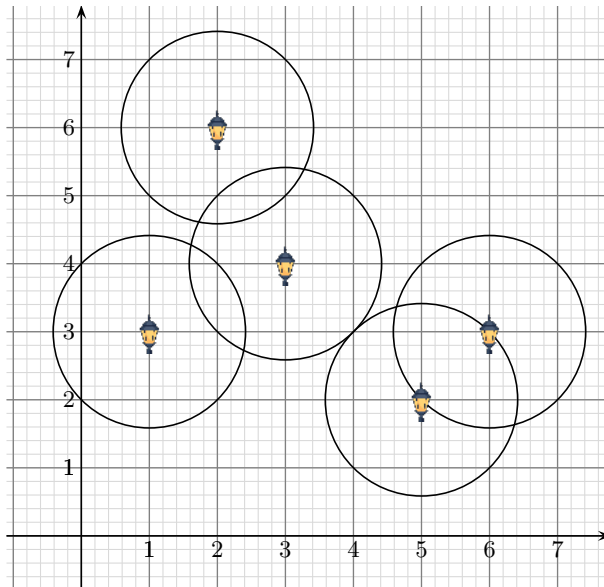
I. 687. Sajnos a park lámpái gyengék és van, amelyik tönkrement. A park felújításához a régi oszlopokra új lámpákat fognak tenni. Minden lámpa azonos típusú lesz, azonos sugarú kört fog megvilágítani. A megvilágítás sugarát úgy kell megválasztanunk, hogy minimális legyen, mivel spórolni kell, de minden lámpaoszloptól bármelyik másikhöz el lehessen jutni a megvilágított területeken keresztül. Készítsünk programot *i687* néven, amely megadja a lámpák fénykörének legkisebb sugarát, amely a feltételeknek megfelel.

A program standard bemenetének első sorában a lámpaoszlopok N száma ($1 \leq N \leq 1000$) található. A következő N sorban a lámpaoszlopok x_i, y_i koordinátái ($1 \leq x_i, y_i \leq 100\,000$, egész szám) szóközzel elválasztva szerepelnek.

A program standard kimenetére írjuk ki a lámpa fénykörének minimális sugarát valós számként 10^{-6} pontossággal.

Bemenet:	Kimenet:
5	1.4142135
1 3	
2 6	
3 4	
5 2	
6 3	

Magyarázat:



Beküldendő egy tömörített *i687.zip* állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely tartalmazza a megoldás rövid leírását, és megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

(10 pont)

I. 688. Adott egy N oldalú négyzetháló, amelyben a villámok terjedését szeretnénk szimulálni. A négyzetháló celláiban 99 jelöli a villámot elnyelő (például földelő) cellákat, amelyek adottak. A négyzet többi celláját töltjük fel $0 \dots 98$ közötti véletlen számokkal. A négyzet felső sorának 99-en kívüli, maximális értékű celláiból fognak a villámok kiindulni. Ha több maximális értékű cella van, akkor egyszerre több villám indul ki. A villámok lefelé tejednek tovább, az érkező villám le balra, lefelé, vagy le jobbra terjedhet.

Az érkező villám lehetséges útja a negyedik sorban vastagon keretelve a mellékelt táblázatban. A három lehetséges szám közül a maximális érték irányába folytatódik a villám. Ha azonos számokat talál, akkor ezek irányában szétágazik. Ha eléri a terület határát vagy egy 99 tartalmú cellába fut bele, akkor ott a terjedés megáll. Ha két villám egyszerre ér egy azonos pontba, akkor ott egyesülnek.

91	82	36	95	60
75	96	23	43	27
99	43	52	42	0
99	65	67	80	88
99	99	61	20	1

Készítsünk programot, amely az N oldalú négyzethálóban a villámok terjedését mutatja be.

A program standard bemenetének első sorában a négyzetháló oldalhossza N ($5 \leq N \leq 100$) található. A következő N sorban szóközzel elválasztva egy-egy cella kezdő állapota szerepel, azaz 99, ha elektromos földelés, vagy -1 , ha az még nem kitöltött.

Végezzük el a négyzetháló celláinak feltöltését, azaz a -1 értékek lecserélését $0 \dots 98$ közötti véletlen számokra.

A programmal a parancssorba a négyzetháló celláinak tartalmát írjuk ki. A villámok útvonalát a számok piros betűszínével ábrázoljuk. A számok, illetve a karakterek között egy-egy szóköz legyen.

Minta:

Bemenet:	Kimenet:
8	91 82 36 95 60 40 95 50
-1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1	75 96 23 43 27 42 18 7
-1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1	99 43 52 42 0 58 47 99
99 -1 -1 -1 -1 -1 -1 99	99 65 67 80 88 24 86 99
99 -1 -1 -1 -1 -1 99	99 99 61 20 1 99 99 99
99 99 -1 -1 -1 99 99 99	99 91 91 35 96 28 99 99
99 -1 -1 -1 -1 -1 99 99	99 99 24 84 39 78 99 99
99 99 -1 -1 -1 -1 99 99	99 99 99 94 86 99 99 99
99 99 99 -1 -1 99 99 99	

Beküldendő egy tömörített *i688.zip* állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely tartalmazza a megoldás rövid leírását, és megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

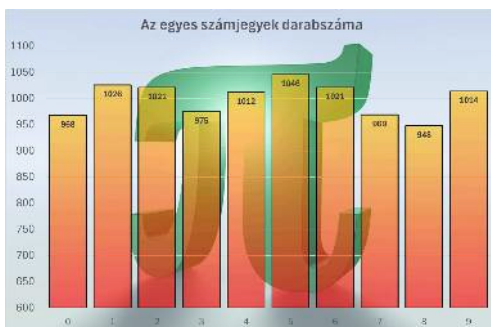
(10 pont)

I. 689. A <http://www.t-es-t.hu/minden/tudom/pii/pi10000.txt> linken elérhető a π első 10000 számjegye.

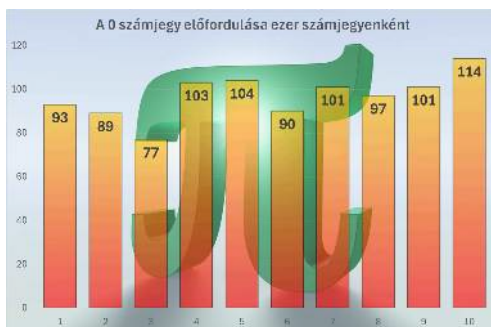
1. Jelöljük ki a számjegyeket és másoljuk a vágólapra.
2. Nyissunk meg egy szövegszerkesztőt, és illesszük be a vágólap tartalmát egy üres dokumentumba.
3. Kizárólag szövegszerkesztő és táblázatkezelő használatával valósítsuk meg, hogy a táblázat első sorában az **A:J** oszlop celláiban a π -nek pontosan az első tíz számjegye, a továbbiakban folytatólagosan a következő tíz–tíz számjegye jelenjen meg a minta szerint.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	3	1	4	1	5	9	2	6	5	3	
2	5	8	9	7	9	3	2	3	8	4	
3	6	2	6	4	3	3	8	3	2	7	
4	9	5	0	2	8	8	4	1	9	7	
5	1	6	9	3	9	9	3	7	5	1	
999	2	0	5	6	0	0	1	0	1	6	
1000	5	5	2	5	6	3	7	5	6	8	
1001											

4. Igazoljuk, hogy az eredmény valóban csak a szövegszerkesztő és a táblázatkezelő segítségével készült: a pontos lépésekről készítsünk dokumentációt. Ehhez hasonlók szerepeljenek a leírásban: „A táblázatkezelőben kijelölöm az A oszlopot, majd a Keresés és csere menüpontban az összes „#” karaktert lecserélem „-re, vagyis törlöm.”
5. Készítsünk oszlopdiagramot arról, hogy a vizsgált 10000 számjegyben hányszor szerepel a 0, 1, ..., 9. A diagramot készítsük el új, diagram típusú munkalapra, és rajpon a minta szerinti kinézetet.



6. Készítsünk oszlopdiagramot, amely szemlélteti, hogy az első ezer, a második ezer, ... számjegy között hányszor szerepel a 0. Ezt a diagramot is készítsük el a minta szerint.



7. Határozzuk meg, hogy a π első 10000 számjegye közül melyik számjegy ismétlődik közvetlenül egymás után a legtöbbször. Mekkora az ismétlődő szakasz hossza, és melyik tizedesjegytől hányadikig tart? Készítsük el a minta szerinti helyen a táblázatot és kerüljenek az eredmények a sárga mezőkbe.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	3	1	4	1	5	9	2	6	5	3		A π első 10 000 számjegye között a	
2	5	8	9	7	9	3	2	3	8	4		legtöbb egymást következő azonos	
3	6	2	6	4	3	3	8	3	2	7		számjegy:	
4	9	5	0	2	8	8	4	1	9	7		a szakasz hossza:	
5	1	6	9	3	9	9	3	7	5	1		az első tizedesjegy helye:	
6	0	5	8	2	0	9	7	4	9	4		az utolsó tizedesjegy helye:	
7	4	5	9	2	3	0	7	8	1	6			

A diagramokhoz ezen az oldalon találhatjuk meg a háttérképet: <https://www.scientificamerican.com/article/a-wild-claim-about-the-powers-of-pi-creates-a-transcendental-mystery/>.

Segédszámításokat tetszőleges, adatot nem tartalmazó helyen lehet végezni. A megoldásban saját függvény vagy makró nem használható.

Beküldendő egy tömörített *i689.zip* állományban a *pi-10000* néven mentett táblázatkezelő munkafüzet és egy dokumentáció, amelyben szerepel az átalakítás 4. pontban kért lépéssorozatának részletes leírása, a készítő neve, iskolája, a táblázatkezelő neve és verziószáma.

(10 pont)

I. 690. Egy diák a különféle operációs rendszerek parancssori utasításait tanulmányozza. Gondolta, hogy egyszerre megtanulja a legelterjedtebbeket: a Windows, a Linux és a MacOS parancsait. A három operációs rendszerben vannak hasonló tevékenységek, például fájlok másolása, törlése, mozgatása stb. Ezek neve sok esetben hasonló, egyes esetekben azonos, vagy kissé eltérő. A <https://www.kaggle.com/datasets/vaibhavdlights/linuxcmdmacos-commands> oldalon elérhetők a három operációs rendszer parancssori utasításai. Minden utasításhoz kapcsolódik egy rövid angol leírás. Ezek hasonló funkciójú parancsok esetében szintén hasonlítanak egymásra.

A három operációs rendszer utasításainak közös tanulásához hasznos lenne kapcsolatot létrehozni a három utasításkészlet között. A diák úgy gondolta, hogy két különböző operációs rendszerben lévő parancs közötti kapcsolat annál erősebb,

minél inkább hasonlít a nevük, illetve minél több közös szó szerepel a leírásukban. A kapcsolat erősségét egy pontszám adja meg, amelynek számítása a következő:

1. 20 pontot ér, ha a két utasítás neve azonos;
2. ha a két utasítás neve nem azonos, de az egyik utasítás legalább 5 első betűje szerepel a másik utasításban, akkor ez 10 pontot ér;
3. az utasítások nevétől függetlenül további 2-2 pontot jelent a két utasítás leírásában minden azonos szó, vagy ha a szavak legalább első 5 betűje megegyezik.

