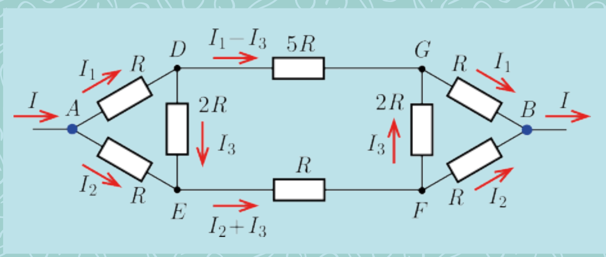
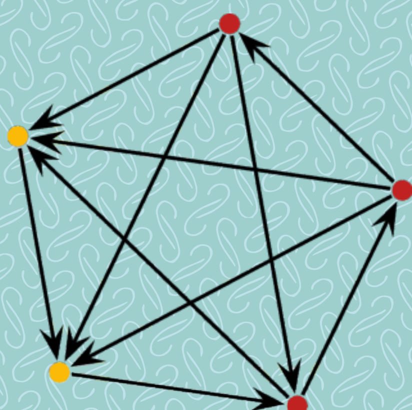
Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok

Informatika rovattal



A P.5648-as feladat áramkörének egyszerűsített rajza



Ötcsúcsú tournament három pszeudogyőztessel

Erdős Pál nyomában| Emeltszintű bújócska III. | A polinomosztásról | Fizika gyakorlatok és feladatok megoldásai | Matek az utcán 2026

KöMaL

76. évfolyam
3. szám
2026.
március

A Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat folyóirata

További „bújócska” ördöglakatok (Cikk a 138. oldalon.)

Billencses

Háromkarikás

Fejre állított Jákob-lajtorjája...

...és egy variánsa

Gál Péter fotói

A KöMaL támogatói
Nemzeti Együttműködési Alap
Miniszterelnökség
Bethlen Gábor Alapkezelő Zrt.
Kulturális és Innovációs Minisztérium

KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE

ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

76. évfolyam 3. szám — Budapest, 2026. március

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta. ÁRA: 1600 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

Paulovics Zoltán: Újra és újra – iterált gondolatok Erdős Pál nyomában 130

Vígh Viktor: Rejtvények, ördöglakatok – Emelt szintű bújócska III. 138

Helyreigazítás a 2026. januári számunk „Rejtvények, ördöglakatok” című rovatában megjelent cikkünkhöz 142

Horváth Eszter: Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire 142

Tatár Zsuzsanna Mária: Megoldásvázlatok a 2026./2. szám matematika gyakorló feladatsorához 146

Megjegyzés a polinomosztásról a **B. 5390.** feladat kapcsán 157

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok (894–898.) 159

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (897–898., 1893–1897.) 160

A B pontversenyben kitűzött feladatok (5518–5525.) 161

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (929–931.) 162

Informatikából kitűzött feladatok (691–694.) .. 163

Fizika gyakorlatok megoldása (907.) 169

Fizika feladatok megoldása (5674., 5679., 5680., 5682., 5683., 5684., 5686., 5692.) 170

Fizikából kitűzött feladatok (448., 917–920., 5715–5723.) 186

Problems in Mathematics 189

Problems in Physics 191

INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest,
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
Telefon: + 36 20 320-1143
A lap megrendelhető a
`https://komalujsag.myshoprenter.hu`
oldalon keresztül.
Előfizetési díj egy évre: 12 500 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`

This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 20 320-1143
or on the Internet:
`https://komalujsag.myshoprenter.hu`.

Újra és újra – iterált gondolatok Erdős Pál nyomában

A cikk egy feladatsorozaton keresztül meséli el, hogyan jött rá a szerző egy Erdős Pálhoz köthető, kisebb állításra. A cikk elsősorban azoknak lehet hasznos, akik már ismernek néhány, a gráfokkal kapcsolatos alapfogalmat – de ennyi elég is, a megértéséhez nincs szükség további gráfelméleti ismeretekre. Aki megoldja az egymásra épülő feladatokat, az joggal állíthatja, hogy ő is bebizonyította ezt a tételt!

Még élénken él bennem az, ahogyan először találkoztam a gráfelmélettel. A Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimnázium diákjaként néha betévedtem a könyvtárba, és a matekos részlegen nézegettem a könyveket. Ifjú kilencedikesként lenyűgözött a rengeteg könyv számomra érthetetlen címe, és csak reméltem, hogy talán valamikor majd megérthetem őket. Egyszer Andrásfai Béla *Ismerkedés a gráfelmélettel* című művét emeltem le a polcról, és nézegettem a már tizenöt évvel ezelőtt is nagyon réginek tűnő könyvet. (Az 1971-es kiadással találkoztam.)

Egy teljesen új világ tárult fel előttem. Nem sokkal később találtam más, újabb könyveket is, amelyeket nyáron olvasgatva elmerülhettem a témában. Andrásfai Béla könyvének ez a feladata valamiért nagyon megfogott:

1. feladat. Bizonyítsuk be, hogy bármely tetszőlegesen irányított teljes gráfban van olyan pont, amelyből a gráf bármely más pontja elérhető 2-nél nem hosszabb irányított úttal. ([3] 58. o. 16. feladat)

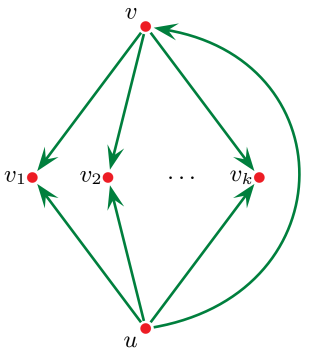
Sokáig gondolkoztam rajta, de nem tudtam megoldani, és végül feladtam. Megnéztem a megoldás első gondolatát, megértettem, és a homlokomra csaptam: „Ó, ez milyen egyszerű!” Kicsit csalódott voltam, hogy nem jöttem rá magamtól, de kárpótolt a megoldás szépsége: annyira egyszerű és frappáns volt!

Aki nem ismeri a feladat megoldását, és van kedve gondolkodni rajta, az még ne nézze meg a máris következő bizonyítást.

Az 1. feladat megoldása

1 pontú gráfra igaz az állítás. Legyen $\overrightarrow{T_n}$ egy n (>1) pontú irányított teljes gráf, az $(x;y)$ jelölés azt az élet jelenti, amelynek az x pont a kezdőpontja és az y pont a végpontja. Válasszuk ki a gráfnak egy olyan v csúcsát, amely maximálisan sok kilépő éllel rendelkezik, azaz maximális a „kifoka”, jelölje ezt a maximumot k. Indirekt módon bebizonyítjuk, hogy v megfelel a feladat követelményeinek. Jelölje a v kezdőpontú élek végpontját $v_1, v_2, \ldots, v_k$ (*1. ábra*). Tegyük fel tehát, hogy v nem felel meg, azaz van $\overrightarrow{T_n}$-nek olyan u pontja, ahová sem egy (irányított) élen, sem két egymáshoz csatlakozó élen nem lehet eljutni u-ból, azaz a következő élek nem fordulnak elő a gráfban:

$$(v;u),(v_1;u),(v_2;u),\ldots,(v_k;u).$$



1. ábra

Mivel az irányítás nélküli T gráfban bármely két különböző pont szomszédos, ezért ezeknek az éleknek nem vég-, hanem kezdőpontja az u, így szükségképpen szerepelnek $\overrightarrow{T_n}$-ben a következő élek:

$$(u;v),(u;v_1),(u;v_2),\dots,(u;v_k).$$

Tehát v legalább $k+1$ élnek a kezdőpontja, tehát v kifoka (k) nem lehetett maximális, ami ellentmondás. □

Eltelt pár év, és az ELTE Matematika BSc szakon újra találkoztam ezzel a feladattal, igaz kicsit más köntösben. Azt észrevettem, hogy ez nem más, mint az a régi feladat, de a megoldásra már nem emlékeztem, így örömet okozott, hogy most meg tudtam oldani.

2. feladat Bizonyítsuk be, hogy minden tournamentben létezik pszeudogyőztes.

Na, de mi is az a tournament? És ki a pszeudogyőztes?

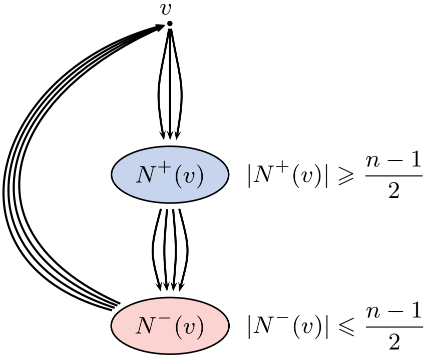
A tournament szó angolul bajnokságot jelent, ezért szokás az n csúcsú irányított teljes gráfot *tournament*nek nevezni, és általában T_n-nel jelölni (esetleg $\overrightarrow{T_n}$-nel). Hiszen ha van egy olyan versenyünk, ahol az n résztvevő közül mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszik, és döntetlen nem alakul ki, akkor azt egy n csúcsú irányított teljes gráffal jól modellezhetjük. A csúcsok a versenyzők, továbbá az u csúcsból irányított él megy a v csúcsba, ha az u-nak megfelelő játékos legyőzte a v-nek megfelelő játékost.

*Pszeudogyőztes*nek nevezünk egy csúcsot, ha minden másik csúcsba vezet belőle legfeljebb kettő hosszú irányított út (a nemzetközi szakirodalomban királynak is nevezik). Azaz – a versenyt modellező példával megfogalmazva – a pszeudogyőztes egy olyan versenyző, aki minden másik játékost vagy legyőzött, vagy legyőzött valakit, aki az őt legyőzőt legyőzte.

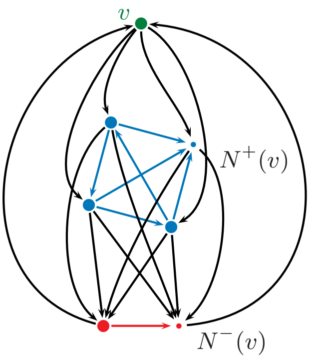
Könnyen látható, hogy csak a megfogalmazás tér el egymástól: az 1. és a 2. feladat igazából ugyanaz.

Később megtudtam, hogy ez a feladat Landau [1] nevéhez köthető, aki azt látta be 1953-ban, hogy bármelyik legnagyobb kifokú csúcs pszeudogyőztes (habár a megfogalmazásban ő még nem ezt a nyelvezetet használta).

Érdemes itt egy kicsit megállni, és felrajzolni, hogyan is néz ki tehát a tournamentek struktúrája, honnan merre mennek élek.



2. ábra. Egy tournament struktúrájának vázlata



3. ábra. Egy konkrét tournament struktúrája; a megnagyobbított csúcsok pszeudogyőztesek

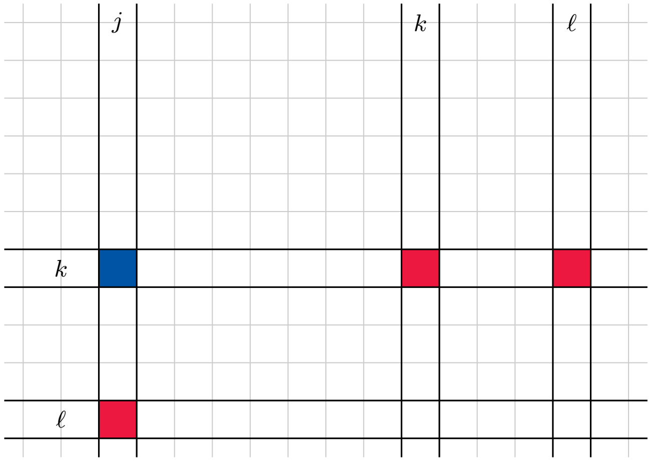
A v csúcsból kimutató élek végpontjainak halmazát jelölje $N^+(v)$, míg a v-be mutató élek kezdőpontjainak halmazát $N^-(v)$ (*2. ábra*). A feladat(ok) szerint tehát egy tournament csúcshalmaza három részre osztható az alábbiak szerint: egy v maximális kifokú csúcsra, valamint $N^+(v)$ és $N^-(v)$ halmazokra. Avagy más megfogalmazásban: $N^+(v)$ (illetve $N^-(v)$) jelöli a v-ből 1 hosszú úton elérhető (illetve 1 hosszú úton nem, de 2 hosszún elérhető) csúcsok halmazát. $N^+(v)$ csúcshalmazon belül, illetve $N^-(v)$ csúcshalmazon belül bárhogyan mehetnek az élek, viszont minden $N^+(v)$ és $N^-(v)$ közötti él $N^+(v)$-ből $N^-(v)$ felé van irányítva. Mivel bármely csúcsnál a kiinduló és befutó élek száma összesen $n-1$, ezért ha v egy maximális kifokú csúcs, úgy $N^+(v) \geqslant \frac{n-1}{2}$, és így $N^-(v) \leqslant \frac{n-1}{2}$.

Természetesen előfordulhat, hogy a 2. szint hiányzik, tehát $N^-(v)$ üres halmaz. Ekkor a v csúcs kifoka $n-1$.

Tegyünk itt egy kis kitérőt, és nézzük meg a KöMaL 2025. februári számában megjelent C.1844-es feladatot!

3. feladat. (C. 1844.) Ági pirossal, Laci kékkel színezgeti az $n \times n$-es $(n>1)$ fehér táblázatuk mezőit, mely i-edik sorának j-edik mezőjét $(i;j)$-vel jelöljük. Első lépésben Ági pirosra festi a főátló (bal felsőtől a jobb alsóig) mezőit. Ezután felváltva jönnek: ha Laci $(i;j)$-t színezi, akkor Ági $(j;i)$-t. Minden mezőt pontosan egyszer színeznek be. A k-adik sort különlegesnek hívjuk, ha bármely kék $(k;j)$ esetén létezik l, hogy $(k;l)$ és $(l;j)$ is piros. Bizonyítsuk be, hogy a színezgetés végeztével Ági talál különleges sort.