Például a `cd` parancs mindhárom operációs rendszerben szerepel, tehát a Windows `cd` parancs és a Linux `cd` parancs között 20 pont a kapcsolat erőssége a fenti első eset szerint. Ehhez jön még további 4 pont, mivel mindkét leírásban szerepel a „change” és a „directory” szó. Így a két operációs rendszerben a két parancs kapcsolatának erősségét 24 pontra értékeljük.

A fenti számításban a kis- és nagybetűket egyenértékűnek tekintjük. Ne vegyük figyelembe a pontszám kiszámításakor a leírásban a névelőket, kötőszavakat és elöljárókat, például „a”, „an”, „the”, „or”, „to”, „from”, „of”, „on”, „and”, „for”.

Az utasítások közötti kapcsolatot felhasználva készítsünk programot, vagy táblázatkezelő munkafüzetet, vagy SQL adatbázist, amely segíti a tanulást:

Az egyik módon úgy, hogy egy szavakból álló keresőkifejezésre (például a „file copy”, vagy „make directory”) megadja mindhárom operációs rendszer utasításaiból a leginkább releváns találatokat. Ehhez a fenti pontozásból a 3. pontot alkalmazza a keresőkifejezés és a parancsok leírása közötti erősség kiszámítására. Csak a 0-nál nagyobb erősségű parancsokat adja meg, erősség szerint csökkenő sorrendben.

A másik módnál az egyik operációs rendszer valamely utasítását megadva bemenetként válaszul megadja a másik két operációs rendszerben a bemenethez leginkább kapcsolódó utasításokat a kapcsolat erőssége szerinti csökkenő sorrendben.

A fenti műveleteket úgy valósítsuk meg, hogy a program bekéri a parancssorból a bemeneti értékeket, vagy néhány cellába kell beírni azokat, vagy egy SQL utasításban pl. a `WHERE` feltételben szerepelnek. A program az eredményeket kiírja a parancssorba, a táblázatkezelő megjeleníti azokat adott cellákban, illetve az SQL lekérdezés eredményül adja őket.

Beküldendő egy tömörített *i690.zip* állományban a program forráskódja, vagy a táblázatkezelő munkafüzet, vagy az SQL adatbázis, valamint egy felhasználói dokumentáció, amelyben szerepel a megoldás használatának módja. A program a szokásos módon folytasson párbeszédet a felhasználóval. A táblázatkezelő munkafüzetben jelezzük, hogy melyik cellákba várunk bemenetet, és jelöljük, hogy mely cellákban kapunk eredményeket. Adatbázis-kezelés esetén a szöveges kereséshez adjuk meg a használható SQL parancsot, például `SELECT oprsz, parancs, leiras FROM ... WHERE keres = "file copy"`. A megoldás során most is csak a versenykiírásban szereplő programozási nyelvek és alkalmazói programok használhatók.

(10 pont)



Beküldési határidő: 2026. március 16.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



Fedezd fel a világegyetemet – az atomoktól a csillagokig!



Tanulj fizikát az ELTE TTK-n, és alakítsd a jövő technológiáját!

A fizika az a tudomány, amely mindent összeköt: az okostelefonoktól a fekete lyukakig, az orvosi képalkotóktól a részecskegyorsítókig. Ha szeretnél mélyen érteni dolgokat – nemcsak használni a technológiát, hanem azt is, mi van mögötte –, akkor jó helyen jársz.

Az ELTE TTK Fizikai és Csillagászati Intézetében a kíváncsiságból kutatás, az ötletekből felfedezés, a tanulásból pedig valódi lehetőség lesz. Magyarországon a fizika területén az ELTE áll az első helyen, a nemzetközi ARWU rangsorban pedig a 201–300. helyezés közé tartozik a fizika szakterületén – vagyis nemzetközi mércével nézve is erős helyen tanulhatsz.

Mit jelent fizikát tanulni az ELTE-n?

Többszintű, sokoldalú képzés

A hat féléves fizika alapképzés közös törzsszakaszra épül, ahol stabil matematikai, fizikai, informatikai és elektronikai alapokat szerzel. A harmadik félévtől **specializációt** választhatsz az érdeklődésed szerint: fizikus, informatikus fizikus, biofizikus, csillagász, geofizikus vagy meteorológus.

A tárgyak egy részét **normál** és **emelt** szinten is felveheted. A normál szint segít, hogy akkor se maradj le, ha motivált vagy, de még nem rendelkezel igazán stabil alapokkal. Az emelt szintű kurzusok gyorsabb haladást és plusz mélységet adnak.

Valódi eszközökkel, valódi kutatók mellett

A laborokban életre kel a fizika – itt nem csak tankönyveket lapozol, hanem saját mérőeszközöket használsz. Raspberry Pi-vel vezérelt mérések, holográfia, pásztázó elektronmikroszkóp, pozitronemissziós tomográfia, kvantumradár – olyan technikákkal dolgozol, amelyekkel kutatóintézetekben is találkoznál. Itt tanulhatsz meg a kísérletező szemléletet.

Nem kell mindent tudnod már az első napon.

Elég, ha érdekel, hogyan működik a világ, szeretsz kérdezni, és nem riadsz meg a problémáktól. A logikus gondolkodás, a problémamegoldó készség és a kitartás legalább annyira számít, mint az, hogy hány példát oldottál már meg.

Világ színvonalú kutatás, nemzetközi kapcsolatok

Az intézetben a fizika sokféle, modern területével találkozhatasz: a gravitációs hullámok kutatásától a részecskefizikán és biofizikán át az asztrofizikáig, nanotechnológiáig, kvantumszámítógépekig szinte mindennel foglalkozunk, ami ma izgalmas a fizikában. A kutatások gyakran világ színvonalú nemzetközi együttműködésekben

valószínűleg meg – ilyen például a svájci CERN részecskefizikai kutatóközpontja vagy a LIGO gravitációshullám-detektor adatainak elemzése. 2023-ban csatlakozott hozzánk a *Csillagászati Tanszék* is, így még szélesebb az a spektrum, amelyből témát választhatsz.

Ha érdekel a kutatás, már BSc-sként is csatlakozhatsz **tudományos diákköri** projektekhez. Ez az első igazi lépés a saját kutatási témád felé, és kiváló ajánlólevél lehet akár külföldi mesterszakokra vagy doktori képzésekre.

Merre vihet a fizika? – A BSc csak a kezdet

A fizika alapképzés nem lezár egy utat, hanem kaput nyit rengeteg irányba. A nálunk megszerzett erős természettudományos háttér, a magas szintű matematika és a komoly programozási gyakorlat olyan tudásalapot ad, amelyre kutatásban, iparban és a technológiai szektorban egyaránt lehet építeni.

Végzett hallgatóink egyetemeken, kutatóintézetekben és ipari laborokban dolgoznak kutatóként vagy fejlesztőként; mások informatikai és adattudományi területeken helyezkednek el, a szimulációktól és mesterséges intelligenciától a „big data” elemzéséig. Többen részt vesznek hazai és nemzetközi úrkutatási vagy asztrofizikai projektekben, mások energetikai és környezetvédelmi innovációkon dolgoznak. Sokan választanak pénzügyi modellezéssel vagy távközléssel kapcsolatos munkaköröket, és természetesen vannak, akik tanárként adják tovább a fizika iránti lelkesedést.

Az alapidiploma után sem ér véget az út. A BSc-t követően több **mesterképzés** közül választhatsz: a Fizikus MSc (kutatófizikus, biofizikus vagy tudományos adatanalítika és modellezés specializációval), a Csillagász MSc vagy az Anyagtudomány MSc jelenthet továbblépést. A tanulmányok csúcsa a négyéves **doktori iskola (PhD)**, ahol már valódi kutatóként dolgozhatsz, gyakran nemzetközi együttműködésekben.

Hallgatói élet: közösség, ami megtart

Az ELTE TTK nem csak a tanulásról szól: a hallgatói közösség aktív, vidám és rengeteg programot kínál. A Magyar Fizikus Hallgatók Egyesülete (MaFiHe) szakmai programokat, külföldi cseregyakorlatokat, diákkonferenciákat, versenyeket és szabadidős eseményeket szervez.

Minden évfolyamon több kiképzett **mentor** segít a tantárgyfelvételben, az optimális órarend és tanulási stratégia kialakításában, és átadják a felsőbbévesek tapasztalatait.

Miért jó választás a fizikatanár szak?

Ha nemcsak a fizika érdekel, hanem szeretsz magyarázni, segíteni másoknak megérteni a világot, akkor érdemes elgondolkodnod az **osztatlan fizikatanár szakon** is.

2022 óta az új rendszerű, **ötéves** tanárképzés fut.

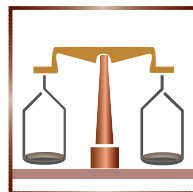
A szakmai és módszertani órákat egyrészt az egyetem kutatói-oktatói, másrészt tapasztalt középiskolai tanárok tartják. A fizikát több másik tantárggyal is párosíthatod, így széles körben választhatsz második szakot.

A **Klebelsberg Képzési Ösztöndíj Program** keretében fizikatanár-hallgatóként fél-évente akár 500 000 Ft ösztöndíjat is kaphatsz, amely más támogatásokkal is kiegészíthető. Ha az oktatás kutatási oldala is érdekel, bekapcsolódhatsz tanítási kísérletekbe, fejlesztő projektekbe, és akár a **Fizika Tanítása doktori programban** is folytathatod tanulmányaidat.

A tanítás nemcsak hivatás, hanem alkotás is.

Hol találsz még több információt?

A képzésekről, felvételiéről, tárgyakról, kutatócsoportokról és hallgatói programokról részletes leírást találsz az intézet honlapján: <https://physics.elte.hu>.



Mérési feladatok megoldása

M. 444. *Határozzuk meg egy AA-s ceruzaelem szimmetriatengelyére és egy arra merőleges, a tömegközépponton áthaladó tengelyre vett tehetetlenségi nyomatékait!*
(6 pont) Közli: Széchenyi Gábor, Budapest

Megoldás. Az elem tömege (konyhai mérleggel mérve): $m = 24$ g, hossza $L = 48$ mm, átmérője (digitális tolómérővel mérve): $d = 14,2$ mm, amiből a sugara: $r = d/2 = 7,1$ mm. A mérés során a szimmetriatengelyre vonatkozó Θ_{\parallel} , illetve az arra merőleges tengelyre vonatkozó Θ_{\perp} tehetetlenségi nyomatékot egy-egy egymástól eltérő módszerrel mérjük meg.

Az első esetben (Θ_{\parallel}) azt mértük, mennyi idő alatt gördül le megcsúszás nélkül egy lejtőn az elem. A testre ható erők és a számításban használt mennyiségek az 1. ábrán láthatók.

A mozgásegyenletek és a kényszerfeltételek:

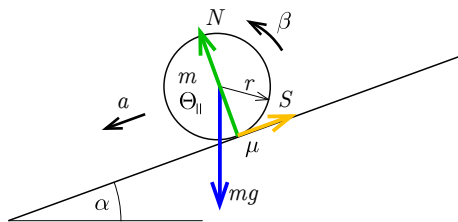
$$\begin{aligned} N &= mg \cos \alpha, \\ ma &= mg \sin \alpha - S, \\ \Theta_{\parallel} \beta &= Sr, \\ a &= r\beta, \\ S &\leq \mu N. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszerből kifejezzük a tehetetlenségi nyomatékot:

$$\Theta_{\parallel} = \frac{mgr^2 \sin \alpha}{a} - mr^2,$$

ahol az a gyorsulást az x hosszúságú lejtőn való legurulás t idejének mérésével kaphatjuk meg:

$$a = \frac{2x}{t^2}.$$



1. ábra

Ezt behelyettesítve:

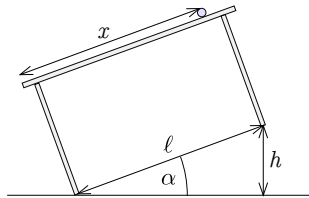
$$(1) \quad \Theta_{\parallel} = \frac{mgr^2 t^2 \sin \alpha}{2x} - mr^2.$$

Az egyenletrendszerből S is kifejezhető:

$$S = \frac{mgs \sin \alpha}{1 + \frac{\Theta_{\parallel}}{mr^2}},$$

amit az egyenlőtlenségbe behelyettesítve és rendezve a megcsúszás nélküli gördülés feltétele:

$$(2) \quad \operatorname{tg} \alpha \leq \left(1 + \frac{mr^2}{\Theta_{\parallel}}\right) \mu.$$



2. ábra

A mérési elrendezés a 2. ábrán látható. A két láb távolsága $\ell = 1017$ mm. Először az asztal egyik lábát addig emeltem, amíg a lejtéssel párhuzamos tengellyel ráhelyezett elem meg nem csúszott. Ez akkor következett be, amikor $h_m = 245$ mm, amiből $\alpha_m = \arcsin \frac{h_m}{\ell} \approx 14^\circ$ és $\mu = \operatorname{tg} \alpha_m \approx 0,25$. A (2) összefüggés alapján az elem akkor gördül le csúszásmentesen, ha

$$\alpha \leq \operatorname{arctg} \left(\left(1 + \frac{mr^2}{\Theta_{\parallel}}\right) \mu \right) \approx \operatorname{arctg} 3\mu \approx 37^\circ,$$

ahol felhasználtuk a $\frac{mr^2}{\Theta_{\parallel}} \approx 2$ becslést a homogén henger ismert tehetetlenségi nyomatéka alapján.

Az 1. táblázatban a mérési eredmények láthatók az asztal különböző döntése esetén (a legnagyobb szög is jóval kisebb, mint az előbb meghatározott határszög). Minden esetben $x = 1$ m és minden dőlésszögnél 5 mérést végeztünk.

Az (1) kifejezést átrendezve:

$$t^2 = \frac{2x(\Theta_{\parallel} + mr^2)}{mgr^2} \cdot \frac{1}{\sin \alpha} = k \cdot \frac{1}{\sin \alpha},$$

azaz ha t^2 -et $\frac{1}{\sin \alpha}$ függvényében ábrázoljuk, akkor a pontokra illesztett, origón átmenő egyenes k meredekségéből Θ_{\parallel} kifejezhető. A 2. táblázat az ábrázolandó adatokat tartalmazza, a grafikon a 3. ábrán látható.

h (mm)	$\sin \alpha$	t_1 (s)	t_2 (s)	t_3 (s)	t_4 (s)	t_5 (s)	$t_{\text{átl}}$ (s)
16	0,0157	4,21	4,08	3,98	4,11	4,21	4,12
30	0,0295	3,19	3,15	3,18	3,09	3,19	3,16
35	0,0344	3,00	2,97	2,87	2,93	3,01	2,96
45	0,0442	2,70	2,70	2,75	2,64	2,59	2,68
50	0,0492	2,45	2,50	2,51	2,39	2,53	2,48
60	0,0590	2,29	2,27	2,33	2,30	2,33	2,30
65	0,0639	2,25	2,15	2,19	2,17	2,22	2,20
80	0,0787	2,02	2,03	1,96	2,03	1,97	2,00
115	0,1131	1,75	1,71	1,60	1,68	1,68	1,68
120	0,1180	1,65	1,64	1,59	1,61	1,59	1,62
135	0,1327	1,50	1,54	1,53	1,57	1,49	1,53
140	0,1377	1,49	1,53	1,51	1,53	1,50	1,51
145	0,1426	1,42	1,48	1,48	1,40	1,48	1,45
150	0,1475	1,36	1,37	1,43	1,44	1,44	1,41

1. táblázat

$1/\sin \alpha$	63,69	33,90	29,07	22,62	20,33	16,95	15,65
$t_{\text{átl}}^2$ (s ²)	16,97	9,99	8,76	7,18	6,15	5,29	4,48
$1/\sin \alpha$	12,71	8,84	8,47	7,54	7,26	7,01	6,78
$t_{\text{átl}}^2$ (s ²)	4,00	2,82	2,62	2,34	2,28	2,10	1,99

2. táblázat

Az illesztett egyenes meredeksége:

$$k = (0,308 \pm 0,016) \text{ s}^2,$$

amiből

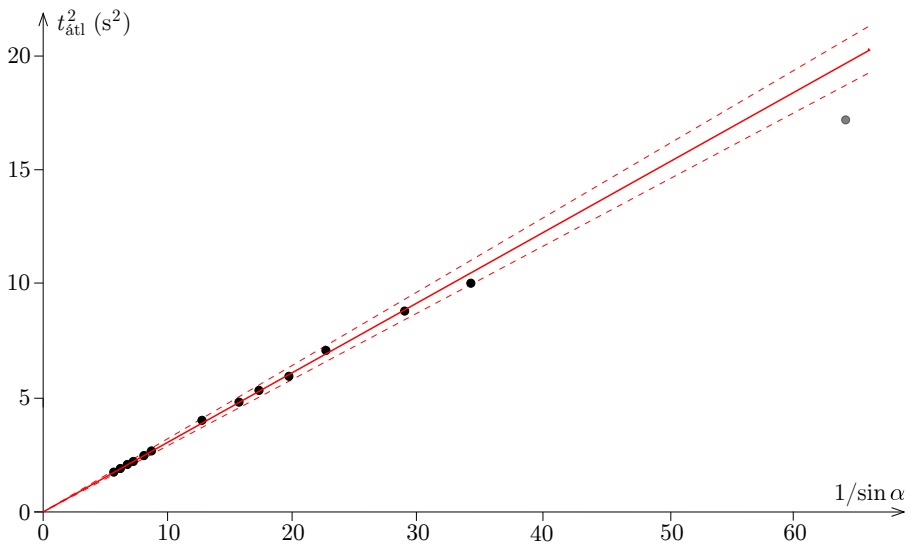
$$\Theta_{\parallel} = \left(\frac{kg}{2x} - 1 \right) mr^2 = (6,18 \pm 0,94) \cdot 10^{-7} \text{ kgm}^2.$$

A merőleges tengelyre vonatkozó Θ_{\perp} tehetetlenségi nyomaték méréséhez az elemből egy fizikai ingát készítünk, és annak lengési idejét mérjük meg. A fizikai inga lengésideje:

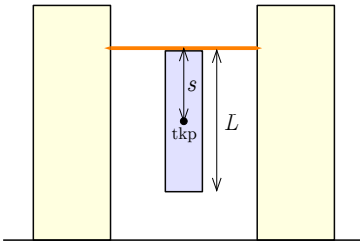
$$(3) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta_{\perp} + ms^2}{mgs}},$$

ahol s a forgástengely és a tömegközéppont távolsága.

A méréshez az elem egyik végére egy könnyű fogpiszkálót ragasztunk, amelynek végeit két kartondobozba szúrjuk (4. ábra). A hegyes végeken a kicsiny sugár miatt kicsiny fékező forgatónyomaték lép fel, így az inga lengése akár 100 lengésen át is megfigyelhető.



3. ábra



4. ábra

A mérési eredmények:

$$100T = (35,8 \pm 0,1) \text{ s,}$$

$$T = (0,358 \pm 0,001) \text{ s.}$$

A tömegközéppont helyét körülbelül az elem geometriai középpontjában feltételeztük¹, így

$$s \approx \frac{L}{2} = (24 \pm 0,25) \text{ mm.}$$

A keresett tehetetlenségi nyomaték a (3) összefüggés alapján:

$$\Theta_{\perp} = \frac{mgsT^2}{4\pi^2} - ms^2 = (4,55 \pm 0,20) \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2.$$

Homogén hengert feltételezve a méretek és a tömeg alapján adódó értékek:

$$\Theta_{\parallel h} = \frac{1}{2}mr^2 = 6,05 \cdot 10^{-7} \text{ kg m}^2,$$

$$\Theta_{\perp h} = \frac{1}{12}mL^2 + \frac{1}{4}mr^2 = 4,91 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2.$$

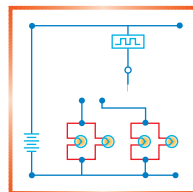
Bár az eltérés a mért értékektől mindkét esetben kicsiny (az első esetben hibahatáron belüli), az elem a felépítése miatt nem tekinthető homogén hengernek.

Hegedűs Márk (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 11. évf.)

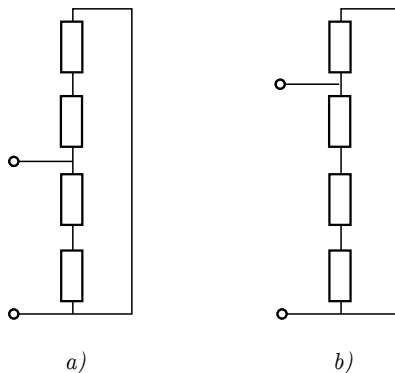
17 dolgozat érkezett. Helyes 5 megoldás. Kicsit hiányos (4–5 pont) 5, hiányos (3 pont) 2, hibás 3, nem versenyszerű 2 dolgozat.

¹Az elem feltételezhetően forgásszimmetrikus, de a két vége kicsit különbözik. A tömegközéppont helye a szimmetriatengely mentén könnyen kimérhető, ha az elemet egy vízszintes, éles peremű asztal szélén óvatosan toljuk kifelé, és megnézzük, mikor billen le.

Fizika gyakorlatok megoldása



G. 900. Megválasztható-e az ábrán látható ohmos ellenállások (nullától különböző) nagysága úgy, hogy az eredő ellenállás az a) és b) esetekben egyenlő legyen?



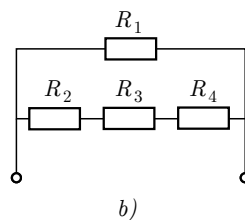
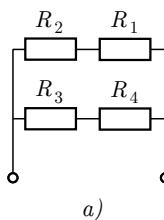
(4 pont)

de Châtel Péter (1940–2023) feladata nyomán

Megoldás. Számozzuk be fentről lefelé az ellenállásokat, és rajzoljuk át az áramkört mindkét esetben jobban áttekinthető formába (ábra).

Az a) esetben a két ágban a sorosan kapcsolt ellenállások eredője:

$$R_{12} = R_1 + R_2 \quad \text{és} \quad R_{34} = R_3 + R_4.$$



Ezek párhuzamosan vannak kapcsolva, így az eredő ellenállás:

$$R_a = R_{12} \times R_{34} = \frac{R_{12}R_{34}}{R_{12} + R_{34}} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}.$$

(Itt \times a „replusz” műveletet jelöli, ami a reciprokok szorzatának reciproka.)