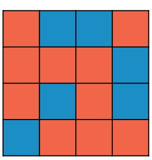
Javaslom, hogy aki első olvasásra nem jött rá, hogy ez a feladat is pontosan ugyanaz, mint az első kettő, az olvassa el még egyszer, mielőtt megnézné a következő megfeleltetést!



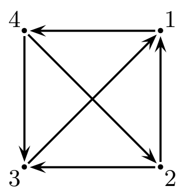
4. ábra. A különlegesség feltétele:
bármely kék $(k;j)$ esetén létezzen l, hogy $(k;l)$ és $(l;j)$ is piros

Bevezetjük a *szomszédsági mátrix* (vagy másnéven adjacencia-mátrix) fogalmát, amely egy lehetséges formája a gráfok elkódolásának. Adott egy n csúcsú, egyszerű gráf, csúcsai az 1, 2, …, n pozitív egészekkel vannak címkézve. Ekkor egy $n\times n$-es táblázat i-edik sorának j-edik mezőjébe – $(i;j)$ – írjunk 1-et, ha mutat él az i csúcsból a j csúcsba, különben pedig 0-át. (Ha a gráf nem egyszerű, úgy az a szám kerül oda, ahány éllel össze van kötve az i és a j csúcs.) Rögtön látható, hogy a táblázatunk szimmetrikus (a „főátlóra”), azaz $(i;j)$-be és $(j;i)$-be ugyanaz a szám kerül. Ha viszont a gráf irányított, akkor nem feltétlenül lesz szimmetrikus, mert irányított gráf esetén ha az i csúcsból mutat él a j csúcsba, de fordítva nem, akkor $(i;j)$-be 1-et írunk, $(j;i)$-be viszont 0-át. (Egy legalább kétpontú tournament szomszédsági mátrixa például soha sem lesz szimmetrikus.)

Például az *5. ábra* jobb oldali gráfjának adjacencia-mátrixa a középső számtáblázat.



$$\longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longleftrightarrow$$



5. ábra. Színes táblázat, szomszédsági mátrix, irányított gráf

Ennek alapján jól látható, hogy minden színezés ekvivalens egy n csúcsú irányított gráffal, ahol az, hogy egy $(i;j)$ mező piros, azt jelenti, hogy az i-ből él megy j-be, kivéve az (i,i) számozású piros mezőket (*5. ábra*). Ekkor a különleges sor létezése éppen a pszeudogyőztes létezésének felel meg.

A KöMaL múlt havi számában megjelent a C.1844-es feladat mintamegoldása, ebben több szép megoldás is olvasható. A teljesség kedvéért itt is közlünk egy (nagyon tömör) bizonyítást.

A 3. feladat megoldása. Indirekt módon bizonyítunk: tegyük fel, hogy Ági nem talál különleges sort, azaz bármely k sorra teljesül, hogy létezik olyan j, melyre $(k;j)$ kék, és ha valamely l-re $(k;l)$ piros, úgy $(l;j)$ kék. Ha viszont $(l;j)$ kék, akkor $(j;l)$ piros. Azaz, ha k sorában az l oszlop piros, akkor j sorában is piros. Azaz a j-edik sorban legalább annyi piros van, mint a k-adik sorban. Sőt, több is, hiszen $(k;j)$ kék, míg $(j;k)$ piros. Ebből következik, hogy bármely sorhoz létezik olyan sor, amelyben több piros mező található, mint benne. Mivel véges sok sor van, ezért ez ellentmondás. □

Visszakanyarodva az egyetemi évekhez, az MSc alatt megint találkoztam ezzel a feladattal. Régi ismerősként üdvözöltem, felelevenítettem a megoldást, majd olyat tettem, amit addig egyszer sem: elgondolkoztam, hogyan lehetne általánosítani, milyen variánsát tudnám bizonyítani. Például igaz lehet, hogy minden tournamentben létezik legalább két pszeudogyőztes? Feltéve persze, hogy van legalább két csúcs. És három, ha van legalább három csúcs?

Most is javasoljuk a megoldást nem ismerőknek, hogy továbbolvasás előtt próbálják meg magunk megválaszolni a kérdéseket.

Persze, ha létezik olyan csúcs, amelyből $n-1$ él indul ki (az ilyen $n-1$ kifokú csúcsot *abszolút győztes*nek nevezzük), akkor csak egy pszeudogyőztes létezik a tournamentben, ez a csúcs. De ha nincs ilyen? Akkor bizony lesz legalább két pszeudogyőztes.

4. feladat. Ha egy tournamentben nincs abszolút győztes, akkor létezik legalább két pszeudogyőztes.

Vegyük észre, hogy nem kell explicit módon megkövetelnünk az állítás feltételeiben a két csúcs létezését, hiszen ez abból, hogy nincs abszolút győztes, már következik. (Az egy csúcsú tournament egyetlen csúcsa abszolút győztes.)

A bizonyítás első lépésében a már ismert módon találunk egy pszeudogyőztest. A második lépésben pedig a *3. ábra* alapján rájöhetünk, hogy hol kell keresni a másodikat. Érdemes kitalálni magunktól, mert az ábra alapján nem nehéz, és a későbbiekre nézve döntő jelentőségű lesz ez az észrevétel!

Bizonyítás. Mivel nincs abszolút győztes, így a tournamentünk tényleg az *1. ábra* szerinti, vagyis $N^-(v)$ sem üres halmaz, és mindegyik csoportból indul ki él. Azt állítjuk, hogy $N^+(v)$ elemei között találunk pszeudogyőztest!

Az $N^+(v)$-ből való csúcsokat csak akkor van esélyünk ugyanerről a szintről legfeljebb kettő hosszú irányított úton elérni, ha a „szinten maradunk”, azaz nem lépünk ki $N^+(v)$-ből. Melyik csúcsot válasszuk $N^+(v)$ csúcsai közül? Természetes módon adódik, hogy ugyanazt az ötletet alkalmazzuk, amit az előbb is. Hiszen $N^+(v)$ csúcsai a köztük lévő élekkel együtt szintén egy tournamentet alkotnak (az eredeti egy résztournamentjét), az 1. feladatban pedig láttuk, hogy a maximális kifokú csúcs választásával a résztournament egy pszeudogyőztesét találjuk meg. Ez a csúcs a kezdeti tournamentünkben is pszeudogyőztes lesz, hiszen belőle minden $N^{-}(v)$-beli csúcsba egy, v-be pedig kettő hosszúságú irányított út vezet. □

Ha egy üzlet beindul... Találhatunk hármat is? Moon 1968-ban bebizonyította, hogy amennyiben nincs abszolút győztes, úgy mindig létezik legalább három pszeudogyőztes [2]. A fentiek után könnyen bizonyítható az állítás.

5. feladat. Ha egy tournamentben nincs abszolút győztes, akkor létezik három pszeudogyőztes.

Bizonyítás (vázlat). Az egy-, illetve kétcsúcsú tournamentben mindig van abszolút győztes, vagyis a gráfnak legalább három csúcsa van. Most ne az 1. szinten nézzünk körül, hanem a 2. szinten, tehát $N^{-}(v)$ csúcsai között. Ez nemüres, a csúcsok a köztük lévő élekkel együtt szintén tournamentet alkotnak, így az 1. feladat miatt itt is fogunk találni olyan csúcsot, ami $N^{-}(v)$-n pszeudogyőztes. Könnyű látni, hogy ez a csúcs az eredeti tournamentben is pszeudogyőztes lesz. □

Természetes módon adódik a kérdés, hogy van-e mindig négy pszeudogyőztes. És öt? Hiszen ha az 1. és a 2. szinten vannak még további csúcsok, akkor ott akár találhatnánk még pszeudogyőzteseket!

A válasz viszont az, hogy az 5. feladat állítása éles: konstruálható olyan abszolút győztest nem tartalmazó tournament, amelyben csak három pszeudogyőztes van. (Már öt csúcs esetén is létezik ilyen tournament, érdemes rajzolni egyet.) Cserébe viszont az is igaz – miként ezt 1982-ben Reid igazolta [4] –, hogy néhány kivételtől eltekintve tetszőleges k és n esetén meg lehet adni egy olyan n-csúcsú tournamentet, amelyben k pszeudogyőztes csúcs van, ha $n \geqslant k$. A „két” kivétel:

- $k = 2$, ami nem meglepő, hiszen az előbb láttuk be, hogy abszolút győztes híján mindig van három pszeudogyőztes, így tehát nincs olyan tournament, ahol pontosan kettő pszeudogyőztes lenne;
- $n = k = 4$, gyorsan le lehet ellenőrizni a pár esetet.

Mivel nem tudtam továbbmenni 4-re, ezért azon gondolkoztam el, hogy ezzel a hárommal mit tudnék kezdeni. A pszeudogyőztes definíciója úgy szólt, hogy legfeljebb 2-hosszú irányított úton minden más csúcs elérhető belőle. Vajon a pszeudogyőztesek halmazából minden más csúcs elérhető 1-hosszú irányított úton? Azaz bármely, a halmazon kívüli csúcsba vezet valamely pszeudogyőztesből él? Egy (irányított) gráf csúcsainak olyan halmazát, melyből minden más csúcsba vezet él, *domináló halmaz*nak nevezzük. (Ilyen csúcshalmaza több is lehet a gráfnak.) Egy G gráf legkisebb domináló halmazának elemszáma G dominálási száma, amelyet $\gamma(G)$-vel jelölünk.

6. feladat. Egy tournamentben a pszeudogyőztesek domináló halmazt alkotnak.

Bizonyítás (vázlat). Az *1. ábrát* nézve nyilvánvaló az állítás: ha a pszeudogyőztesek halmazától lenne néhány (legalább egy) 2 távolságra lévő csúcs, akkor e csúcs(ok) között is lenne pszeudogyőztes. □

Mielőtt a célegyenesbe érkeznénk, még vegyük be a kanyart, és mutassunk egy könnyen adódó felső becslést a tournamentek dominálási számára.

7. feladat. (C. 1865.) Az iskolai szkanderbajnokságon 17 fő indult el. Mindenki pontosan egyszer játszott mindenkivel, döntetlen nem született. A versenyzők egy csoportját *erősnek* hívjuk, ha teljesül rájuk, hogy bármely rajtuk kívüli versenyzőt legyőzött közülük valaki. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható legfeljebb 9 fős erős csoport.

Ennek a feladatnak is megjelent a mintamegoldása a KöMaL múlt havi számában. Az ott szereplő bizonyításokból azt az észrevételt most külön is megfogalmazzuk, hogy a(z egyik) legtöbb győzelmet arató diák és az őt legyőzők halmaza erős lesz és legfeljebb 9 elemű. Ennek általánosítása feladatként így hangzik:

8. feladat. Mutassuk meg, hogy ha T_n egy n-csúcsú tournament, akkor

$$\gamma(T_n) \leqslant \frac{n+1}{2}.$$

A speciális eset bizonyításában szereplő gondolat pedig általánosan is használható: az egyik maximális kifokú v csúcs és az $N^-(v)$ csúcshalmaz elemei nyilván domináló halmazt alkotnak, hiszen v az $N^+(v)$ minden elemét legyőzte, és ez a halmaz legfeljebb $\frac{n-1}{2}+1=\frac{n+1}{2}$ elemű.

De ennél erősebbet is lehet állítani $\gamma(T_n)$-ről. Ekkor persze nem érdemes bevenni a teljes $N^-(v)$ csúcshalmazt, hiszen az nagy méretű is lehet. Mit válasszunk helyette?

Akinek van kedve törnie a fejét ezen, az a következő feladatnak még az állítását se nézze meg, hanem gondolkozzon el azon, hogy ha v-t kiválasztottuk, akkor hol érdemes keresni további pszeudogyőzteseket, és legfeljebb mennyit érdemes kiválasztani, hogy minimális számú csúcsból álló domináló halmazt kapjunk. Akinek ez sikerült, az már el is jutott Erdős Pál állításához.

Az igazság az, hogy Erdős sohasem publikálta ezt az eredményt – talán mert túl egyszerűnek tartotta ahhoz –, de a szakirodalom egységesen neki tulajdonítja: például a [6] cikk absztraktjának legelső sora állítja, hogy Erdős az [5] cikkben publikálta ezt az eredményt. [7] is Erdősnek tulajdonítja, és közli a bizonyítást is.

9. feladat. (Erdős Pál tétele) Ha T_n egy n-csúcsú tournament, akkor

$$\gamma(T_n) \leqslant \lceil \log_2 n \rceil.$$

Bizonyítás. Legyen v_1 egy maximális kifokú csúcs. A korábbiak szerint v_1 pszeudogyőztes. Töröljük a tournamentből v_1-et és az $N^+(v_1)$ csúcshalmazt. (Természetesen a hozzájuk csatlakozó élekkel együtt.) Láttuk, hogy a megmaradó $N^-(v_1)$ csúcsaira teljesül, hogy $|N^-(v_1)| \leqslant \frac{n-1}{2}$. Ha $N^-(v_1)$ üreshalmaz, akkor készen vagyunk, beláttuk az állítást, hiszen $\gamma(T_n)=1$. Különben a törlés után kapott, legfeljebb $\frac{n-1}{2}$ csúcsú tournamentben válasszuk ki a maximális fokú csúcsot, jelölje v_2, ez a csúcs $N^-(v_1)$-ben pszeudogyőztes. A fentiekhez hasonlóan járjunk el: töröljük

v_2-t és az $N^+(v_2)$ csúcshalmazt. Ekkor a megmaradó tournamentünk csúcsszáma legfeljebb

$$\frac{\frac{n-1}{2}-1}{2} \leqslant \frac{n}{4}.$$

Ismételjük a fentieket, amíg el nem fogynak a csúcsok. Minden lépésben a csúcsszám felénél kevesebb csúcs marad meg, a k-adik után kevesebb mint $\frac{n}{2^k}$, ezért

$$\lceil \log_2(n) \rceil$$

lépés után már biztosan elfogynak a csúcsok.

Minden lépésben találtunk egy-egy, vagyis összesen legfeljebb $\lceil \log_2(n) \rceil$ darab pszeudogyőztest, amelyek együtt – a korábbiak szerint – domináló halmazt alkotnak. $\square$

A mai napig emlékszem arra, amikor a hátamon fekve, a plafont bámulva végighaladtam a fenti gondolatlánc egyes elemein, és eljutottam az utolsó állításig. Először nagy öröm volt bennem, aztán jött a realista gondolat: „Ezt már biztos, hogy tudja a világ!” Rövid keresés után kiderült, hogy Erdős Pálhoz köthető ez az eredmény. Ennek a felismerésnek talán még jobban örültem, mintha én publikálhattam volna ezt a felfedezésemet.

Köszönetnyilvánítás. Nagy hálával tartozom gimnáziumi matematikatanáraimnak, Horváth Attilának és Kovács Tibornak, hogy annak idején megszerettették velem a matematikát!

Hivatkozások

[1] Landau, H. G. (1953). On dominance relations and the structure of animal societies: III The condition for a score structure. Bulletin of Mathematical Biophysics 15, 143–148. https://doi.org/10.1007/BF02476378

[2] Moon, J. W. (1962). Solution to problem 463. Math. Mag, 35(189), 12. https://doi.org/10.1007/BF02476378

[3] Andrásfai, B. (1971). Ismerkedés a gráfelmélettel. Tankönyvkiadó. https://doi.org/10.1007/BF02476378

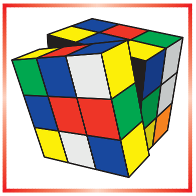
[4] Reid, K. B. (1982). Every vertex a king. Discrete Mathematics, 38(1), 93–98. https://doi.org/10.1016/0012-365X(82)90173-X

[5] Erdős, P. (1963). On a problem of Schütte. The Mathematical Gazette, 47, 220–222. https://www.renyi.hu/~p_erdos/1963-08.pdf

[6] Caro, Y., & Hansberg, A. (2019). Directed domination in oriented hypergraphs. Communications in Combinatorics and Optimization, 4(2), 173–183. https://arxiv.org/abs/1904.02351

[7] Reid, K. B., McRae, A. A., Hedetniemi, S. M., & Hedetniemi, S. T. (2004). Domination and irredundance in tournaments. Australasian Journal of Combinatorics, 29, 157–172. https://ajc.maths.uq.edu.au/pdf/29/ajc_v29_p157.pdf

Paulovics Zoltán



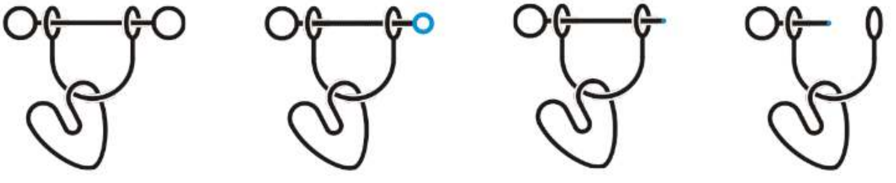
Rejtvények, ördöglakatok
Emelt szintű bújócska III.

Rovatunkban minden hónapban valamilyen szórakoztató matematikai fejtörőt mutatunk be. Ezek között fontos helyet foglalnak el a különböző kirakós játékok, topológiai feladványok, ördöglakatok és a matematikát felhasználó bűvészmutatványok.

Manapság szinte mindent meg lehet találni az interneten, de az igazi élményt az adja, ha a feladatokat magunk oldjuk meg, a bűvészmutatványok trükkjeit mi találjuk ki, és a szükséges kellékeket is mi tervezzük meg és készítjük el. Próbáljuk meg a feladatokat továbbgondolni, általánosítani, igyekezzünk új feladatokat kitalálni.

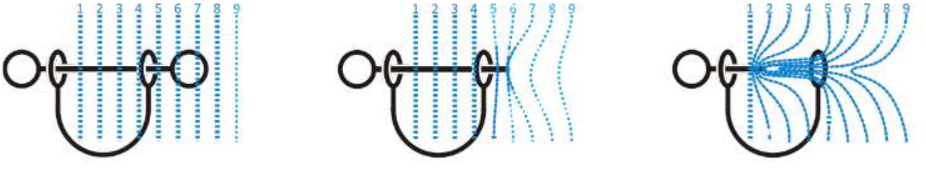
A 2025. szeptemberi és decemberi KöMaL-ban megjelent cikkek nyomán folytatjuk a bújócska típusú játékok tanulmányozását. Decemberi számunkban egy érdekes megoldási trükköt javasoltunk: képzeletben – mintha csak gumiból lenne – elhajtogattuk a játék keretét. Az így módosított játék megoldása viszonylag könnyű (legalábbis rutinos bújócskázóknak mindenképpen). Azt állítottuk, hogy ez a mentális kép sokat segíthet az eredeti játék megoldásában. Ebben az írásban ezt a transzformációs technikát próbáljuk jobban megvizsgálni és megérteni.

Térjünk vissza az alapokhoz, és transzformáljuk el a drótszív játékot. Képzeletben kicsinyítsük le az átmenő rudat és az azt lezáró egyik hurkot. Így persze a szívet akadálytalanul vehetjük le a keretről (*1. ábra*).



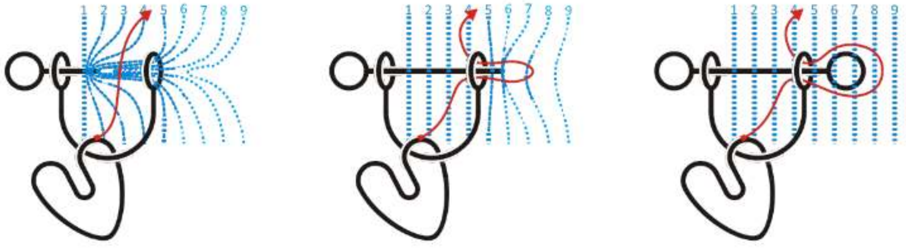
1. ábra

Ahhoz, hogy a rúd kicsinyítését igazán jól fel tudjuk használni az eredeti feladat megoldására, úgy kell elképzelnünk, hogy nem csak magát a játékot, hanem a teljes teret transzformáljuk „anélkül, hogy eltépnénk” (azaz folytonosan). Ezt szemlélteti a *2. ábra*.



2. ábra

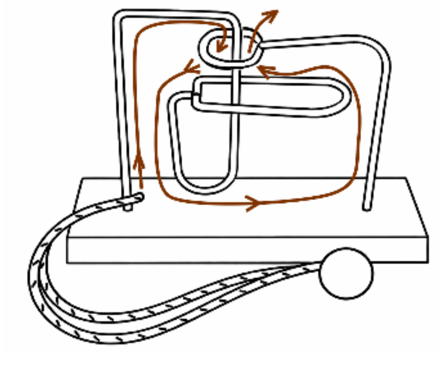
Ezután rajzoljuk be a kiszabaduló szív útját sematikusan, egy folytonos piros vonallal szemléltetve, majd „csináljuk vissza” a lekicsinyítős transzformációt. Ezen „visszacsinálás” során természetesen a térrel együtt a piros vonal is transzformálódik. (És ez is folytonosan.) A piros vonal transzformáció utáni képe gyakorlatilag megmutatja nekünk a megoldást (*3. ábra*).



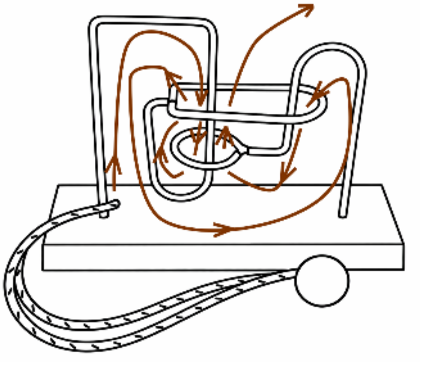
3. ábra

Ezzel a tapasztalattal felvértezve már nekiláthatunk az egyik decemberi probléma megoldásának. Itt a feladat az volt, hogy le kell fűzni a zsinórt a golyóval (*4. ábra*). Transzformáljuk ez esetben is a drót vázat (és vele együtt a teret) a decemberi számban is javasolt módon, vagyis „emeljük fel a jobb oldali dróton a hurkot”. A zsinór végének útját a transzformált képen viszonylag könnyen berajzolhatjuk (*5. ábra*). Ha ezután visszatranszformáljuk a hurkot az eredeti helyére – és vele a teret –, akkor a piros vonal megmutatja az eredeti játék megoldását (*6. ábra*).

4. ábra



5. ábra. A módosított keret megoldása



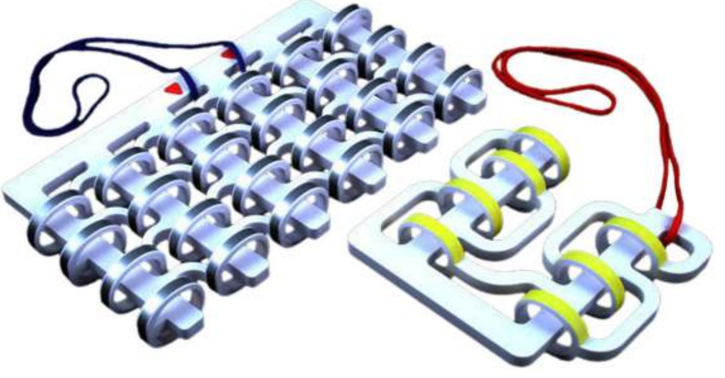
6. ábra. Az eredeti keret megoldása

A bújócska típusú játékok fogalmát nem definiáltuk pontosan, de talán a bemutatott példák alapján kialakult a kedves olvasóban egyfajta kép, hogy milyen feladványokat sorolnak ide. A drótszívnél az imént látott „átbújtatjuk, kigomboljuk, visszabújtatjuk” alapötletet többféleképpen is nehezíthetjük, módosíthatjuk, az így keletkező játékokat pedig mind bújócskának nevezhetjük.

7. ábra

A *7.* és *8. képen* néhány igen látványos (és nehéz) bújócska változat látható. A feladat minden esetben az, hogy le kell venni a zsinórt a szerkezetről.

Matematikailag a legkönnyebben talán azok a változatok modellezhetők, ahol valamilyen merev keretről kell egy hosszú, a kerethez sehol nem rögzített madzagot lefűznünk. (Általában feltesszük, hogy a zsinór elég hosszú bármilyen manőverhez.) Ilyen játékot magunk is tervezhetünk, sőt készíthetünk; rudak és gyűrűk kellően bonyolult rendszeréről szinte biztosan komoly kihívás lefűzni a zsinórt. (Az egy külön kérdés, hogy mitől lesz élvezetes egy ilyen feladvány – erre valószínűleg nincs jó válasz, de az elkészítése mindenképpen érdekes kihívás.)



8. ábra. Namick Salakhov: Loopy lattice puzzles

De honnan tudhatjuk, hogy egy játék egyáltalán megoldható? Ha úgy készítünk el egy bújócskát, hogy a keretre fűzzük fel a korábban különálló zsinórt, akkor természetesen megoldható feladványt kapunk. De ha a kereten valahol keresztüldugott zsinór két végét ezután kötjük össze, akkor a megoldhatóság már korántsem biztos. Egy lehetőség a megoldhatóság vizsgálatára, hogy képzeletben transzformáljuk a keretet, ahogyan fentebb láttuk. Például a *9. ábrán* látható, a KöMaL 2024. márciusi számának belső borítóján is szereplő Jákob lajtorjája nevű játéknál a pálcákat egymásból egyesével kibújtathatjuk, és így a keret teljesen szétbontható. Világos, hogy emiatt a zsinór biztosan lefűzhető a keretről. Elméletileg a tér visszatranszformálásával és benne a lefűzött zsinór útjának követésével itt is eljutunk a megoldáshoz, de a szerző tapasztalata szerint bizonyos bonyolultsági szint fölött ez majdnem kivitelezhetetlen. Ilyen esetekben a megoldás érdekében gyakran érdemes a transzformálást korábban mutatott fogásokkal (pl. rekurzív gondolkodás) ötvözni.

9. ábra

10. ábra

Mindazonáltal a transzformációs módszer legalábbis arról azonnal meggyőzi az avatott szemű megfigyelőt, hogy a *7. ábrán* látható játék is biztosan megoldható.

Sokkal nehezebb probléma egy feladvány megoldhatatlanságát igazolni. [Különösen a megoldhatókét. ☺] Általános érvényű tételt nemigen várhatunk. Ismert néhány – főleg az algebrai topológia területéhez tartozó – bizonyítási eljárás, amely segítségünkre lehet. Ezeket azonban még speciális esetben is komoly feladat lehet alkalmazni. Egy nevezetes megoldhatatlan játék látható a *10. ábrán.* Ennek történetéről a KöMaL YouTube csatornáján ([3]) bővebben hallhatunk. A feladat megoldhatatlanságát Inta Bertuccioni bizonyította 2003-ban ([4]).

Jó szórakozást!