A b) esetben az alsó ágban sorba kapcsolt ellenállások eredője:

$$R_{234} = R_2 + R_3 + R_4,$$

az eredő ellenállás pedig:

$$R_b = R_1 \times R_{234} = \frac{R_1 R_{234}}{R_1 + R_{234}} = \frac{R_1(R_2 + R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}.$$

A két kapcsolás eredő ellenállása egyenlő, ha $R_a = R_b$, amely a megegyező nevezők miatt akkor teljesül, ha a számlálók is egyenlők:

$$\begin{aligned} (R_1 + R_2)(R_3 + R_4) &= R_1(R_2 + R_3 + R_4), \\ R_2(R_3 + R_4) &= R_1R_2. \end{aligned}$$

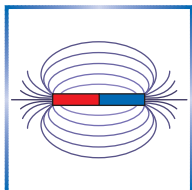
A feladat szerint mindegyik ellenállás nullától különböző, így $R_2 \neq 0$. A két elrendezés eredő ellenállása tehát akkor és csak akkor egyenlő, ha

$$R_3 + R_4 = R_1,$$

azaz (az eredeti ábrán) a felső ellenállás nagysága megegyezik a két alsó ellenállás nagyságának összegével.

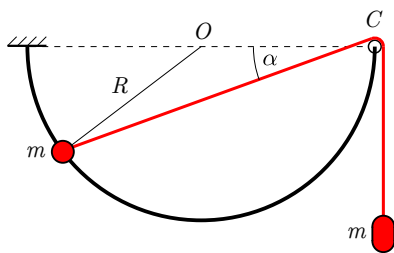
Zsilák Márk Péter (Szolnok, Verseghy Ferenc Gimn., 10. évf.)

50 dolgozat érkezett. Helyes 9 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 18, hiányos (1–2 pont) 18, hibás 5 dolgozat.



Fizika feladatok megoldása

P. 5660. Egy pontszerűnek tekinthető, m tömegű, átfúrt golyó az ábra szerint egy R sugarú, vízszintes átmérőjű, függőleges síkú, félkör alakú, rögzített, merev drótra van fűzve, amelyen súrlódásmentesen csúszhat. A golyóhoz egy vékony fonál van kötve, amely a drót C végén lévő, kicsiny csigán van átvetve. A fonál másik végéhez egy ugyancsak m tömegű nehezék van erősítve. A bal oldali golyót a fonál vízszintes helyzetéből lökésmentesen elengedjük, amikor a fonál $\alpha = 0^\circ$ -os szöget zár be a vízszintes átmérővel.



helyzetéből lökésmentesen elengedjük, amikor a fonál $\alpha = 0^\circ$ -os szöget zár be a vízszintes átmérővel.

a) Mekkora sebességgel mozognak a testek, amikor a bal oldali test a drótpálya legalsó pontján halad át?

b) Mekkora a testek gyorsulása ebben a pillanatban?

(6 pont)

Közli: Zsigri Ferenc, Budapest

Megoldás. a) A dróton mozgó golyó adatait jelölje 1-es, a fonálon függő testét 2-es index. A mechanikai energia megmaradását felírva a kezdeti és a vizsgált állapot között:

$$mgR + mg(2 - \sqrt{2})R = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2.$$

A kényszerfeltétel (a fonál nyújthatatlansága miatt) a vizsgált pillanatban:

$$v_2 = \frac{v_1}{\sqrt{2}},$$

ezt beírva az energiaegyenletbe és rendezve:

$$v_1 = \sqrt{\frac{4(3 - \sqrt{2})}{3}gR},$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(3 - \sqrt{2})}{3}gR}.$$

b) A testre ható erők az ábrán láthatók.

A 2-es test mozgásegyenlete:

$$(1) \quad ma_2 = mg - K.$$

Ha az 1-es test mozgását az O pont körül vizsgáljuk (amelytől a távolsága időben nem változik), akkor a centripetális gyorsulása:

$$a_{cp,O} = \frac{v_1^2}{R}.$$

Az erre felírt mozgásegyenlet:

$$(2) \quad m \frac{v_1^2}{R} = \frac{K}{\sqrt{2}} + N - mg.$$

Ha a test mozgását a C ponthoz viszonyítva nézzük, akkor a C pont irányába egyrészt (a fonál nyújthatatlansága miatt) a_2 gyorsulással mozog, másrészt a fonál elfordulása miatt centripetális gyorsulása is van:

$$a_{cp,C} = \frac{\left(\frac{v_1}{\sqrt{2}}\right)^2}{\sqrt{2}R} = \frac{v_1^2}{2\sqrt{2}R}.$$

Ezt felhasználva a mozgásegyenlet:

$$(3) \quad m \left(a_2 + \frac{v_1^2}{2\sqrt{2}R} \right) = K + \frac{N}{\sqrt{2}} - \frac{mg}{\sqrt{2}}.$$

Az (1) egyenletet beírva (3)-ba, majd abból (2) $\sqrt{2}$ -ed részét kivonva, és rendezve:

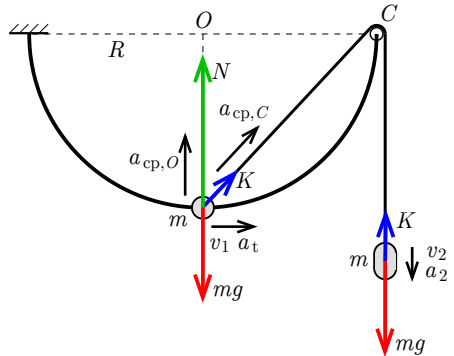
$$K = \frac{2}{3}mg - \frac{mv_1^2}{3\sqrt{2}R},$$

majd az a) részből v_1 kifejezését behelyettesítve:

$$K = \frac{10 - 6\sqrt{2}}{9}mg.$$

Az 1-es test gyorsulásának két komponense van. A tangenciális gyorsulás a mozgásegyenlet alapján:

$$a_t = \frac{K}{\sqrt{2}m} = \frac{5\sqrt{2} - 6}{9}g \approx 0,119 g,$$



a centripetális gyorsulása pedig

$$a_{\text{cp},O} = \frac{v_1^2}{R} = \frac{4(3 - \sqrt{2})}{3}g \approx 2,11 g.$$

Ezekből az 1-es test keresett gyorsulása:

$$a_1 = \sqrt{a_t^2 + a_{\text{cp},O}^2} \approx 2,12 g.$$

A 2-es test gyorsulása pedig (1) alapján:

$$a_2 = g - \frac{K}{m} = \frac{6\sqrt{2} - 1}{9}g \approx 0,832 g.$$

Újvári Sarolta (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

15 dolgozat érkezett. Helyes 3 megoldás. Hiányos (1–4 pont) 11, hibás 1 dolgozat.

P. 5670. *Két, egymást merőlegesen keresztező úton egy-egy motoros halad. Az egyik sebessége v_1 , a másiké v_2 , és az egymástól való legkisebb távolságuk d_0 . Milyen távolságra vannak ekkor a kereszteződéstől?*

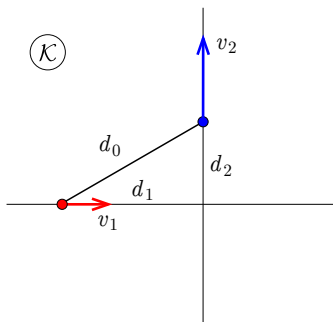
Az egyszerűség kedvéért mindkét járművet tekintsük pontszerűnek.

(5 pont)

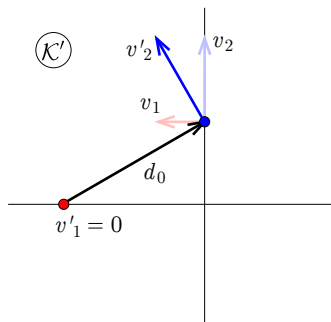
Közli: *Woynarovich Ferenc*, Budapest

I. megoldás. A két motoros távolsága akkor lesz minimális, amikor az 1-es motoroshoz rögzített vonatkoztatási rendszerben a 2-es motoros sebességvektorának nincsen a két motorost összekötő egyenes irányába mutató komponense. Az 1. ábrán a motorosok a Földhöz rögzített koordináta-rendszerben láthatók.

$$d_0^2 = d_1^2 + d_2^2.$$



1. ábra



2. ábra

A 2. ábrán az 1-es motoroshoz rögzített koordináta-rendszerben ábrázoltuk a mozgást. Az 1-es motorostól a 2-eshez mutató helyvektor:

$$\mathbf{d}_0 = (d_1, d_2),$$

a 2-es motoros relatív sebessége:

$$\mathbf{v}'_2 = (-v_1, v_2).$$

Minimális távolság esetén a két vektor merőleges:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_0 \mathbf{v}'_2 &= 0, \\ -d_1 v_1 + d_2 v_2 &= 0, \\ d_2 &= \frac{v_1}{v_2} d_1. \end{aligned}$$

Ezt behelyettesítve d_0 kifejezésébe és rendezve:

$$\begin{aligned} d_1 &= d_0 \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}, \\ d_2 &= d_0 \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}. \end{aligned}$$

Kovács Tamás (Szeged, SZTE Báthory I. Gyak. Gimn. és Ált. Isk., 12. évf.)

II. megoldás. Amikor a két motoros között minimális a távolság (t_0 időpont), akkor az egyik motoros közeledik a kereszteződéshez, a másik pedig távolodik a kereszteződéstől. (Ha mindketten közelednének vagy távolodnának, akkor nem lehetne minimális a távolság.) Legyen ekkor az egyik motoros távolsága a kereszteződéstől d_1 , és tegyük fel, hogy ő távolodik v_1 sebességgel, a másik motoros távolsága pedig d_2 , és tegyük fel, hogy ő közeledik a kereszteződéshez v_2 sebességgel. Ekkor a Pitagorasz-tételből:

$$(1) \quad d_0^2 = d_1^2 + d_2^2.$$

Ugyanígy a $t_0 - \Delta t$ időpontban:

$$\begin{aligned} d_-^2 &= (d_1 - v_1 \Delta t)^2 + (d_2 + v_2 \Delta t)^2 = \\ &= d_1^2 + d_2^2 - 2d_1 v_1 \Delta t + 2d_2 v_2 \Delta t + v_1^2 (\Delta t)^2 + v_2^2 (\Delta t)^2 = \\ &= d_0^2 - 2d_1 v_1 \Delta t + 2d_2 v_2 \Delta t + v_1^2 (\Delta t)^2 + v_2^2 (\Delta t)^2, \end{aligned}$$

és a $t_0 + \Delta t$ időpillanatban:

$$\begin{aligned} d_+^2 &= (d_1 + v_1 \Delta t)^2 + (d_2 - v_2 \Delta t)^2 = \\ &= d_1^2 + d_2^2 + 2d_1 v_1 \Delta t - 2d_2 v_2 \Delta t + v_1^2 (\Delta t)^2 + v_2^2 (\Delta t)^2 = \\ &= d_0^2 + 2d_1 v_1 \Delta t - 2d_2 v_2 \Delta t + v_1^2 (\Delta t)^2 + v_2^2 (\Delta t)^2. \end{aligned}$$

A t_0 pillanatban akkor minimális a távolság, ha

$$(2) \quad d_- \geq d_0 \quad \text{és} \quad d_+ \geq d_0,$$

azaz

$$-2d_1 v_1 \Delta t + 2d_2 v_2 \Delta t + v_1^2 (\Delta t)^2 + v_2^2 (\Delta t)^2 \geq 0$$

$$\text{és} \quad 2d_1 v_1 \Delta t - 2d_2 v_2 \Delta t + v_1^2 (\Delta t)^2 + v_2^2 (\Delta t)^2 \geq 0$$

bármely kicsiny $\Delta t \geq 0$ érték esetén.