A felhasznált képek forrásai

1–3. kép: [1]

7. kép: Gál Péter fotója

8. kép: A kép forrása: `https://puzzleworld.org/DesignCompetition/2018/`. Nick Baxter fotója alapján.

9–10. kép: A kép forrása `ordoglakat.blog.hu`

Hivatkozások

[1] Markus Götz: Basic Strategies to solve Disentanglement Puzzles, `https://www.gathering4gardner.org/g4g11gift/Gotz_Markus-Disentanglement_Puzzles.pdf`

[2] Gál Péter, személyes kommunikáció

[3] Vígh Viktor: (Két) Egy megoldhatatlan játék története, `https://www.youtube.com/watch?v=qBxXml8JVsU`

[4] Inta Bertuccioni: *A Topological Puzzle*, The American Mathematical Monthly, Vol. 110, No. 10 (2003), pp. 937–939.

Vígh Viktor

Helyreigazítás a 2026. januári számunk „Rejtvények, ördöglakatok” című rovatában megjelent cikkünkhöz

A 2026. januári számunkban megjelent *Színdominóktól a Wang csempékig* című írásunkba sajnos néhány pontatlanság csúszott, amelyekre Pálvölgyi Dömötör hívta fel a figyelmünket.

A cikk második felében, ha megengedjük a színdominók elforgatását, akkor sakktáblaszerű elrendezésben a sík egy tetszőleges színdominó és 180 fokos forgatottja segítségével periodikusan csempézhető, ezért a periodikus csempézés definíciója után végig feltesszük, hogy az elemek már nem elforgathatóak. Ez félreérthető módon szerepelt a cikkben.

Szintén csak implicit módon definiáltuk egy dominókészlet jóságát. Egy készletet jónak nevezünk, ha elemeivel a sík kicsempézhető. Hao Wang 1961-es híres eredménye pedig egy algoritmus volt, amely egy input dominókészletről eldönti, hogy jó-e vagy sem. Wang azt is észrevette, hogy *ez az algoritmus akkor és csak akkor áll le biztosan, ha minden jó dominókészlettel periodikusan is le lehet fedni a síkot.*

A KöMaL honlapján már a fenti pontosításokat tartalmazó, javított cikk olvasható. A hibákért elnézést kérünk.

A szerkesztőség

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. *a)* Oldja meg a valós számpárok halmazán az alábbi egyenletrendszert:

$$\frac{5}{x+y}+\frac{4}{x-2y}=\frac{3}{4},$$
$$\frac{15}{x+y}-\frac{8}{x-2y}=1. \qquad \textit{(9 pont)}$$

b) Egy kétjegyű szám 5-tel osztva 2-t, 6-tal osztva 3-at, 9-cel osztva 6-ot ad maradékul. Melyik ez a kétjegyű szám? *(5 pont)*

2. Szatmári Ferenc családjával egy meleg nyári napon autóval Budapestről Kisvárdára utazott. 7 óra 50 perckor indult. 25 perc alatt, 12 km-t haladva érte el az M3-as autópályát. 10 óra 55 perckor a 403-as útra tért le az autópályáról, majd 40 km megtétele után, összesen 284 kilométert vezetve 11:35 perckor ért Kisvárdára.

a) Mekkora volt az autó átlagsebessége az autópályán? *(3 pont)*

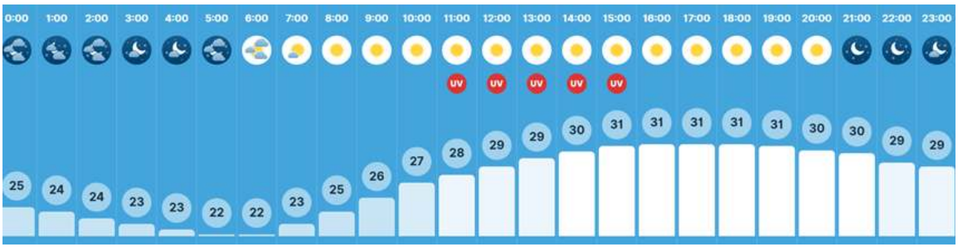
Az M3-ason öt alkalommal összesen 20 km-en volt útjavítás miatt sebességkorlátozás. Ezeken a szakaszokon a megengedett maximális sebesség 80 km/h volt, de az autósok ezeken a szakaszokon csak 50 km/h sebességgel tudtak vezetni.

b) Ferenc úgy gondolta, hogy ha itt 120 km/h sebességgel haladhatott volna, akkor legalább fél órával hamarabb ért volna Kisvárdára. Igaza van-e Ferencnek? *(3 pont)*

A család három gyereke, Péter, Anna és Lilla az autó hátsó ülésén utazott, ahol szabály szerint három ember ülhet. Péter azt kérte, hogy ne ő üljön középre, nem szeret a két lány között utazni.

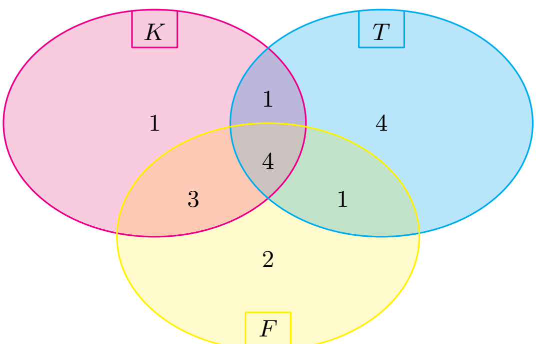
c) Hányféle módon ülhettek be a kocsi hátsó három ülésére, ha Péter kérését figyelembe vették? *(3 pont)*

Az erre a napra készült óránkénti időjárás-előrejelzést mutatja az Időkép applikáció grafikonja:



d) Mekkora az óránkénti hőmérsékleti értékek módusza, illetve mediánja ezen a napon? Mekkora az óránkénti adatok alapján az átlaghőmérséklet? *(4 pont)*

3. A 30 fős 11. a osztály tanulói sokféle nyári programon vettek rész. Többek között külföldre (K) utaztak, balatoni táborban (T) voltak, könnyűzenei fesztiválon (F) vettek részt. Az alábbi halmazábra mutatja, hogy melyik programon hány diák volt.



a) Hányan nem voltak sem külföldi úton, sem táborban, sem fesztiválon? *(2 pont)*

b) Véletlenszerűen kiválasztunk az osztály tanulói közül egyet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy volt külföldön vagy táborban, de nem vett részt fesztiválon? *(3 pont)*

A kötelező és ajánlott olvasmányok elolvasása nem mindig könnyű. Egy tanévben akár 15 irodalmi alkotás is szerepelhet az olvasmányok listáján.

c) Egy 405 oldalas kötelező olvasmányt Soma az alábbi terv szerint kíván elolvasni pontosan 15 nap alatt. A második naptól kezdve minden nap egy oldallal többet olvas el, mint az előző nap. Hány oldal elolvasását tervezi az első napra és hányat a tizenötödikre? *(5 pont)*

Az egyik matematikaszakkörön 7 tanuló jelent meg. Matematikatanáruk beszélgetéssel szokta kezdeni a nyolcadik órában tartott szakkört.

d) Megkérdezte a jelenlévőktől, hogy hány embert hívtak fel mobiltelefonon az előző héten a jelenlévő diákok közül. Ezeket a számokat mondták: Péter 4, Sári 1, Balázs 0, Sanyi 2, Bori 2, Ernő 4, Miki 2. Tanáruk erre azt mondta, valaki rosszul emlékszik. Mire alapozta a véleményét a matematikatanár? *(2 pont)*

4. Bizonyítsa be az alábbi állításokat:

a) $\binom{2024}{10}+2\cdot\binom{2024}{11}+\binom{2024}{12}=\binom{2026}{12}$. *(4 pont)*

b) Ha n pozitív egész szám, akkor $(n-1)!+n!+(n+1)!=(n+1)!\cdot\dfrac{n+1}{n}$. *(4 pont)*

c) $\dfrac{3^{150}-2\cdot 3^{149}+3^{148}}{3^{147}+3^{146}}=9$. *(4 pont)*

II. rész

5. *a)* Oldja meg a valós számok halmazán a $\left(\sin(x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$ egyenletet. *(7 pont)*

b) Határozza meg az $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto \dfrac{1}{\sin(x)+2}$ függvény értékkészletét! *(4 pont)*

Egy üzletben négyféle zsebszámológépet árusítanak, 9500, illetve 6100 forintért PÖPEC típusút, 5800, illetve 7100 forintért SPICC típusút. Az üzlet statisztikája szerint a vevők 60%-a PÖPEC márkát vásáról, 40% SPICC-et választ. A PÖPEC számológépet vásárlók 40%-a a drágább típust választja, a SPICC típus esetében 65% dönt a drágább mellett.

c) A vásárlók hány százaléka vásárol 7000 forintnál olcsóbb számológépet? *(5 pont)*

6. Értelmezzük az f függvényt az alábbi módon:

$$f\colon\ [0;4]\to\mathbb{R},\qquad x\mapsto \frac{1}{4}\,(x-4)^2.$$

a) Határozza meg a függvény grafikonjának és a koordinátatengelyek közös pontjainak koordinátáit! *(4 pont)*

b) Mekkora az a terület, amelyet a függvény grafikonja és a koordinátatengelyek közrefognak? *(6 pont)*

c) Adja meg az f függvény inverzét! *(6 pont)*

7. Az e egyenes egyenlete $4x + 3y = 120$, az f egyenes egyenlete $3x - 4y = -60$. Az $ABCD$ négyszögben az A csúcs a $(0;0)$ pont, a B csúcs az x tengelyen, a D csúcs az y tengelyen van. A BC oldal az e egyenesre, a CD oldal az f egyenesre illeszkedik.

a) Számítsa ki a négyszög B, C, D csúcsainak a koordinátáit! *(4 pont)*

b) Bizonyítsa be, hogy a négyszög húrnégyszög! *(5 pont)*

c) Írja fel a négyszög köré írható körének az egyenletét! *(4 pont)*

Az interneten találtunk egy 25 feladatot tartalmazó gyakorló feladatsort. A feladatok közül 8 a sorozatok, 6 a függvények, 4 a kombinatorika, 7 a koordinátageometria témakörbe tartozik.

d) Találomra egyszerre választunk ezek közül öt feladatot úgy, hogy minden feladatot ugyanakkora eséllyel választunk ki. Mennyi a valószínűsége annak, hogy 3 sorozatos és 2 koordinátageometriai feladat lesz a választottak között? *(3 pont)*

8. Egy fenyőfatermesztéssel foglalkozó vállalkozás a 2025 és 2027 közötti három évre tervet készített. Becslésük szerint 2025 szeptemberében 10 000 fenyőfájuk volt a területen. Minden évben október közepén 2000 új fát akarnak elültetni és decemberben az állomány 10%-át kivágni.

a) Összesen hány fa kivágását tervezik ebben a három évben? *(5 pont)*

Jelölje a_n az n-edik év végén, azaz a $(2024 + n)$-es év végén a faállomány tervezett mennyiségét. Feltételezzük, hogy ugyanilyen elvek szerint gazdálkodnak a következő években is.

b) Adja meg az a_n sorozat általános tagját! *(6 pont)*

Az egyik piacon karácsony előtt évek óta háromféle fenyő verseng a vásárlók kegyeiért: a nordmannfenyő, a lucfenyő és az ezüstfenyő. A nordmannfenyőt 45, a lucfenyőt 37, míg az ezüstfenyőt a vásárlók 13 százaléka választja. 5 százalék más fenyőfajták részesedése az eladásokban.

c) Ha véletlenszerűen megkérdezünk hat fenyőfát vásárló embert, hogy milyen fát vett, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy közülük három nordmannfenyőt, kettő lucfenyőt és egy ezüstfenyőt vásárolt? A valószínűség értékét három tizedesjegy pontossággal adja meg. (Feltételezzük, hogy mindenki pontosan egy fenyőfát vásárolt.) *(5 pont)*

9. *a)* Oldja meg a valós számok halmazán a $\lg\left(36 + 2^{\sqrt{3x}}\right) > 2$ egyenlőtlenséget! *(7 pont)*

b) Fogalmazza meg az alábbi állítás megfordítását! Döntse el, hogy igaz-e az állítás és annak megfordítása!

Ha egy valós szám nagyobb, mint 5*, akkor értelmezhető a valós szám tízes alapú logaritmusa.* *(3 pont)*

Egy emelt szintű érettségi feladatsor II. részében öt feladat van, 5–9-ig számozva. Ezekből csak négyet kell megoldania a vizsgázónak.

c) Egy 17-fős matematika csoportból mindenki emelt szinten írta az érettségi dolgozatát. Péter és Anna beszélgetnek:

Péter: Biztos, hogy közülünk legalább négy ember ugyanazt a feladatot hagyta ki.

Anna: Biztos, hogy volt olyan feladat, amelyet pontosan négyen hagytak ki.

Melyikük állítása igaz? Indokolja a választ! *(4 pont)*

Az alábbi táblázat mutatja, hogy az egyes feladatokat hányan választották és ha foglalkoztak vele, hányan oldották meg hibátlanul, 16 pontra.

	5. feladat	6. feladat	7. feladat	8. feladat	9. feladat
foglalkozott vele	14	14	16	13	11
16 pontos	4	6	9	3	5

d) Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy dolgozatot véletlenszerűen kiválasztva a 17 közül, abban azt látjuk, hogy az érettségiző a 8. feladatot 16 pontra oldotta meg? *(2 pont)*

Horváth Eszter

Budapest

Megoldásvázlatok a 2026./2. szám matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Határozza meg a természetes számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amely értelmezési tartománya lehet az alábbi kifejezéseknek.*

a) $\log_x(-2x^2-7x+15)$ (6 pont)

b) $\sqrt{\dfrac{x^2-2x}{-2x^2-7x+15}}$ (6 pont)

Megoldás. *a)* Az alap miatt $x>0$ és $x\neq 1$, az argumentum miatt $-2x^2-7x+{}$ $+15>0$. Az egyenlőtlenség megoldása $-5<x<1{,}5$, ezért a természetes számok halmazán nincs értelmezve a kifejezés, hiszen $x\neq 1$ és $x\neq 0$.