Ha Δt értékét egyre kisebbre választjuk, akkor a $(\Delta t)^2$ -es tagok elhanyagolhatókká válnak az elsőfokú tagok mellett, és a (2) feltétel csak akkor teljesül, ha

$$2d_1v_1\Delta t - 2d_2v_2\Delta t = 0.$$

Ebből:

$$(3) \quad d_2 = \frac{v_1}{v_2}d_1,$$

amit (1)-be behelyettesítve:

$$d_1^2 + d_1^2 \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^2 = d_0^2.$$

Ezt megoldva, majd (3)-at használva a keresett távolságok:

$$d_1 = d_0 \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}},$$

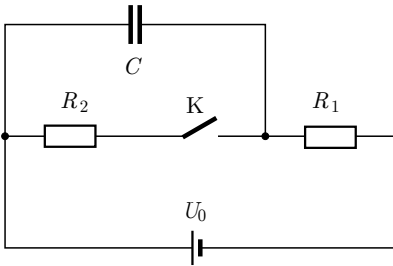
$$d_2 = d_0 \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

Az eredmény nem függ attól, hogy a két motoros közül melyik közeledik, illetve melyik távolodik.

Kossár Benedek Balázs (Pécsi Leőwey Klára Gimn., 10. évf.)

46 dolgozat érkezett. Helyes 8 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 24, hiányos (1–3 pont) 9, hibás 5 dolgozat.

P. 5676. Az ábrán látható kapcsolási rajz szerint összeállított áramkörben szereplő feszültségforrás elektromotoros ereje 20 V, az ellenállások $R_1 = 50 \Omega$, illetve $R_2 = 150 \Omega$ nagyságúak, a kondenzátor 20 μF kapacitású. Kezdetben a K kapcsoló zárva van.



a) Mekkora a kondenzátor töltése a kapcsoló zárt állása esetén?

b) A kapcsoló nyitását követően kialakuló állandósult állapot eléréséig mennyivel változik meg a kondenzátor energiája, és mennyi hő fejlődik az R_1 ellenálláson?

A feszültségforrás belső ellenállása elhanyagolható.

(5 pont)

Tornyai Sándor fizikaverseny, Hódmezővásárhely

Megoldás. a) A kapcsoló zárt állása esetén az ellenállásokon az ellenállások arányában oszlik meg a feszültség, a kondenzátor feszültsége pedig a vele párhuzamosan kötött R_2 ellenállás feszültségével lesz egyenlő. Így a kondenzátor feszültsége

$$U_C = U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_0 = 15 \text{ V},$$

a kondenzátor keresett töltése pedig:

$$Q = CU_C = 3 \cdot 10^{-4} \text{ C} = 300 \mu\text{C}.$$

b) A kapcsoló kinyitása után egy tranzienst folyamat kezdődik, majd a tranzienst lezajlása után már nem fog sehol áram folyni az áramkörben. Ekkor a teljes telepfeszültség a kondenzátorra esik, azaz

$$U'_C = U_0 = 20 \text{ V},$$

és így a kondenzátor új töltése:

$$Q' = CU'_C = 4 \cdot 10^{-4} \text{ C} = 400 \text{ } \mu\text{C}.$$

A kondenzátoron tehát a folyamat végén több töltés lesz, a többlet a feszültségforrásból az R_1 ellenálláson keresztül jut a kondenzátorra, miközben azon hő fejlődik. Eközben a kondenzátor energiája is megnő, a változása:

$$\Delta E = E' - E = \frac{1}{2}CU'^2_C - \frac{1}{2}CU^2_C = 1,75 \cdot 10^{-3} \text{ J} = 1,75 \text{ mJ}.$$

A telepen eközben $\Delta Q = Q' - Q = 10^{-4} \text{ C} = 100 \text{ } \mu\text{C}$ töltés halad át, így a telep munkavégzése:

$$W = \Delta QU_0 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ J} = 2 \text{ mJ}.$$

Az R_1 ellenálláson felszabaduló Joule-hő a telep munkavégzésének és a kondenzátor energianövekményének a különbsége:

$$W_1 = W - \Delta E = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ J} = 0,25 \text{ mJ}.$$

Zádori Gellért (Szegedi Radnóti M. Kísérleti Gimn., 12. évf.)

Megjegyzés. A feladat megoldásához nem szükséges, de leírhatjuk a tranzienst folyamatot is. A huroktörvény alapján:

$$U_0 = R_1 I(t) + U_C(t),$$

ahol

$$I = C \frac{dU_C(t)}{dt} = C \frac{d(U_C(t) - U_0)}{dt}.$$

Ezt behelyettesítve:

$$\frac{d(U_C(t) - U_0)}{dt} = -\frac{1}{R_1 C} (U_C(t) - U_0),$$

amely egy ugyanolyan differenciálegyenlet az $U_C(t) - U_0$ mennyiségre, mint a jól ismert bomlási törvény. Ez alapján a megoldása:

$$U_C(t) - U_0 = (U_C(0) - U_0) e^{-\frac{t}{\tau}},$$

ahol $\tau = R_1 C$ az időállandó, és $U_C(0) = 15 \text{ V}$ a kondenzátor kezdeti feszültsége. Így az áram időfüggése:

$$I(t) = C \frac{dU_C(t)}{dt} = \frac{U_0 - U_C(0)}{R_1} e^{-\frac{t}{\tau}},$$

a teljes felszabaduló Joule-hőt pedig ennek integrálásával kaphatjuk meg:

$$W_1 = \int_0^{\infty} R_1 I(t)^2 dt = \frac{(U_0 - U_C(0))^2}{R_1} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \frac{C}{2} (U_0 - U_C(0))^2 = 0,25 \text{ mJ},$$

az előző megoldással összhangban.

40 dolgozat érkezett. Helyes 16 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 11, hiányos (2–3 pont) 10, hibás 1, nem értékelt 2 dolgozat.

P. 5678. Egy D rugóállandójú rugó egyik végét egy lift mennyezetéhez rögzítjük, másik végére pedig egy m tömegű testet akasztunk. Kezdetben a test egyensúlyban van. Egyszer csak a lift állandó a gyorsulással elindul felfelé, majd τ idő után a gyorsulás megszűnik és a felvonó állandó sebességgel halad tovább. Mekkora amplitúdójú mozgást végez ezután a test?

(6 pont)

Közli: Vigh Máté, Herceghalom

I. megoldás. Rögzítsük koordináta-rendszerünket a lifthez. Ebben a rendszerben, amely a gyorsulás ideje alatt nem inerciarendszer, a gyorsuláskor a test mozgásegyenlete:

$$m\ddot{x} = -Dx + m(g + a),$$

ahol x a test elmozdulása a nyújtatlan rugó végpontjától, a lefelé irányt véve pozitívnak. Bevezetve az

$$u = x - \frac{m(g + a)}{D}$$

változót, a mozgásegyenlet erre a formára írható át:

$$m\ddot{u} = -Du.$$

Ez a harmonikus rezgőmozgás ismert differenciálegyenlete, melynek általános megoldása:

$$u(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t, \quad \text{ahol} \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}.$$

A kezdeti állapot:

$$u(0) = \frac{mg}{D} - \frac{m(g+a)}{D} = -\frac{ma}{D} \quad \text{és} \quad \dot{u}(0) = 0,$$

ezért

$$A = 0 \quad \text{és} \quad B = -\frac{ma}{D},$$

amiből

$$x(t) = \frac{ma}{D}(1 - \cos \omega t) + \frac{mg}{D}.$$

Amikor a lift gyorsulása zérussá válik, általános τ esetén a kis testnek van kitérése és sebessége is, és ezután az $x_0 = \frac{mg}{D}$ egyensúlyi helyzet körül fog valamekkora A amplitúdójú harmonikus rezgőmozgást végezni. A rezgés amplitúdóját az energiamegmaradás alapján határozzuk meg. A rendszer teljes mechanikai energiája a $t = \tau$ pillanatban a rugó potenciális energiájának, a mozgási energiának és a gravitációs potenciális energiának az összege:

$$E_1 = \frac{1}{2}D \left(\frac{ma}{D}(1 - \cos \omega \tau) + \frac{mg}{D} \right)^2 + \frac{1}{2}m \left(\frac{ma}{D} \omega \sin \omega \tau \right)^2 - mg \left(\frac{ma}{D}(1 - \cos \omega \tau) + \frac{mg}{D} \right).$$

A rezgő rendszer mechanikai energiája a rugó maximális megnyúlásakor (ekkor csak potenciális energiátágok vannak):

$$E_2 = \frac{1}{2}D \left(A + \frac{mg}{D} \right)^2 - mg \left(A + \frac{mg}{D} \right).$$

A két kifejezést egyenlővé téve, és az egyenletet rendezve (felhasználva az $\omega^2 = \frac{D}{m}$ és a $\sin^2 \omega\tau + \cos^2 \omega\tau = 1$ azonosságokat), a keresett amplitúdó:

$$A = \frac{ma}{D} \sqrt{2(1 - \cos \omega\tau)} = \frac{2ma}{D} \left| \sin \frac{\omega\tau}{2} \right|.$$

Láthatjuk, hogy az amplitúdó a τ időtartamtól függően 0 és $\frac{2ma}{D}$ között lehet.

Erdélyi Dominik (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

II. megoldás. A feladat a szuperpozíció módszerével is megoldható. Ez a módszer a mechanikában azért működik, mert egy tömegpont $x(t)$ elmozdulásfüggvénye, illetve az $\ddot{x}(t)$ gyorsulásfüggvénye, valamint a testre ható (időben akár változó) $F(t)$ erő között *lineáris kapcsolat* áll fenn. Ez annyit jelent, hogy ha az $x_1(t)$ elmozdulásfüggvénynek $F_1(t)$ erőfüggvény felel meg, $x_2(t)$ -nek pedig $F_2(t)$, akkor a $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ elmozduláshoz tartozó erőfüggvény $c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)$, ahol c_1 és c_2 tetszőleges állandók. (Ez a tulajdonság abból következik, hogy a deriválás lineáris művelet, Newton II. törvénye pedig lineáris egyenlet.)

Megjegyzés. Valamilyen ismert erőfüggvény csak a kezdőfeltételekkel együtt határozza meg egyértelműen az elmozdulásfüggvényt. Különböző megoldások súlyozott összegének képzésekor a kezdeti hely- és sebességadatok is szuperponálódnak. Ezzel azonban nem kell törődjünk, ha a kezdeti feltétel az, hogy a test kezdetben az origóban áll.