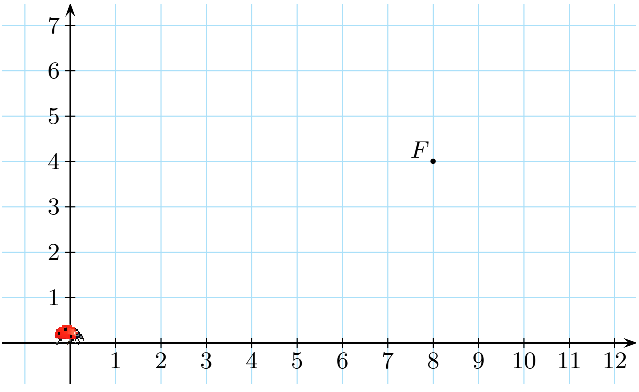
b) A négyzetgyök definíciója miatt $\dfrac{x^2-2x}{-2x^2+9x-9}\geqslant 0$. A számláló pozitív, ha $x<0$, vagy $x>2$, negatív, ha $0<x<2$, nulla az értéke, ha $x=0$ vagy $x=2$. A nevező pozitív, ha $-5<x<1{,}5$, negatív, ha $x<-5$, vagy $x>1{,}5$. Ezért a kifejezés a következő természetes számokon értelmezhető: 0 és 2. Ekvivalens átalakításokat végeztünk.

2. *Egy online játékban a koordináta-rendszer origójából kell eljutni a katicabogár figurával az $F(8;4)$ koordinátájú pontba. A katicabogárral minden lépésben csak jobbra vagy felfelé léphetünk egyet.*

a) *Hányféle úton juthat el a katica az origóból F-be? (Két útvonal különböző, ha az egyikben lépünk olyan rácspontra, amelyre a másikban nem.)* (6 pont)

b) *Az $F(8;4)$ koordinátájú pont egy parabola fókuszpontja. Mi lehet a parabola egyenlete, ha tudjuk, hogy a parabola tengelye párhuzamos az y tengellyel és a 10 ordinátájú pontban metszi az y tengelyt?* (6 pont)

Megoldás. *a)* Az $F(8;4)$ koordinátájú pontba az origóból 8 balra és 4 felfelé irányuló lépéssel lehet eljutni. Például (b-balra, f-felfelé) $bbbbbbbbffff$ vagy $fbfbffbbbbbb$. A betűk különböző sorrendje adja meg a lehetséges utakat: $\frac{12!}{8!\cdot 4!}=$ $=495$, tehát 495-féle úton juthat a katica az origóból az F pontba.



b) A parabola tengelypontja $T(u;v)$, paramétere p ($p>0$). A parabola az y tengelyt 10-ben metszi, ezért pontja a $P(0;10)$ pont. Mivel a parabola tengelye az y tengellyel párhuzamos, ezért két esetet vizsgálunk.

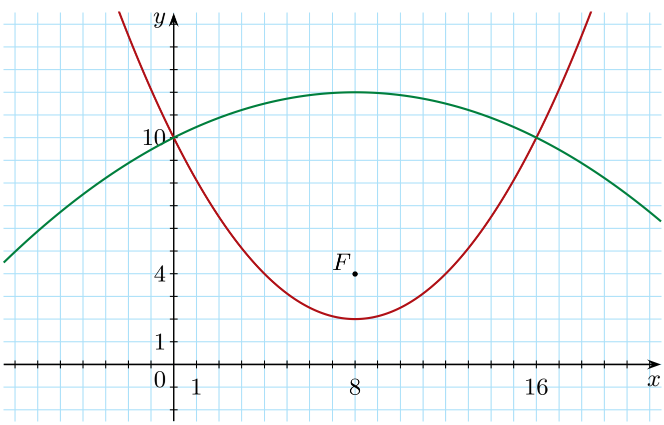
Ha a parabola „lefele nyíló”, tengelypontja $T\left(8;4+\frac{p}{2}\right)$, ekkor az egyenlete

$$y-v=-\frac{(x-u)^2}{2p}.$$

Ebbe az összefüggésbe behelyettesítve T és P koordinátáit:

$$10-\left(4+\frac{p}{2}\right)=-\frac{(0-8)^2}{2p}.$$

Rendezve az egyenletet: $p^2-12p-64=0$. A pozitív megoldás a parabola paramétere: $p=16$, tehát az egyik lehetséges parabola egyenlete $y-12=-\frac{(x-8)^2}{32}$.



Ha pedig a parabola „felfele nyíló”, tengelypontja $T\left(8; 4-\frac{p}{2}\right)$, az egyenlete pedig

$$y - v = \frac{(x-u)^2}{2p}.$$

Ebbe ez összefüggésbe behelyettesítve T és P koordinátáit:

$$10 - \left(4 - \frac{p}{2}\right) = \frac{(0-8)^2}{2p}.$$

Rendezve ezt az egyenletet: $p^2 + 12p - 64 = 0$, pozitív megoldása: $p = 4$. Így a másik lehetséges parabola egyenlete $y - 2 = \dfrac{(x-8)^2}{8}$.

3. *Egy napközis csoport minden tagja egész délután papírrepülőket hajtogat. A tapasztalat szerint a meghajtogatott repülők* 3 *százaléka hibás – nem lehet repülésre bírni.*

a) *Mennyi a valószínűsége, hogy ha* 5*-öt kiválasztunk – visszatevéssel – a papírrepülők közül, lesz köztük hibás?* (5 pont)

Egy tanuló statisztikát készített a 10 *percenként elkészülő papírrepülők számából. Azt tapasztalta, hogy az adatok mediánjának és alsó kvartilisének összege* 28*, a felső és alsó kvartilis különbsége* 6*, valamint a felső kvartilis és medián eltérése* 4*.*

b) *Határozza meg az adatok ezen jellemzőit.* (4 pont)

c) *Ábrázolja dobozdiagramon az adatokat, ha a minimum* 8*, a maximum pedig* 22 *és kiugró érték nincs.* (3 pont)

d) *A csoport tagjai elhatározták, hogy felújítanak egy régi szokást: képeslappal lepik meg egymást a nyári szünetben. Ezért kicserélték egymással a lakcímüket (kölcsönösen). Egy gráfon képzelték el a cseréket. Az élek jelentették a lakcímcserét. Ha kettővel többen lettek volna – és ők is kicserélik mindenkivel a címüket –, a gráfnak* 45*-tel több éle lett volna. Hányan voltak a csoportban?* (3 pont)

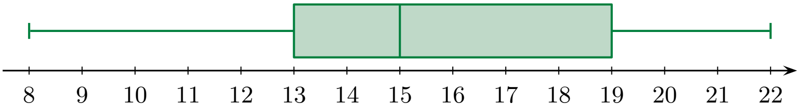
Megoldás. *a)* Ha hibás van a repülők között, az lehet 1, 2 vagy több, akár 5 is. Ezért egyszerűbb a komplementer esemény valószínűségét meghatározni először: nincs a kiválasztottak között hibás.

$$p(\text{van köztük hibás}) = 1 - p(\text{nincs köztük hibás}) = 1 - 0{,}97^5 \approx 0{,}14,$$

tehát 14 százalék annak a valószínűsége, hogy lesz a kiválasztottak között hibás.

b) Vezessük be a következő jelöléseket. Alsó kvartilis: a, medián: m, felső kvartilis: f. Így $m + a = 28$, $f - a = 6$ és $f - m = 4$. Az egyenletrendszer megoldása $a = 13$, $m = 15$, illetve $f = 19$. (A kapott értékek megfelelnek a feladat szövegének.)

c)



d) Ha n fő cserél címet, a kialakuló n pontú gráfban $\binom{n}{2}$ él lesz. Kettővel több résztvevő esetén $\binom{n+2}{2}$ él lesz. Ezért

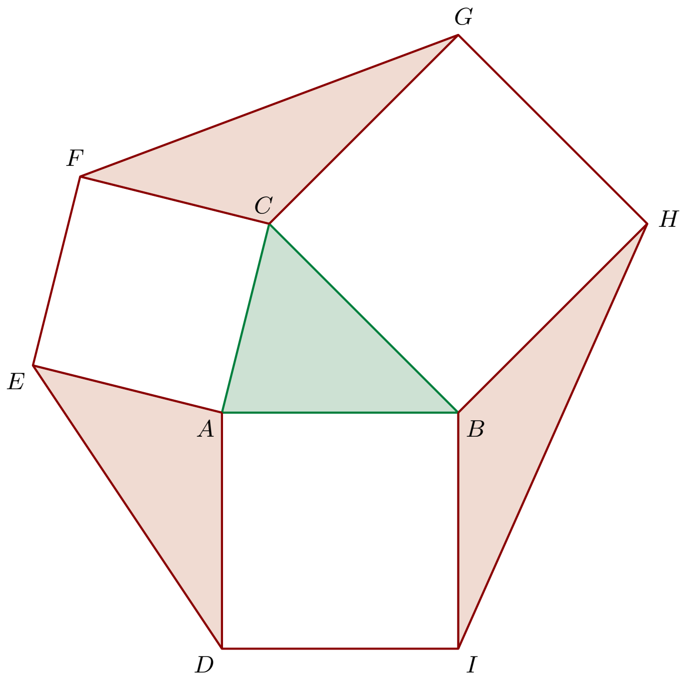
$$\binom{n+2}{2} - \binom{n}{2} = 45,$$

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = 45,$$

amiből $n = 22$, tehát eredetileg 22-en voltak a csoportban.

Másképp: mindketten n emberrel cserélnének lakcímet és még egymás között, azaz $2n+1 = 45$, amiből $n = 22$. (A kapott érték megfelel a feladat feltételeinek.)

4. *Egy háromszög mindhárom oldalára kifelé egy-egy, a háromszög oldalával egyenlő oldalhosszúságú négyzetet rajzolunk. A szomszédos négyzetek szabad csúcsait összekötve kapjuk az ADE, CFG és BHI háromszögeket az ábrának megfelelően.*



a) *Bizonyítsa be, hogy ezeknek a háromszögeknek a területe egyenlő az eredeti ABC háromszög területével.* (4 pont)

b) *Határozza meg a $DEFGHI$ hatszög területét, ha az eredeti háromszög oldalainak hossza 6 cm, 7 cm és 8 cm.* (6 pont)

c) *Adja meg az alábbi állítások logikai értékét, ha α tetszőleges valós szám.*

A: $\cos(270^\circ + \alpha) = \sin(\alpha)$

B: $1 + \cos(2\alpha) = 2\sin^2(\alpha)$

C: $\sin(60^\circ - \alpha) = \cos(30^\circ + \alpha)$ (3 pont)

Megoldás. *a)* Az ABC háromszög megfelelő oldalhosszait a szokásoknak megfelelően a, b és c-vel, belső szögeit pedig α-val, β-val, illetve γ-val jelölve az ABC háromszög területe

$$t = \frac{ab\sin(\gamma)}{2} = \frac{bc\sin(\alpha)}{2} = \frac{ac\sin(\beta)}{2}.$$

A DAE szög nagysága

$$360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \alpha,$$

ezért az ADE háromszög területe

$$\frac{bc\sin(180^\circ - \alpha)}{2} = \frac{bc\sin(\alpha)}{2} = t.$$

A másik két új háromszög területéről is hasonlóan be lehet látni, hogy az eredeti háromszög területével egyenlők.

b) Koszinusztétellel kiszámíthatjuk az ABC háromszög egy szögét. Például

$$a = 8 \text{ cm}, \qquad b = 7 \text{ cm}, \qquad c = 6 \text{ cm}$$
$$64 = 49 + 36 - 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cos(\alpha).$$

Innen $\alpha \approx 75{,}52^\circ$. Így a háromszög területe $T_\triangle = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 75{,}52^\circ}{2} \approx 20{,}33\ \text{cm}^2$. A hatszög területe

$$T_{\text{hatszög}} = a^2 + b^2 + c^2 + 4T_\triangle = 8^2 + 7^2 + 6^2 + 4 \cdot 20{,}33 = 230{,}32\ \text{cm}^2.$$

c) Az állítások logikai értéke: A: igaz, B: hamis, C: igaz.

II. rész

5. *Egy háromszög b oldalához tartozó magassága, az a oldala, a b oldala és a c oldala centiméterben kifejezve ebben a sorrendben egy 2 differenciájú számtani sorozat négy egymást követő tagja.*

a) *Hányszorosa a háromszög területének mérőszáma a kerület mérőszámának?* (8 pont)

b) *Mekkora részekre osztja a b oldalt a hozzátartozó magasság?* (3 pont)

c) *Bizonyítsa be, hogy minden pozitív egész n esetén $2^{4n} + 4$ kifejezés osztható 20-szal.* (5 pont)

Megoldás. *a)* Jelölje b a középső oldalt, ekkor $a=b-2$, $c=b+2$. Legyen a b oldalhoz tartozó magasság m. A feladat feltétele szerint $m=b-2d=b-4$. Mivel $m>0$, ezért $b>4$ lehet csak. Írjuk fel a háromszög területét kétféleképpen, egyrészt az alap és a hozzá tartozó magasság segítségével: $T=\dfrac{1}{2}bm=\frac{b(b-4)}{2}$. Másrészt használjuk a Héron-képletet:

$$T=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

ahol $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ a félkerület. Behelyettesítve az oldalak kifejezéseit:

$$s=\frac{(b-2)+b+(b+2)}{2}=\frac{3b}{2}.$$

Ezért

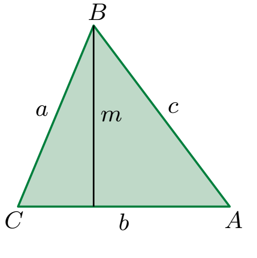
$$T=\sqrt{\frac{3b}{2}\left(\frac{b+4}{2}\right)\frac{b}{2}\left(\frac{b-4}{2}\right)}=\frac{b(b-4)}{2}.$$

A terület pozitív, ezért a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás:

$$3\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{b+4}{2}\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{b-4}{2}=\frac{b^2(b-4)^2}{4},$$

ahonnan a pozitív $b^2(b-4)$-gyel osztva és 16-tal szorozva $3(b+4)=4(b-4)$, azaz $b=28$ cm adódik. Ekkor $m=b-4=24$, a háromszög másik két oldala pedig $a=28-2=26$, illetve $c=28+2=30$ centiméter hosszú. A kapott hosszúságokkal valóban szerkeszthető háromszög, amelynek a kerülete $K=84$ cm, a területe $T=\dfrac{28\text{ cm}\cdot 24\text{ cm}}{2}=336\text{ cm}^2$, tehát a terület és kerület mérőszámának aránya: $\dfrac{336}{84}=4$.

b) A háromszög b oldalához tartozó magassága az a oldallal és a b oldal egyik szeletével derékszögű háromszöget hoz létre.



Pitagorasz-tétellel kiszámítható a b oldal két szeletének hossza: 10 cm és 18 cm. Ekkora részekre osztja a b oldalt a hozzá tartozó magasság.

c) $2^{4n}+4=16^n+4$ nyilván osztható 4-gyel. 16 minden hatványa 6-ra végződik, ehhez 4-et adva 0-ra végződő, tehát 10-zel osztható számot kapunk. Ezért $2^{4n}+4$ osztható 4 és 10 legkisebb közös többszörösével, 20-szal is.

De teljes indukcióval is bizonyítható az állítás. Az első lépésben megvizsgáljuk, hogy teljesül-e az adott tulajdonság 1-re.

1. Az állítás teljesül 1-re. $2^{4\cdot 1}+4=20$, valóban osztható 20-szal.

2. Be kell bizonyítanunk, hogy ha egy számra teljesül az adott oszthatóság (indukciós feltétel), akkor a nála 1-gyel nagyobb számra is teljesül. Vagyis ha például $2^{4n}+4$ osztható 20-szal, akkor $2^{4(n+1)}+4$ is osztható 20-szal.

Ezt ekvivalens algebrai átalakítással vezetjük le.

$$2^{4(n+1)}+4=2^4\cdot 2^{4n}+2^4\cdot 4-2^4\cdot 4+4=2^4(2^{4n}+4)-60.$$

Ez a kifejezés pedig osztható 20-szal, hiszen az indukciós feltétel miatt $2^{4n}+4$ osztható 20-szal, és a 60 is többszöröse 20-nak. Beláttuk, hogy az állítás öröklődik n-ről $(n+1)$-re, ezért az állítás is igaz minden pozitív egész számra.

6. *Koordináta-rendszerbe rajzolunk két körvonalat. A körök egyenlete $x^2+y^2-14x-12y+60=0$ és $x^2+y^2-2x-6y=0$. A nagyobb sugarú kör középpontja legyen O_1, a kisebb sugarú kör középpontja legyen O_2. A két kör metszéspontjait jelölje A és B.*

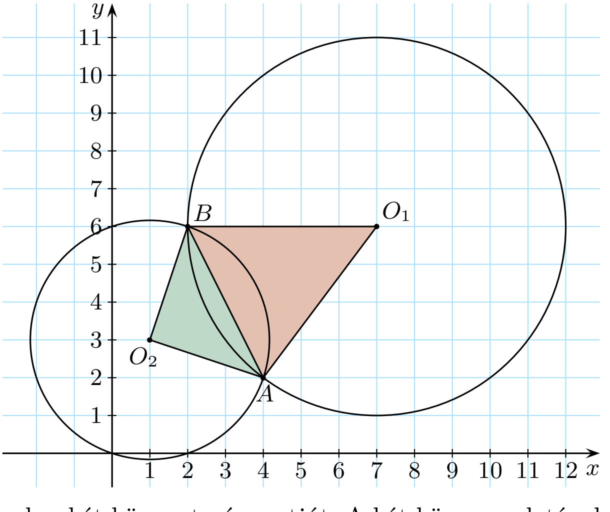
a) *Igazolja, hogy az O_1AB háromszög területe kétszer akkora, mint az O_2AB háromszög területe.* (8 pont)

Tekintsük az $x^2+y^2-14x-12y+60\leqslant 0$ és $x^2+y^2-2x-6y\leqslant$ körlapokat mint ponthalmazokat.

b) *Határozza meg a két ponthalmaz metszetének területét.* (5 pont)

c) *Adja meg a két ponthalmaz egyesítésének területét.* (3 pont)

Megoldás. *a)* Első kör: $(x-7)^2+(y-6)^2=25$, ennek középpontja (7;6), sugara: $r_1=5$. Második kör: $(x-1)^2+(y-3)^2=10$, ennek középpontja (1;3), sugara: $r_2=\sqrt{10}$. Az első kör sugara nagyobb, így annak a középpontja O_1, a másiké O_2.



Meghatározzuk a két kör metszéspontját. A két kör egyenletének különbségéből $2x+y-10=0$, ahonnan $y=10-2x$. Ezt behelyettesítve a második kör egyenletébe, egyszerűsítés után azt kapjuk, hogy $x^2-6x+8=0$. Ennek az egyenletnek a megoldásai: $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, innen: $y_1 = 2$, $y_2 = 6$. Ezért $A(4;2)$ és $B(2;6)$ (vagy fordítva, de ennek nincs jelentősége).

Mivel BO_1 oldal párhuzamos az x tengellyel, az O_1AB háromszögben hozzá tartozó magasság 4 egység, így az O_1AB háromszög területe:

$$t_1 = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \text{ területegység.}$$

Az O_2AB háromszög oldalainak hossza:

$$O_2B = O_2A = \sqrt{10}, \qquad AB = \sqrt{20},$$

ezért ez a háromszög egyenlő szárú és derékszögű. Területe:

$$\frac{(\sqrt{10})^2}{2} = 5 \text{ területegység,}$$

tehát O_1AB háromszög területe kétszer akkora, mint az O_2AB háromszög területe.

b) A két kör metszetének területe két körszelet területének összegeként számítható ki. A kisebb körből levágott körszelet területe: az O_2AB körcikk területéből kivonjuk az O_2AB háromszög területét.

$$\frac{(\sqrt{10})^2 \cdot \pi}{4} - 5 \approx 2{,}85 \text{ területegység.}$$

A nagyobb körből levágott körszelet területéhez először kiszámítjuk a BO_1A szöget koszinusztétellel:

$$20 = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos\alpha, \qquad \alpha \approx 53{,}13^\circ.$$

Az O_1AB körcikk területéből kivonjuk az O_1AB háromszög területét:

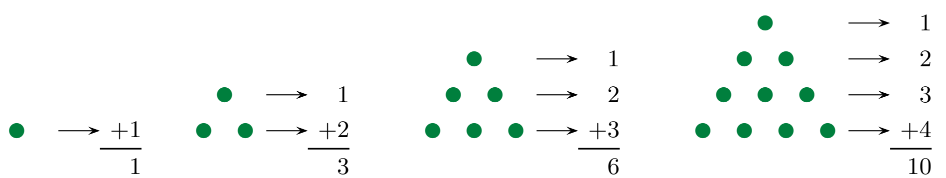
$$\frac{53{,}13^\circ}{360^\circ} \cdot 5^2 \cdot \pi - 10 \approx 1{,}59 \text{ területegység.}$$

Így a két kör alakú ponthalmaz metszetének területe: 4,44 területegység.

c) A két ponthalmaz uniójának területét megkapjuk, ha a két kör területének összegéből kivonjuk a két kör metszetének területét:

$$5^2\pi + \left(\sqrt{10}\right)^2\pi - 4{,}44 \approx 105{,}52 \text{ területegység.}$$

7. *Háromszögszámnak nevezzük az olyan számot, amelyet megkaphatunk úgy, hogy 1-től valameddig az összes természetes számot összeadjuk. Az első n pozitív egész szám összege az n-edik háromszögszám. Az ábrán látható elrendezés mutatja, hogy miért nevezik háromszögszámoknak.*



a) *Az első száz pozitív természetes számból kiválasztunk egyet. Nézzük az alábbi eseményeket:*

A: a választott szám háromszögszám,

B: a választott szám négyzetszám,

C: a választott szám prímszám.

Határozza meg a következő valószínűségeket: $P(A)$; $P(A\cdot C)$; $P\big(\overline{A+B}\big)$. (8 pont)

b) *Az n-edik pozitív négyzetszámot hozzáadva az n-edik háromszögszámhoz 14 751-et kapunk. Mennyi az n értéke, és melyek ezek a számok?* (8 pont)

Megoldás. *a)* A háromszögszámok 100-ig könnyen felsorolhatók: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78 és 91, tehát 13 háromszögszám van 1 és 100 között, ezért $P(A)=0{,}13$.

A felsorolt háromszögszámok között csak egy prímszám van, ezért $P(A\cdot C)=$ $=0{,}01$.

A felsorolt háromszögszámok között két négyzetszám van, az 1 és a 36. A négyzetszámok száma tíz. Ezért olyan szám, amely négyzetszám vagy háromszögszám (a logikai szita alapján) $13+10-2=21$ van. Így

$$P(A+B)=\frac{21}{100}=0{,}21, \qquad \text{amiből} \qquad P\big(\overline{A+B}\big)=1-0{,}21=0{,}79.$$

b) Az n-edik háromszögszám az első n pozitív egész szám összege: $\frac{n(n+1)}{2}$, ezért az n-edik háromszögszámhoz hozzáadva az n-edik négyzetszámot: $\frac{n(n+1)}{2}+$ $+n^2=14\,751$, $3n^2+n-29\,502=0$. Ennek pozitív megoldása: $n=99$. A 99-edik háromszögszám a 4950, a 99-edik négyzetszám a 9801. Ellenőrzés: ezek összege 14 751.

8. *Adott két, a pozitív valós számok halmazán értelmezett függvény: $f\colon \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos(x)$ és $g\colon \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-\frac{\pi}{2}$.*

a) *Határozza meg a következő értékeket: $f\left(g\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$; $g^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)$; $g\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.* (3 pont)

b) *Határozza meg az y tengely, az f és g függvény grafikonja, továbbá az $x=\frac{\pi}{4}$ egyenes által közrezárt terület nagyságát.* (5 pont)

c) *Oldja meg a következő egyenletet a $[0;2\pi]$ intervallumon:*

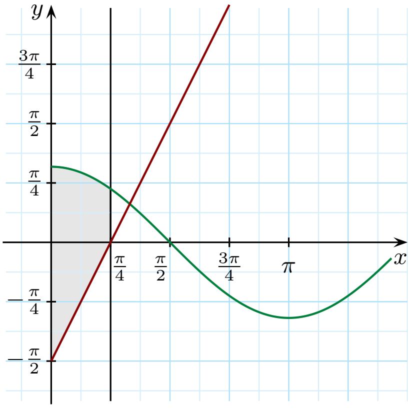
$$\cos(2x)+\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\sin(x). \qquad (8 \text{ pont})$$

Megoldás. *a)* $f\left(g\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)=\cos\left(2\cdot\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)=\cos(\pi)=-1.$

A g^{-1} a g függvény inverze: $g^{-1}(x)=\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}$, $g^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

$g\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{2}=\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}.$

b)



A terület két darabból tehető össze: a $\cos(x)$ függvény grafikonja alatti terület az adott intervallumon, és a $(0;0)$, $\left(\frac{\pi}{4};0\right)$, $\left(0;-\frac{\pi}{2}\right)$ csúcspontokkal megadott háromszög területe.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\, dx = [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7071.$$

A háromszög területe:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{16} \approx 0{,}6169.$$

A kérdéses terület 1,324 területegység.

c) Végezzük el az alábbi átalakításokat:

$$\cos^2(x) - \sin^2(x) + \sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos(x)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sin(x),$$

$$\cos^2(x) - \sin^2(x) + \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(x),$$

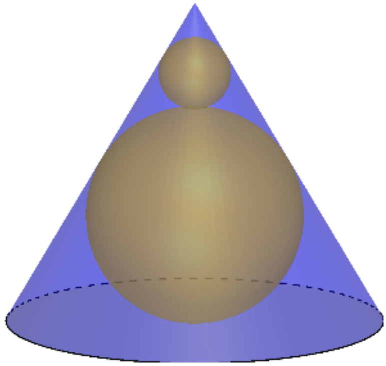
$$\cos^2(x) - \sin^2(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) = 0,$$

$$\cos^2(x) - 1 + \cos^2(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) = 0,$$

$$2\cos^2(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) - 1 = 0.$$

Innen: $\cos(x) \approx 0{,}523$ vagy $\cos(x) \approx -0{,}956$. Ha $\cos(x) \approx 0{,}523$, akkor $x_1 \approx 1{,}02$; $x_2 \approx 5{,}26$. Ha $\cos(x) \approx -0{,}956$, akkor $x_3 \approx 2{,}84$; $x_4 \approx 3{,}44$. Ez a négy érték valóban megoldása az egyenletnek.