Írjuk le az m tömegű test mozgását a lift koordináta-rendszerében. Amennyiben a test elmozdulását a nyugalmi helyzetétől mérjük (ahol a rugóerő egyensúlyt tart a nehézségi erővel), akkor az mg nehézségi erőt a továbbiakban figyelmen kívül hagyhatjuk. A test mozgásegyenlete általánosan:

$$m\ddot{x} = -Dx(t) + F(t),$$

ahol $F(t)$ a testre a rugóerőn kívül ható tetszőleges erő, \ddot{x} pedig a gyorsulást jelöli. Esetünkben

$$(1) \quad F(t) = \begin{cases} ma, & \text{ha } 0 < t < \tau \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

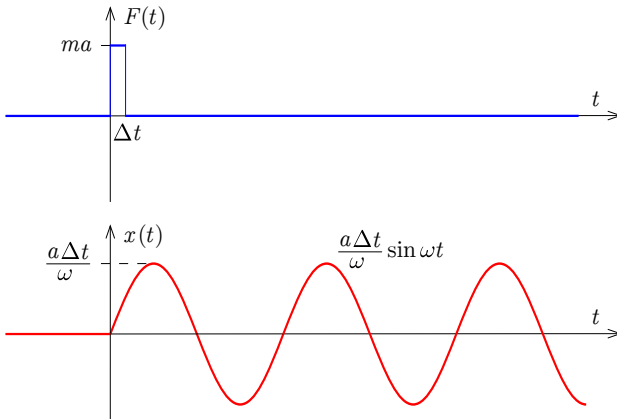
(A koordinátatengelyt lefelé irányítjuk, ezért a felfelé, állandó a gyorsulással mozgó liftben fellépő tehetetlenségi erő $+ma$.) Bevezetve az $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ jelölést a mozgásegyenlet így írható:

$$\ddot{x} + \omega^2 x(t) = \frac{1}{m} F(t).$$

Tekintsük először azt az egyszerűbb esetet, amikor $F(t)$ egy nagyon rövid Δt ideig tartó, ma nagyságú erőlöketés a $t = 0$ pillanatban. Ez az erőlöketés a kezdetben álló testet hirtelen $\frac{F\Delta t}{m} = a\Delta t$ sebességre gyorsítja fel (1. ábra), és az a továbbiakban ω körfrekvenciájú, szinuszos rezgésbe kezd:

$$x(t; 0) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \leq 0 \\ \frac{a\Delta t}{\omega} \sin \omega t, & \text{ha } t > 0. \end{cases}$$

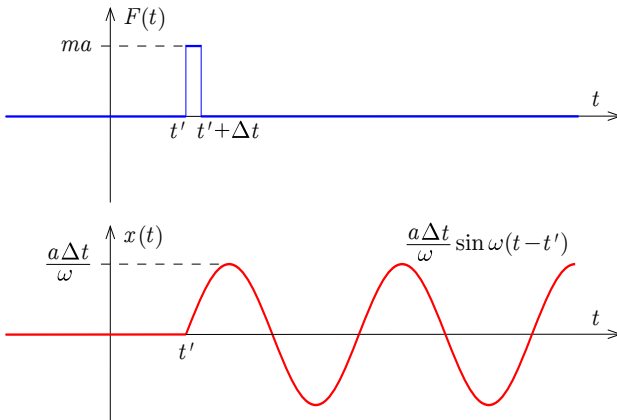
(Az $x(t;0)$ jelölésben a 0 azt mutatja, hogy az erőlöketés $t = 0$ pillanatot követően történt.)



1. ábra

Amennyiben egy ugyanekkora erőlöketés éri a testet valamely t' időpillanatot követő Δt intervallumban ($0 < t' < \tau$), akkor ennek hatására kialakuló mozgás (lásd a 2. ábrát):

$$x(t; t') = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \leq t' \\ \frac{a\Delta t}{\omega} \sin \omega(t - t'), & \text{ha } t > t'. \end{cases}$$



2. ábra

Mivel az (1) képletben szereplő $F(t)$ függvény összetehető (szuperponálható) sok rövid erőlöketésből, a ténylegesen kialakuló mozgás is előállítható az egyes erőlöketésekhez tartozó elmozdulásfüggvények összegeként:

$$x(t) = \sum_{t'=0}^{\tau} x(t; t') = \frac{a}{\omega} \sum_{t'=0}^{\tau} \sin \omega(t - t') \Delta t', \quad \text{ha } t > \tau.$$

Érdekes áttérni a t' változóról a $\varphi \equiv \omega(t - t')$ új változóra. Mivel az erőlkések $\Delta t'$ hosszának $\Delta\varphi = \omega\Delta t'$ felel meg, az összegzést pedig az $\omega(t - \tau) < \varphi < \omega t$ intervallumon kell végezni, a keresett megoldás így írható:

$$(2) \quad x(t) = \frac{a}{\omega^2} \sum_{\varphi=\omega(t-\tau)}^{\omega t} \sin \varphi \Delta\varphi.$$

A (2) kifejezésben szereplő

$$W = \sum_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin \varphi \Delta\varphi$$

alakú összeg legegyszerűbben integrálszámítással² határozható meg (az erőlkések időtartamának fokozatos csökkentésével):

$$W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin \varphi d\varphi = -\cos \varphi \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = \cos \varphi_1 - \cos \varphi_2.$$

Ezt felhasználva a (2)-ben szereplő elmozdulásfüggvény $t > \tau$ időpontokban:

$$x(t) = \frac{a}{\omega^2} (\cos(\omega t - \omega\tau) - \cos \omega t),$$

amely trigonometrikus átalakításokkal tovább alakítható:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a}{\omega^2} ((\cos \omega\tau - 1) \cos \omega t + \sin \omega\tau \sin \omega t) = \\ &= \frac{a}{\omega^2} \sqrt{(\cos \omega\tau - 1)^2 + \sin^2 \omega\tau} \cdot \sin(\omega t + \alpha). \end{aligned}$$

(A fázisszög $\alpha = \arctg \frac{\cos \omega\tau - 1}{\sin \omega\tau}$, de ennek értékére nincs szükségünk.) A kialakuló rezgés amplitúdója:

$$A = \frac{a}{\omega^2} \sqrt{(\cos \omega\tau - 1)^2 + \sin^2 \omega\tau} = \frac{a}{\omega^2} \sqrt{2(1 - \cos \omega\tau)} = \frac{ma}{D} \sqrt{2(1 - \cos \omega\tau)}.$$

Megjegyzés. A fenti megoldásban szereplő $x(t; t')$ függvényt a vizsgált probléma Green-függvényének nevezik. A *George Green* (1793–1841) angol matematikus által kidolgozott módszert sikeresen alkalmazzák az elméleti fizika számos területén.

30 dolgozat érkezett. Helyes 18 megoldás. Kicsit hiányos (5 pont) 5, hiányos (2–4 pont) 7 dolgozat.

²Az összefüggést integrálszámítás nélkül, fizikai analógia segítségével is megkaphatjuk. Egy lehetséges módszer látható a Munkafüzetben. <https://www.komal.hu/munkafuzet.h.shtml>

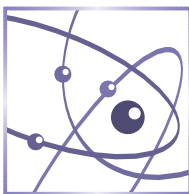


Felhívás az idei Kunfalvi Rezső Olimpiai Válogatóversenyre

A 2025/26-os tanévi fizika diákolimpiai válogatóverseny első fordulója 2026. február 24-én, kedden 15 órakor kezdődik online formában. A versenyre nevezni előzetesen nem kell, bárki részt vehet rajta. A feladatsor az ipho.physics.bme.hu oldalon lesz elérhető.

A megoldásra és a szkennelésre 3 óra áll rendelkezésre. A megoldásokat egyetlen pdf dokumentumban kell elküldeni az iphoteamhun@gmail.com címre. A határidő után érkezett dolgozatokat nem fogadjuk el.

A versenyen nem-grafikus számológépen, író- és rajzeszközökön kívül semmilyen más segédeszköz (pl. könyv, füzet, táblázatok, internet) nem használható. A feladatok megoldását kézírással papírra kell elkészíteni, minden feladat megoldása új oldalon kezdődjön. Az első oldalon szerepeljen a versenyző neve, évfolyama, felkészítő tanárainak és iskolájának neve. Törekedni kell a jól áttekinthető külalakra, az olvasható kézírássra, a megoldások fizikai alapjainak ismertetésére, valamint a magyaros, világos és tömör fogalmazásra.



Fizikából kitűzött feladatok

M. 447. Mérjük meg egy laza csavarrugó rugóállandóját különböző, a rugóval összemérhető tömegű nehezekek segítségével

- statikus módszerrel,
- dinamikus módszerrel (rezgések tanulmányozásával).

Vessük össze a kétféle módszerrel kapott eredményeket, és próbáljunk magyarázatot adni az esetleges eltérésre!

(6 pont)

Közli: *Vigh Máté*, Herceghalom

G. 913. Egy asztaliteniszező a v_1 sebességgel érkező labdát ennél nagyobb, v_2 sebességgel szeretné visszaütni az eredetivel ellentétes irányba. Mekkora legyen ehhez az ütő sebessége?

Az ütközést tekintsük tökéletesen rugalmasnak, és a pingponglabda tömegét elhanyagolhatónak a játékos kezében tartott ütőéhez képest.

(4 pont)

Közli: *Kis Tamás*, Heves

G. 914. Egy kötélhúzó versenyt vízszintes aszfalton rendeznek meg, hárman-hárman küzdenek egymással. A bal oldalon 50 kg, 60 kg és 70 kg tömegűek a versenyzők, cipőjük és az aszfalt között a tapadási súrlódási együttható rendre 0,6, 0,5 és 0,4. A jobb oldalon 45 kg, 55 kg és 65 kg-osak a kötélhúzók, cipőjük tapadási súrlódási együtthatója mindegyiküknek 0,6. Melyik csapat nyeri a versenyt, ha a küzdők maximális erőt fejtenek ki?

(3 pont)

G. 915. Egy a , b és c oldalélű háromszög alakú, vékony lemez homogén tömegeloszlású, súlya G . A lemezt vízszintes helyzetben, a háromszög csúcsainál alátámasztjuk. Mekkora erővel terheli a lemez az alátámasztási pontokat?

(4 pont)

G. 916. A rajzfilmekben a szereplők egy csokor lufit fogva gyakran elemelkednek a talajtól. Becsüljük meg, hogy legalább hány 20 cm átmérőjű, közel gömb alakú, héliumos lufival tud egy 25 kg-os gyerek felemelkedni!

a) A lufi és zsinór tömegét hanyagoljuk el.

b) A lufi és a hozzátartozó zsinór tömegét vegyük 2 g-nak.

(4 pont)

P. 5706. Homogén tömegeloszlású vékony vasrúdból a , b és c hosszúságú darabokat vágunk le, és azokból háromszög alakú merev keretet hozunk létre. A vaskeret teljes súlya G . A keretet vízszintes helyzetben a csúcsainál alátámasztjuk. Mekkora erővel terheli a vaskeret az alátámasztási pontokat?

(4 pont)

Közli: Gnädig Péter, Vácduka

P. 5707. Eduárd egy hosszú, állandó hajlásszögű lejtőn gurul lefelé a kerék-párjával egyenes sebességgel. Hogyan függ a sebességtől a fékeken disszipálódó teljesítmény?

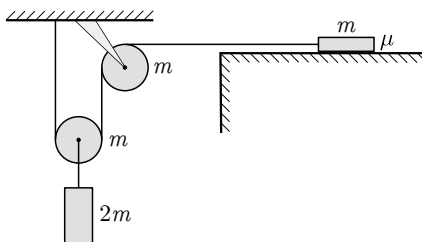
Eduárd tömege biciklivel együtt m , a lejtő hajlásszöge α , és fékezés nélkül Eduárd v_{\max} sebességre gyorsulna fel.