9. *Egy* 60 *fokos nyílásszögű egyenes körkúpba két darab gömböt helyezünk egymás fölé úgy, hogy a nagyobbik gömb a kúp alapján nyugszik, a két gömb érinti egymást és a kúp palástját is.*

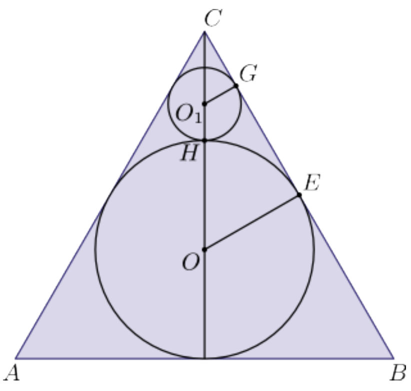


a) *Határozza meg a két gömb sugarának arányát.* (7 pont)

b) *Hányszor nagyobb a kúp térfogata a két gömb össztérfogatánál?* (6 pont)

c) *Adja meg a kúp térfogatát, ha tudjuk, hogy a magassága 18 cm.* (3 pont)

Megoldás. *a)* Megrajzoljuk a kúp tengelymetszetét. A tengelymetszet háromszög szabályos, mert tengelyesen szimmetrikus és az egyik szöge 60°-os.



A nagyobb kör (a szabályos háromszög beírható köre) középpontja O, sugara $R = OE$, a kisebb kör középpontja O_1, sugara: $r = O_1G$, ahol G és E az oldallal vett érintési pontok. CO_1G háromszög hasonló COE háromszöghöz, hiszen megfelelő szögeik páronként egyenlők. A két kör érintési pontja H. Mivel a CO_1G háromszög szögei 30°, 60° és 90° fokosak, $CO_1 = 2O_1G = 2r$, mivel a COE háromszög szögei is 30°, 60° és 90° fokosak, $CO = 2OE = 2R$, így $CH = 3r = R$, tehát a két kör sugarának aránya: $1 : 3$.

b) A kúp alkotója legyen a. Az alapkörének sugarát is fel tudjuk írni a beírt gömbök sugarainak segítségével. A tengelymetszet szabályos háromszög, a magassága $3R = a\frac{\sqrt{3}}{2}$, amiből

$$a = \frac{6R}{\sqrt{3}},$$

ezért a kúp alapkörének sugara:

$$p = \frac{3R}{\sqrt{3}} = R\sqrt{3}.$$

A kúp térfogata:

$$V = (R\sqrt{3})^2 \cdot \pi \cdot 3R \cdot \frac{1}{3} = 3 \cdot R^3 \cdot \pi = 81 \cdot r^3 \cdot \pi.$$

A gömbök térfogatának összege:

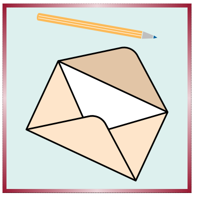
$$V' = 4 \cdot r^3 \cdot \pi \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot R^3 \cdot \pi \cdot \frac{1}{3} = 4 \cdot r^3 \cdot \pi \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot 27 \cdot r^3 \cdot \pi \cdot \frac{1}{3} =$$
$$= \frac{4\pi}{3} \cdot 28 \cdot r^3 = \frac{112}{3}\pi \cdot r^3.$$

Ezért a kúp térfogata $\frac{243}{112} \approx 2{,}17$-szerese a gömbök össztérfogatának.

c) A kúp magassága $m = 18$ cm, valamint mivel $m = 3R$, $R = 6$ cm. A kúp térfogata:

$$V = \left(R\sqrt{3}\right)^2 \cdot \pi \cdot 3R \cdot \frac{1}{3} = 648 \cdot \pi \approx 2035{,}75\ \text{cm}^3.$$

Tatár Zsuzsanna Mária
Esztergom



Megjegyzés a polinomosztásról a B. 5390. feladat kapcsán

A KöMaL 74. évfolyam 7. számában jelent meg a **B. 5390.** feladatnak két szép versenyzői megoldása. A feladat:

B. 5390. *Léteznek-e olyan a_0, a_1, …, a_{n-1} páros egész számok, amelyekre az $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ polinom osztható az $x^2 + x + 1$ polinommal?*

(3 pont) Javasolta: *Kós Géza* (Budapest)

Vagyis – kicsit másképpen fogalmazva – a feladatban arra kerestük a választ, hogy van-e olyan $s(x)$ polinom, amellyel megszorozva a $q(x) = x^2 + x + 1$ polinomot olyan $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ (nem azonosan nulla) egész együtthatós polinomot kapunk, amelynek ismeretlen együtthatói páros számok.

A legtöbb megoldó „visszaszorzással” kereste az $s(x)$ polinomot – és indirekt úton mutatta meg, hogy ilyen nincs.

Többen viszont *polinomosztással* oldották meg a feladatot. Mivel a kétféle hozzáállás lényegében ugyanazt a gondolatmenetet követi, ilyen megoldást nem közöltünk, ám a polinomosztásról, illetve a feladat polinomosztással történő megoldásáról érdemes néhány szót ejteni.

A valós együtthatós polinomokra vonatkozó maradékos osztás tétel szerint minden $p(x)$ és $q(x)(\not\equiv 0)$ valós együtthatós polinomhoz pontosan egy olyan $s(x)$ és $r(x)$ ugyancsak valós együtthatós polinom létezik, amelyekre $p(x) = q(x) \cdot s(x) + r(x)$, ahol $r(x)$ vagy az azonosan nulla polinom, vagy alacsonyabb a fokszáma, mint $q(x)$-é. (Egy polinom foka a legmagasabb fokú tag kitevője, de az azonosan nulla polinom fokszámát – más konstans polinomok fokszámával ellentétben – a maradékos osztás szemszögéből nem tekintjük 0-nak.)

Esetünkben nem valós, hanem egész együtthatós polinomok körében keressük a hányadost és a maradékot, de – mint hamarosan kiderül – ez nem okoz gondot.

A polinomosztás azon alapul, hogy úgy tekinthetünk egy valós együtthatós polinomra, mintha egy x alapú számrendszerben felírt „szám" lenne, ahol a „számjegyek" – a polinom együtthatói – tetszőleges valós számok lehetnek. Az eljárás a tízes számrendszerben felírt természetes számok körében már ismert maradékos osztásához hasonlítható, ahol helyiértékcsoportról helyiértékcsoportra haladva keresünk olyan egyjegyű hányadost, hogy a maradék az osztónál kisebb nemnegatív szám legyen. A polinomosztáskor az a cél, hogy minden lépésben a maradék vagy a 0 legyen, vagy a *fokszáma* kisebb legyen az osztó fokszámánál. Bármely valós szám lehet együttható, akár negatív szám is.

Ha például a $8x^2+6x+2$ polinomot elosztjuk a $2x+6$ polinommal, akkor voltaképpen az x alapú számrendszerben felírt $862_x : 26_x$ maradékos osztást végezzük el.

Hasonlítsuk össze a tízes és az x alapú számrendszerben felírt $862:26$, illetve $862_x : 26_x$ maradékos osztást.

A tízes számrendszerben felírt maradékos osztás szerint 86-ban a 26 megvan 3-szor, mert $3\cdot 26=78$, és marad $86-78=8$. (Valójában: 860-ban a 26 megvan 30-szor, és marad 80.) $80+2=82$, 82-ben a 26 megvan 3-szor, mert $3\cdot 26=78$, és marad $82-78=4$. Tehát a hányados 33, a maradék 4.

$862:26\to 3$	$8x^2+6x+2:2x+6\to 4x$	$8\ \ 6\ \ 2:26\to 4$
$82\quad\to\ 3$	$-18x+2\quad\to\ -9$	$-18\ \ 2\quad\to\ -9$
4	56	56
maradékos osztás tízes számrendszerben	polinomosztás	osztás x alapú számrendszerben

Ezzel szemben $(8x^2+6x)$-ben a $2x+6$ megvan 4-szer ($4x$-szer), hiszen a lehető legkisebb fokszámú (vagy 0) maradékot kell kapnunk, a maradék $(8x^2+6x)-$ $-x\cdot(2x+6)=-18x$. Az osztandóhoz hosszávesszük a következő tagot: $(-18x+2)$-ben a $2x+6$ megvan (-9)-szer, mert $(-9)\cdot(2x+6)=-18x-54$, és marad $-18x+$ $+2+18x+54=56$. Tehát $s(x)=4x-9$, $r(x)=56$.

Mielőtt nekilátnánk a **B. 5360.** feladat polinomosztással történő megoldásának, tisztáznunk kell, miért nem jelent problémát, hogy az osztást valós együtthatójú polinomokon végezzük, a megoldásunkban pedig egész együtthatósak szerepelnek. Mivel $p(x)$ és $q(x)$ is egész együtthatós és $q(x)$ főegyütthatója (vagyis a legmagasabb fokú tag együtthatója) 1, így bármely részosztásban adott polinomot $q(x)$-szel osztva a hányados főegyütthatója (a hányados soronkövetkező együtthatója) az osztandó főegyütthatójával egyenlő. Mivel pedig ez minden lépésben egész szám, a maradék $(r(x))$ és a hányados $(s(x))$ is egész együtthatós polinom lesz.

Lássuk most a feladat megoldását. A kitűzött feladatban nincsenek megadva konkrétan $p(x)$ együtthatói. Kis próbálkozás és gondolkozás után viszont azt sejthetjük, hogy ilyen együtthatók nem léteznek, és az ellentmondást az együtthatók paritása okozza, ezért megpróbálkozhatunk azzal az ötlettel, hogy a polinomosztás során az együtthatóknak csak a kettes maradékával számolunk. Ez azt jelenti, hogy a páros együtthatók helyére 0-t, a páratlan együtthatók helyére 1-et írunk. A kettes maradékok körében a következő műveleti szabályok érvényesek: $0 \pm 0 = 1 \pm 1 = 0$, $0 \pm 1 = 1 \pm 0 = 1$; $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$.

Eszerint tehát $p(x)$-et: $1\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ darab}}{}_x$ alakban írhatjuk fel, míg $q(x)$ alakja 111_x.

Az osztó „háromjegyű”, ezért az osztandót „háromjegyű” részletekben tekintjük. Írjuk fel a kettes maradékos írásbeli polinomosztás első néhány lépését.

$$\begin{array}{llllllllllll}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & : 1\,1\,1 & \to 1 & & \\
 & 1 & 1 & 0 & & & & \ldots & & \to & 1 & \\
 & & 0 & 1 & 0 & & & \ldots & & \to & & 0 \\
 & & & 1 & 0 & 0 & & \ldots & & \to & & \quad 1
\end{array}$$

Vegyük észre, hogy a maradékok rendre „11”, „(0)1”, „10”, és mivel a harmadik lépésben a kiinduló „100” számot osztjuk tovább, a maradékok ismétlődnek, így az soha nem lehet nulla, vagyis ha az osztandó legalább harmadfokú, akkor eszerint nem lehet $x^2 + x + 1$ többszöröse.

Ha viszont az osztandó fokszáma legfeljebb 2, akkor az eredeti polinomnak az együtthatók paritása szerint megfelelő felírás 100_x, 10_x vagy 1, de ezek egyike sem többszöröse 111_x-nek, mert $100_x = 1 \cdot 111_x + 11_x$, a másik két esetben az osztandó eleve kisebb fokszámú, mint az osztó, így az osztási maradék egyik esetben sem 0.

Tehát nincs a feltételeknek megfelelő $s(x)$ polinom, vagyis nincsenek olyan páros a_i $(0 \leqslant i < n)$ egész együtthatók, amelyekre $x_n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ osztható az $x^2 + x + 1$ polinommal.

Fried Katalin

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (894–898.)

K. 894. Ha $\dfrac{x}{y} = \dfrac{4}{7}$ és $\dfrac{y}{z} = \dfrac{14}{3}$, akkor mennyi $\dfrac{x+y}{z}$?

K. 895. Néhány különböző pozitív prímszám összege 40. Melyek lehetnek ezek a prímek?

K. 896. Adott egy R sugarú kör. A körhöz egy külső P pontból érintőegyeneseket rajzolunk. A két egyenes által bezárt szög 60°, a kör az egyik 60°-os szögtartományba esik. Hány olyan egységsugarú kör rajzolható, amely a kör és a két egyenes közül pontosan kettőt érint, ha

a) $R = 3$; *b)* $R = 4$?

K/C. 897. Van két hatlapú dobókockánk, mindkettőn 1-től 6-ig vannak feltüntetve a számok, az egyiken a szemben lévő számok összege, míg a másikon a szemben lévő számok különbsége mindig azonos. Dobtunk mindkét dobókockával, és mindkettőn ugyanaz a szám került felülre. Mekkora lehet a nyolc oldalsó lapon lévő szám szorzatának második legkisebb és második legnagyobb értéke?

K/C. 898. Az $ABCD$ paralelogramma A-nál lévő szöge 60 fokos, $AD=20$ cm, $AB=30$ cm. Az AB szakasz B-hez közelebbi harmadolópontja E. Az ED és BC szakaszok felezőpontja rendre F és G. A DE szakasz mint átmérő fölé írt kör az FG-t H-ban metszi. Határozzuk meg a DH szakasz hosszát.

Beküldési határidő: 2026. április 10.
Elektronikus munkafüzet: https://www.komal.hu/munkafuzet

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (897–898., 1893–1897.)

Feladatok 10. évfolyamig

K/C. 897. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

K/C. 898. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

Feladatok mindenkinek

C. 1893. Hány olyan téglatest van, amelynek minden élhossza centiméterben mérve egész szám, és a térfogata 2560 cm^3? (Az egybevágó téglatesteket nem tekintjük különbözőnek.)