(4 pont)

Közli: Bodor András, Budapest

P. 5708. Az ábrán látható vízszintes asztal és a rajta lévő m tömegű test között a súrlódási együttható $\mu = 0,5$. A homogén korongnak tekinthető csigák súrlódásmentesen foroghatnak, a fonalak nem csúsznak meg a csigák peremén. Mekkora nagyságú és milyen irányú erővel terheli a mennyezetet a hozzá rögzített állócsiga?

(5 pont)



Közli: Zsigri Ferenc, Budapest

P. 5709. 2025. májusában a Korond patak vize elöntötte a parajdi sóbányát. A híradások szerint kb. ötmillió tonna víz került be a bánya rendszerébe.

Modellezzük a bányát egy, a beömlő víz térfogatával megegyező térfogatú, a sugarú üres gömbbel, amely éppen érinti a Föld felszínét. Az érintési pont a bánya bejárata. Becsüljük meg, hogy a bánya elöntése során mennyivel térült volna el egy, a Föld felszínén, a bánya bejáratától $2a$ távolságra elhelyezett függőön iránya!

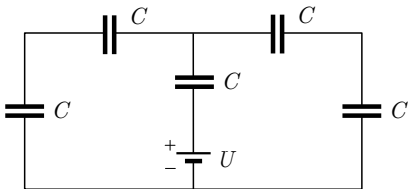
(4 pont)

Közli: Cserti József, Budapest

P. 5710. Adott mennyiségű héliumgázzal körfolyamatot végzünk, amely izobár tágulásból, izochor hűtésből és adiabatikus összenyomásból áll. Legfeljebb mekkora lehet a körfolyamat hatásfoka?

(5 pont)

KVANT nyomán



P. 5711. Öt egyforma C kapacitású kondenzátor és egy U belső feszültségű ideális telep felhasználásával az ábrán látható egyszerű áramkört hozzuk létre.

a) Mekkora töltés halmozódik fel a középső kondenzátor fegyverzetein?

b) Hogyan változik ez az érték, ha az egyik kondenzátort nC kapacitású kondenzátorra cseréljük?

(4 pont)

Közli: Németh Róbert, Budapest

P. 5712. Egy pontszerű világító szentjánosbogár egyenes pályán mozogva keresztezte egy 30 cm fókusztávolságú vékony lencse optikai tengelyét. A bogár pályája 60° -os, a bogár képének pályája 30° -os szöget zár be az optikai tengellyel. A lencsétől mérve mekkora távolságra keresztezte a szentjánosbogár a lencse optikai tengelyét?

(5 pont)

KVANT nyomán

P. 5713. Egy amatőr úrkutató diák elképzelése szerint egy nagy méretű, sík alumíniumfólia a Naprendszerben valahol (de a bolygóktól távol) álló helyzetben is egyensúlyban maradhatna. Az egyszerűség kedvéért feltételezte, hogy az alumíniumvitorla 100%-ban visszaveri a napfényt. (Ismert, hogy a földi légkör tetejét érő sugárzási teljesítménysűrűség 1360 W/m^2 .) Legfeljebb milyen vastag lehet a „fényvitorla”, hogy az elképzelés megvalósítható legyen?

(5 pont)

Közli: Gnädig Péter, Vácduka

P. 5714. Egy m tömegű kicsiny golyócskát ℓ hosszúságú, vékony selyemszálon függesztettünk fel. Ugyanolyan magasságban, tőle $\ell/2$ távolságban egy másik, szigetelőállványra rögzített, kicsiny fémgömb található, amire egy elektrosztatikus gép segítségével különböző $+Q$ pozitív töltést juttathatunk. A szigetelőszálon függő golyócska $-q$ negatív töltéssel rendelkezik.

A Q töltés nagyságát nagyon lassan változtatjuk, és mindig megvárjuk, hogy az inga egyensúlyi helyzetbe kerüljön. A selyemfonálnak a függőlegessel bezárt φ szöge a Q töltésnek valamilyen $\varphi(Q)$ függvénye.

a) Nagyon kicsi Q esetén φ is nagyon kicsi, és a kitérés szöge jó közelítéssel a Q töltéssel arányosan változik: $\varphi \approx \frac{1}{Q_0} \cdot Q$, ahol Q_0 egy töltés dimenziójú állandó. Hogyan fejezhető ki Q_0 a feladat többi (m , g , ℓ és q) paraméterével?

b) Hány stabil egyensúlyi helyzet tartozik nagyon kicsi, nagyon nagy és közepes nagyságú Q töltéshez? Adjunk vázlatos (kvalitatív) leírást a $\varphi(Q/Q_0)$ függvény menetére, ha a Q töltést nulláról nagy ($Q \gg Q_0$) értékre növeljük, majd onnan ismét nullára csökkentjük.

c) Részletes számítással ellenőrizzük, hogy helyesek-e a kvalitatív megfontolások, és adjuk meg számszerűen is a szög-kitérés-töltés függvény grafikon jellegzetes pontjainak koordinátáit!

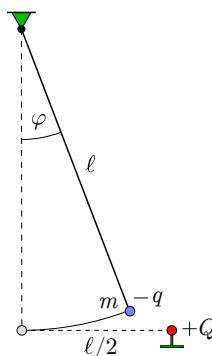
(6 pont)

Szabó Endre (Vágfüzes, Szlovákia) javaslata alapján

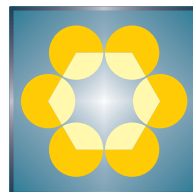


Beküldési határidő: 2026. március 16.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



**MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL
FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 76. No. 2. February 2026)**



Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 94): **K. 889.** In chess, the queen can move any number of squares in a straight line or diagonally. Find the smallest number of queens that can be placed on a 6×6 chessboard such that any square not occupied by a queen can be reached by one of the queens. **K. 890.** A square and its center are given by its vertices. a) How many straight lines can be drawn that passes through at least two of the five given points? b) How many circles can be drawn that passes through at least three of the five given points? (Based on a problem by *György Birkás*) **K. 891.** On a cube with an edge length of 5 cm we draw all the diagonals of the faces using red color. a) From one of the vertices of the cube an Ulrich's ground beetle starts travelling following the red lines, passing through all the vertices of the cube, and returning to the original vertex. Find the least distance travelled by the bug. b) We cut up the large cube into smaller cubes with an edge length of 1 cm. How many of the small cubes will not contain a red line on their surface? **K. 892.** We call a number zig-zag number, if (reading it from left to right) its second digit is smaller than its first digit, its third digit is bigger than its second digit, its fourth digit is smaller than its third digit, and so on. How many five-digit

zig-zag numbers can be created from digits 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7? **K. 893.** In triangle ABC , $\angle ABC = 15^\circ$, $\angle BCA = 30^\circ$, and point D on side BC satisfies $\angle ADC = 45^\circ$. Prove that D is the midpoint of side BC .

New exercises for practice – competition C (see page 95): **Exercises up to grade 10: K/C. 892.** See the text at Exercises **K. K/C. 893.** See the text at Exercises **K. Exercises for everyone: C. 1888.** Anna has written all the three-digit numbers on the blackboard, each appearing exactly once. Boglárka has erased Anna's numbers one by one, replacing them with the number obtained by subtracting the last digit from the sum of the first and the second digit. For example, 225 is replaced by $2 + 2 - 5 = -1$ and 973 is replaced by $9 + 7 - 3 = 13$. Find the sum of numbers written on the blackboard by Boglárka. (Proposed by *Katalin Abigél Kozma*, Győr) **C. 1889.** Numbers 1 and $\sqrt{5}$ are marked on the number line, and nothing else. Mark 0 on the line by construction. (The basic constructions, e.g., bisecting an angle or reflecting across a line don't have to be detailed.) (Proposed by *Ferenc Veszprémi*, Budapest) **C. 1890.** Prove that the irrational number $\sqrt[3]{a}$ cannot be written as $b + c\sqrt{d}$, where a, b, c and d are non-negative integer numbers. (Proposed by *Bálint Bíró*, Eger) **Exercises upwards of grade 11: C. 1891.** Let I denote the incenter of triangle ABC , and let line AI intersect the circumcircle of the triangle at point D . Let the circumcircle of triangle CDI intersect line segment BC at point E . Prove that $BE = IE$. (Proposed by *David Nguyen*, Sydney, Australia) **C. 1892.** Prove that $\binom{n}{3} = 15\binom{n}{6} + 30\binom{n}{5} + 16\binom{n}{4} + \binom{n}{3}$ is true for every positive integer n . (Proposed by *Zoltán Paulovics*, Budapest)

New exercises – competition B (see page 96): **B. 5510.** We write real numbers on the faces of a cube such that the sum of the numbers on opposite faces is always 7. Subsequently at each vertex we take the product of the numbers written on the faces containing the given vertex. What is the largest possible value of the sum of these eight numbers? (3 points) (Proposed by *László Németh*, Fonyód) **B. 5511.** Prove that if a chord intersects the diameter of the unit circle in an angle of 45 degrees, then the sum of the squares of the lengths of the two line segments created on the chord by the diameter equals 2. (3 points) (Proposed by *Viktor Vígh*, Sándorfalva) **B. 5512.** Prove that $\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 1 + \frac{1}{kn}$ is true for every positive integer k and n . (4 points) (Proposed by *Gábor Holló*, Budapest) **B. 5513.** Inside regular hexagon $ABCDEF$ point P is given such that the areas of triangles ABP , BCP and CDP are 25, 31 and 32 units, respectively. Find the areas of triangles DEP , AFP and FAP . (4 points) (Proposed by *Géza Kós*, Budapest) **B. 5514.** The sides of triangle ABC satisfy $a \geq b \geq c$ (with the usual notations). Let P be the endpoint of the angle bisector from point C on side AB . Prove that the diagonals of the cyclic trapezoid with side lengths CP, BP, CP, PA equals \sqrt{ab} . (5 points) (Proposed by *Mihály Hujter*, Budapest) **B. 5515.** Is it possible to write a digit on each of the vertices of a regular 1000-gon such that numbers 000, 001, 002, ..., 998, 999 can all be read from some three consecutive vertices, moving in the clockwise direction? (5 points) (Based on an idea of *Csongor Beke*, Cambridge) **B. 5516.** A right triangle is inscribed in a parabola such that the foot of the altitude corresponding to the hypotenuse is the focus of the parabola. What can be the size of the angles of the triangle? (6 points) (Proposed by *Gábor Holló*, Budapest) **B. 5517.** For which prime numbers p does there exist a permutation a_1, a_2, \dots, a_{p-1} of numbers $1, 2, \dots, p-1$ such that numbers $a_1^1, a_2^2, \dots, a_{p-1}^{p-1}$ have pairwise different remainders modulo p ? (6 points) (Proposed by *Péter Pál Pach*, Budapest)

New problems – competition A (see page 97): **A. 926.** Let $A = \{\lfloor \frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot n \rfloor : n = 1, 2, 3, \dots\} = \{2, 5, 7, 10, 13, 15, \dots\}$. Two players, First and Second, play a game with a pile of N coins according to the following rules. The players move alternately, with First moving first. On each move, the player on turn chooses a number $k \in A$ and removes k

coins from the pile. A player who is unable to make a legal move loses the game. Determine, in terms of N , which player has a winning strategy, and describe such a winning strategy. (Proposed by *Attila Sztranyák*, Budapest) **A. 927.** Let $ABCDEF$ be a bicentric hexagon, that is a hexagon which is both cyclic and tangential. Assume that there exists a point P such that line AP is perpendicular to line BF , CP is perpendicular to BD , and EP is perpendicular to DF . Prove that there are two opposite sides of the hexagon whose sum is equal to the circumdiameter. (Proposed by *Andrei Chirita*, Cambridge) **A. 928.** Let $a_0 = 0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$ be integers such that the sequence $b_k = \frac{a_{k+1} - a_k}{2k+1}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) is non-decreasing. Suppose that c_1, c_2, \dots, c_n are real numbers such that the polynomial $1 + \sum_{k=1}^n c_k x^{a_k}$ is divisible by the polynomial $(x+1)^n$. Show that $2 > |c_1| > |c_2| > \dots > |c_n|$. (Proposed by *Géza Kós*, Budapest)

Problems of the 2025 Kürschák competition

1. Fix a positive integer n and write the numbers $0, 1, \dots, n-1$ on a whiteboard in some order. Two numbers *form an inversion* if the greater precedes the smaller. A number k is called *special* if k forms inversions with exactly k other numbers. At most how many special numbers can we have on the board?

2. Numbers in this problem are written in base 10. We allow numbers starting with zero. We call a number with an even number of digits *cuttable* if after cutting the number into two numbers of the same length, the square of the sum of the parts is the original number. For example, $2025 = (20 + 25)^2$ and $0001 = (00 + 01)^2$ are 4-digit cuttable numbers. Prove that the number of $2n$ -digit cuttable numbers is a power of 2 for any n .

3. Assume that $n \geq 10$ points are given on the plane, no three being collinear. Prove that it is possible to color them red and blue so that any halfplane containing at least 10 points contains a red and a blue point.

Problems in Physics

(see page 122)

M. 447. Measure the spring constant of a loose coil spring using weights of different masses comparable to the mass of the spring, *a)* using a static method, *b)* using a dynamic method (by studying vibrations). Compare the results obtained using the two methods and try to explain any differences.

G. 913. A table tennis player wants to hit back the ball, travelling at a speed of v_1 , with a higher speed, v_2 , in the opposite direction to the original velocity. How fast should the racket be? Assume that the collision is perfectly elastic and that the mass of the ping-pong ball is negligible compared to the racket held by the player. **G. 914.** A tug-of-war competition between two teams of three people each is held on horizontal asphalt. On the left side, the masses of the competitors are 50 kg, 60 kg, and 70 kg, and the coefficient of friction between their shoes and the asphalt is 0.6, 0.5, and 0.4, respectively. On the right side, the masses of the tug-of-war competitors are 45 kg, 55 kg, and 65 kg, and the coefficient of friction between their shoes and the asphalt is 0.6 for all of them. Which team will win the competition if the competitors exert maximum force? **G. 915.** A triangle-shaped thin plate with sides a , b , and c has a uniform mass distribution and weighs G . The plate is supported horizontally at the vertices of the triangle. What is the force exerted by the plate on the support points? **G. 916.** In cartoons, characters often lift off the ground while holding a bunch of balloons. Estimate the minimum number of nearly spherical, helium-filled balloons with a diameter of 20 cm that would be needed to lift a child of

mass 25 kg. a) Ignore the mass of the balloon and string. b) Assume that the mass of the balloon and string is 2 g.

P. 5706. From a thin iron rod with a uniform mass distribution, pieces of lengths a , b , and c are cut off, and a triangular rigid frame is constructed from them. The total weight of the iron frame is G . The frame is supported at its vertices in a horizontal position. What force is exerted by the iron frame on the support points? **P. 5707.** Eduard rides his bicycle downhill at a constant speed along a long slope of constant angle of inclination. How does the power dissipated by the brakes depend on the speed? The total mass of Eduard and his bicycle is m , the slope angle is α , and without braking, Eduard would accelerate to a speed of v_{\max} . **P. 5708.** The coefficient of friction between the horizontal table shown *in the figure* and the body of mass m on it is $\mu = 0.5$. The pulleys, which can be considered uniform density discs, can rotate without friction, and the ropes do not slip on the rims of the pulleys. What is the magnitude and direction of the force exerted on the ceiling by the fixed pulley attached to it? **P. 5709.** In May 2025, the Korond stream flooded the salt mine in Parajd. According to reports, approximately five million tons of water flowed into the mine system. Let us model the mine as an empty sphere of radius a with a volume equal to the volume of the inflowing water, which just touches the Earth's surface. The contact point is the entrance to the mine. Estimate how much the direction of a plumb line placed at a distance of $2a$ from the entrance to the mine on the Earth's surface would have deviated during the flood of the mine. **P. 5710.** A sample of helium gas is taken through the cyclic process, which consists of an isobaric expansion, an isochoric cooling, and an adiabatic compression process. What is the maximum efficiency of this cycle? **P. 5711.** The simple circuit shown *in the figure*, was built from five alike capacitors of capacitance C , and an ideal battery of electromotive force U . a) How much charge accumulates on the plates of the middle capacitor? b) How does this value change if we replace one of the capacitors with another capacitor of capacitance nC ? **P. 5712.** A point-like firefly moves along a straight line and crosses the principal axis of a thin lens of a focal length of 30 cm. The angle between the path of the firefly and the principal axis is 60° , and the angle between the image of the firefly and the principal axis is 30° . Measured from the lens, at what distance did the firefly cross the principal axis of the lens? **P. 5713.** According to an amateur space researcher student, a large, flat aluminium foil could remain in equilibrium, even at a stationary position, somewhere in the solar system (but far from the planets). For the sake of simplicity, he assumed that the aluminium sail would reflect 100% of the sunlight. (It is known that the radiant flux density reaching the top of the Earth's atmosphere is 1360 W/m^2 .) What is the maximum thickness of the "light sail" that would make this idea feasible? **P. 5714.** A small ball with mass m was suspended on a thin silk thread of length ℓ . At the same height, at a distance of $\ell/2$ from it, a small metal sphere was fixed to an insulating stand. By means of an electrostatic machine the sphere can be given different positive charges of $+Q$. The ball which is suspended on the insulating thread has a negative charge of $-q$. The charge Q is changed very slowly, we always wait till the pendulum reaches equilibrium position. The angle φ between the silk thread and the vertical is some $\varphi(Q)$ function of the charge Q . a) For very small Q , φ is also very small, and with good approximation the angle of deflection varies proportionally to the charge Q : $\varphi \approx \frac{1}{Q_0} \cdot Q$, where Q_0 is a constant having the same dimension as charge. How can Q_0 be expressed with the other parameters of the problem (m , g , ℓ and q)? b) How many stable equilibrium states belong to very small, very large, and medium Q charges? Provide a rough (qualitative) description of the $\varphi(Q/Q_0)$ function when charge Q is increased from zero to a large value ($Q \gg Q_0$) and then decreased back to zero. c) Verify the qualitative considerations with detailed calculations and determine the numerical coordinates of the characteristic points of the graph of the deviation-angle versus charge function.

FIZIKA AZ ELTE-N

TANULJ FIZIKÁT AZ ELTE-N!
ALAKÍTSD A JÖVŐ TECHNOLÓGIÁJÁT!

6 FÉLÉV

ALAPKÉPZÉS

- ERŐS ELMÉLETI TUDÁSALAP MEGSZERZÉSE
- ÖNÁLLÓ GONDOLKODÁS
- KÍSÉRLETEZÉS ÉS PROGRAMOZÁSI KÉSZSÉGEK FEJLESZTÉSE

VÁLASZTHATÓ IRÁNYOK:

FIZIKUS
INFORMATIKUS FIZIKUS
BIOFIZIKUS
CSILLAGÁSZ
GEOFIZIKUS

10 FÉLÉV

TANÁRKÉPZÉS

TANÁRNAK LENNI NEM CSAK HIVATÁS, HANEM ALKOTÁS IS!

KREATÍV, VÁLTOZATOS, FIATALOK KÖZÖTT VÉGZETT MUNKA, AHOL MEGMUTATOD A DIÁKOKNAK A FIZIKAI VILÁG SZÉPSÉGEIT.

4 FÉLÉV

MESTERKÉPZÉS

- SZAKMAI TUDÁS ELMÉLYÍTÉSE
- KUTATÁSBA VALÓ BEKAPCSOLÓDÁS
- FELKÉSZÜLÉS A KUTATÓ- FEJLESZTŐ KARRIERE

FIZIKUS MSc
CSILLAGÁSZ MSc
ANYAGTUDOMÁNYI MSc

KUTATÁSI TERÜLETEK

- ANYAGTUDOMÁNY ÉS SZILÁRDTESTFIZIKA
- RÉSZECSCKE- ÉS ATOMMAGFIZIKA
- STATISZTIKUS FIZIKA
- BIOLÓGIAI FIZIKA ÉS KVANTUMRENDSZEREK FIZIKÁJA
- CSILLAGÁSZAT ÉS ŪRFIZIKA
- A FIZIKA TANÍTÁSA

8 FÉLÉV

DOKTORI KÉPZÉS

ÖNÁLLÓ KUTATÁS ÉS VALÓDI TUDOMÁNYOS EREDMÉNYEK ELÉRÉSE AKÁR NEMZETKÖZI KUTATÓCSOPORTOKKAL EGYÜTTMŰKÖDVE!



[HTTPS://PHYSICS.ELTE.HU/](https://physics.elte.hu/)



ELTE | TTK
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

AIT-BUDAPEST



Morgan Stanley

 hiflylabs

Matek az Utcán 2026

2026. március 14.

Ismét π -nap, ami azt jelenti, hogy ezen a szombaton idén is lesz Matek az Utcán a Bolyai János Matematikai Társulat szervezésében!

Ez a nap a Matematika Nemzetközi Világnapja. Az idei nemzetközileg meghirdetett téma „a matematika és a remény”. Thalész szerint „a remény az emberi kincsek közül a legegységesebb”. Mi pedig most, több mint 2500 évvel később azt is elmondhatjuk, hogy a matematika is az egyik legegységesebb emberi kincs. A matematika reményt ad arra, hogy megértsük a valóságot, közös fogalmakat használjunk, megtanuljunk együttműködni. Arra, hogy felelősségteljesen használjuk az adatokat, hogy mindenki számára előnyös stratégiákat találjunk, és még sok egyéb dologra.

A programok célja szerte az országban, hogy a szabadtéri helyszíneken érdekes matematikai tevékenységekbe vonjuk be az utca emberét. Hogy konkrétan milyen helyszíneken és milyen programokkal, az az önkénteseken múlik. Egy egész hét során (március 7-től 14-ig) lehet csatlakozni helyi események szervezésével, Budapesten a központi esemény a Blaha Lujza téren lesz március 14-én 10-től 14 óráig.

Ha szívesen lennél önkéntes valamely településen akár csak egy órára is, jelentkezz – elköteleződés nélkül – ezen az úrlapon!



Az önkéntesek részt vehetnek programok előkészítésében, segíthetnek mások által előkészített tevékenységekben, vagy vezethetnek saját eseményt is. A jelentkezőkkel február elején vesszük fel a kapcsolatot.

Kérjük, hogy küldd tovább ezt a felhívást minél több embernek!

A tavalyi π -nap



Bátaszéken



Budapesten



Tatán