Javasolta: *Ujházy Márton* (Budapest)

C. 1894. Mutassuk meg, hogy ha n egész, akkor az

$$\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}+\frac{7n}{15}$$

kifejezés értéke is egész.

skót versenyfeladat

C. 1895. Egy kocka alakú kisbolygó teljes felszíne füves síkság, élei 1 km-esek. Az egyik csúcsban ki van kötve egy kecske egy $\sqrt{2}$ km hosszú kötéllel. A bolygó felszínének hányadát tudja lelegelni a kecske?

Javasolta: *Ujházy Márton* (Budapest)

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1896. Az $ABCD$ négyzet középpontja E. A D középpontú, DA sugarú, a négyzet belsejébe rajzolt negyedkör és az AB oldalra mint átmérőre, a négyzet belsejébe rajzolt félkör A-tól különböző közös pontja F. Az EF egyenes az AB egyenesét az M, a DA oldalra kifelé rajzolt félkört az N pontban metszi. Igazoljuk, hogy az F pont felezi az MN szakaszt.

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

C. 1897. Egy szabályos n-szög csúcsai közül kiválasztunk három csúcsot úgy, hogy bármely három csúcs kiválasztása egyenlően valószínű. Igazoljuk, hogy ha n páros, akkor háromszor akkora eséllyel lesz a csúcsok alkotta háromszög tompaszögű, mint hegyesszögű.

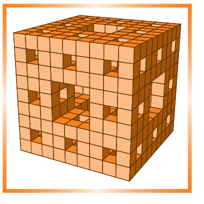
Javasolta: *Ujházy Márton* (Budapest)

❄

Beküldési határidő: 2026. április 10.
Elektronikus munkafüzet: https://www.komal.hu/munkafuzet

❄

A B pontversenyben kitűzött feladatok (5518–5525.)



B. 5518. Legyenek n és k pozitív egészek. A derékszögű koordináta-rendszerben a $(0;0)$, $(n;0)$, $(k;1)$ és $(0;1)$ pontok által meghatározott rácstrapézt hányféleképpen lehet 1/2 területű rácsháromszögekre bontani? (Egy sokszöget akkor nevezünk rácssokszögnek, ha csúcsainak mindkét koordinátája egész.)

(3 pont) Javasolta: *Sztranyák Attila* (Budapest)

B. 5519. Viktor rajzolt egy egységnyi területű paralelogrammát. Bálint megmérte egy oldalát és egy átlóját. Legalább mekkora a két megmért szakasz összege?

(3 pont) Javasolta: *Hujter Bálint* (Budapest)

B. 5520. Adott a síkon két kör egymáson kívül, továbbá egy d_1 és egy d_2 hosszúságú szakasz. Hány olyan egyenes létezik, amely az első körből d_1, a másodikból d_2 hosszúságú húrt metsz ki?

(4 pont) Javasolta: *Kiss Géza* (Csömör)

B. 5521. Adott egy k pozitív egész. Határozzuk meg az összes olyan pozitív egész n-et, amelyre $\dfrac{(2^k n)!}{(n!)^{2^k}}$ prímtényezős felbontásában a 2 kitevője pontosan 2^k-1.

(5 pont) *Bertalan Zoltán* (Békéscsaba) javaslata alapján

B. 5522. Van-e olyan pozitív egész számokból álló $a_1, a_2, \ldots$ sorozat és N pozitív egész, hogy minden $n \geqslant N$ esetén $a_n < a_{n+1} < a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ és $a_{n+1} \mid a_1 + a_2 + \ldots + a_n$?

(5 pont) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

B. 5523. Legfeljebb hány különböző egész gyöke lehet az egész együtthatós $p(x) = a_{12}x^{12} + a_{11}x^{11} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ polinomnak, ha

$$a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12} = 0 \quad \text{és} \quad a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11} = 12?$$

(5 pont) Javasolta: *Sztranyák Attila* (Budapest)

B. 5524. Az ABC háromszögben F a BC oldal felezőpontja. Egy egyenes az AB, AC, AF szakaszokat rendre az X, Y, Z pontokban metszi. Bizonyítsuk be, hogy

$$AB \cdot AX + AC \cdot AY > 2AF \cdot AZ.$$

(6 pont) Javasolta: *Szakács Ábel* (Budapest)

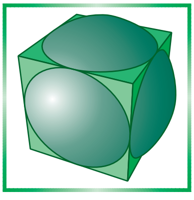
B. 5525. Egy T tetraéder e élére definiáljuk az $r(e)$ mennyiséget mint az e két csúcsából induló magasságvonalak távolságának és az e él hosszának arányát. Adjuk össze az $r(e)$ mennyiségeket T minden élére, így kapjuk az $R(T)$ számot. Adjunk példát olyan T tetraéderre, amelyre $R(T) > 5{,}999$.

(6 pont) *Bertalan Zoltán* (Békéscsaba) ötletéből

❄

Beküldési határidő: 2026. április 10.
Elektronikus munkafüzet: https://www.komal.hu/munkafuzet

❄



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (929–931.)

A. 929. Legyen $\mathcal{P}$ egy tízelemű ponthalmaz a síkon. Egy $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ ponthalmazra azt mondjuk, hogy *izolálható*, ha létezik olyan pozitív egész sugarú zárt körlap, amely $\mathcal{Q}$ pontjait tartalmazza, de $\mathcal{P} \setminus \mathcal{Q}$ pontjait nem. Bizonyítsuk be, hogy $\mathcal{P}$ ötelemű részhalmazainak legalább harmada nem izolálható.

Javasolta: *Bán-Szabó Áron* (Palaiseau)

A. 930. Létezik-e olyan tetraéder, amelyben a lapok beírt köreinek középpontjai egy síkba esnek?

Javasolta: *Moussong Gábor* (Budapest)

A. 931. Igazoljuk, hogy ha $k>10$ és $n>k^4$ egész számok, akkor az

$$(n+1^2),(n+2^2),(n+3^2),\ldots,(n+k^2)$$

számok közül legalább egynek van k-nál nagyobb prímosztója.

Javasolta: *Kós Géza* (Budapest)

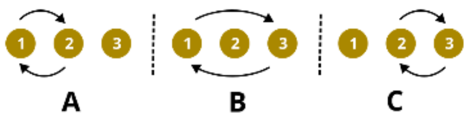
❄

Beküldési határidő: 2026. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Informatikából kitűzött feladatok (691–694.)

I. 691. Ismert játék az „Itt a piros, hol a piros”, amelyben egy piros labdácskát három átlátszatlan, szájával lefordított pohár egyike alá tesznek, majd a lefordított poharakat villámgyorsan cserélgetik. A csere a poharak csúsztatásával történik, tehát a labda mindig az őt fedő pohár alatt marad. A játék célja a labdácska helyének megadása a cserélgetések után. Az eredeti, 3 poharas játék esetén 3-féle csere lehetséges a pohárpárok között.



A játékot általánosítsuk 2–7 pohárra. A cserék jelöléséhez használt betűk kiosztása a pohár helyéből alkotott kétjegyű számok emelkedő sorrendjében történik. Például 4 pohár esetén a betűk: `A: 1-2`, `B: 1-3`, `C: 1-4`, `D: 2-3`, `E: 2-4`, `F: 3-4` poharak cseréjét jelölik. Kezdéskor a labdácska mindig az első helyen lévő pohár alatt van.

Készítsünk programot, amely az `N` poharú játék esetén a betűsorozattal jelölt cserék után megadja, hogy hol van a labdácska.

A program standard bemenetének első sorában a poharak száma `N` ($2\leqslant$ `N` $\leqslant 7$) szerepel. A következő sorban az `S` ($1\leqslant$ `S` $\leqslant 200$) hosszú karakterlánc a cserék lépéseit írja le.

A programmal a standard kimenetre írjuk ki, hogy a cserék végrehajtása után hányas sorszámú helyen lesz a labdácska.

Minta:

Bemenet:	Kimenet:
4 CEABFCEB	3

Beküldendő egy tömörített *i691.zip* állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely tartalmazza a megoldás rövid leírását, és megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

(10 pont)

I. 692. Egy munkahelyen összeírták, hogy egy adott évben a dolgozók mikorra tervezik a szabadságukat. Mindenki megadta, hogy az év hányadik napjától hányadik napig tervezi, hogy nem fog dolgozni.

A munkahely vezetője azt kéri, hogy adjuk meg program segítségével azt a leghosszabb időszakot, amelyben a dolgozók szabadságolási időszakaszai olyan sorozatot alkotnak, amelyben minden időszak tartalmazza a sorban utána következő időszakot. Tehát határozzuk meg, hogy melyik az a leghosszabb szabadságidőszak, amely ideje alatt egy másik kolléga is kiveszi a szabadságát, esetleg az ő szabadsága alatt egy harmadik is és így tovább. Fontos kérdés még a vezető számára, hogy ebben a leghosszabb időszakban maximum hány dolgozó lesz egyszerre szabadságon. Készítsük el a programot, amely a vezető kérdéseire választ ad.

A program standard bemenetének első sorában a szabadságolási terv időszakaszainak száma `N` ($1 \leqslant \mathtt{N} \leqslant 1000$) van. A következő `N` sor mindegyikében egy-egy szabadság időszakának kezdő és befejező napja, `E` és `V` egész szám ($1 \leqslant \mathtt{E} < \mathtt{V} \leqslant 365$) található.

A programmal a standard kimenetre írjuk ki a leghosszabb – a fenti feltételeknek megfelelő – időszakban az egymásba ágyazódó szabadságok maximális `K` elemszámát, majd a következő `K` sorban az egymásba ágyazódó időszakokat.

Minta:

Bemenet:	Kimenet:
6 23 40 18 30 23 43 38 43 40 48 30 40	3 23 43 23 40 30 40

Beküldendő egy tömörített *i692.zip* állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely tartalmazza a megoldás rövid leírását, és megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

(10 pont)

I. 693. Ez a feladat az előző tanévben elkezdett és az ebben a tanévben folytatott prímekkel kapcsolatos sorozat (**I. 633.**; **I. 641.** és **I. 661.**, illetve **I. 673.**) ötödik része. Most az alábbi speciális prímeket keressük az 1 000 000-nál nem nagyobb prímszámok között: *csillagprímek*, *faktoriális prímek*, *permutálható prímek*, *teljes prímek* és a *Woodall-prímek*. Lássuk e prímcsoportok definícióját:

Csillagprímeknek *nevezzük a* $6n(n-1)+1$ *alakú prímszámokat.* Például $n=10$-nél $6\cdot 10\cdot 9+1=541$, ami prím.

Faktoriális prímek *az* $n!\pm 1$ *alakú prímszámok.* Például a $7!-1=5039$ ilyen prím.

Permutálható prímeknek *nevezzük az olyan tízes számrendszerben vett számokat, ahol a számjegyek minden permutációja prímszám.* Például ilyen prím a 199, hiszen a 199 mellett a 919 és a 991 is prím.

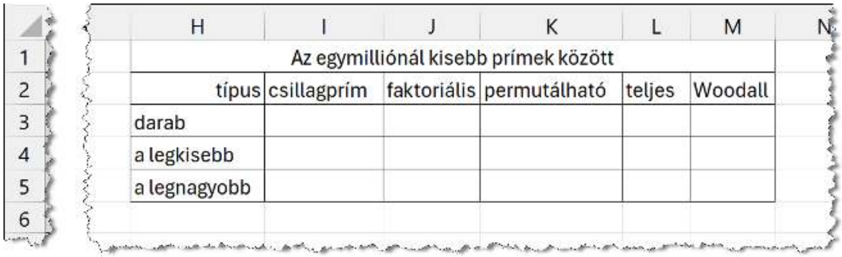
Teljes prímeknek, *más néven Bölcsföldi–Birkás–Ferenczi prímeknek nevezzük a tízes számrendszerben azokat a prímszámokat, amelyeknek minden számjegye prím, és számjegyeinek száma is prím.* Például a 523 ilyen prím.

Woodall-prímeknek *nevezzük az* $n\cdot 2^n-1$ *alakú prímszámokat.* Például $n=6$ esetén a 383 prímszám.

1. Készítsünk egy táblázatkezelő munkafüzetben prímek néven munkalapot, és munkánkat mentsük *prim_5* néven a táblázatkezelő program alapértelmezett formátumában.
2. Illesszük be az *A3* cellától a *primek1000000ig.txt* fájlból az 1 000 000 alatti prímek listáját. Az első két sorban oszlopfeliratokat készíthetünk a számításokhoz.
3. Válogassuk ki az öt prímcsoport tagjait az 1 000 000-nál nem nagyobb prímek közül. A számításokat ezen a munkalapon végezzük.
4. Hozzunk létre egy *eredmények* nevű munkalapot, amelynek *A* oszlopának celláit töltsük fel 1-től egész számokkal addig, amennyi a speciális prímszámok darabszámának maximuma. A következő oszlopokban határozzuk meg minden prímszámtípusnál helykihagyás nélkül, növekvő sorrendben:
   a. a *B* oszlopban a csillagprímeket;
   b. a *C* oszlopban a faktoriális prímeket;
   c. a *D* oszlopban a permutálható prímeket;
   d. az *E* oszlopban a teljes prímeket;
   e. az *F* oszlop celláiba pedig a Woodall-prímeket.
5. A munkalap adattartományát formázzuk a minta szerint!

	A	B	C	D	E	F
1	1	13	2	2	23	7
2	2	37	3	3	37	23
3	3	73	5	5	53	383

6. Készítsük el az *eredmények* munkalapon az adott helyre a mintán látható táblázatot.



Az egymilliónál kisebb prímek között					
típus	csillagprím	faktoriális	permutálható	teljes	Woodall
darab					
a legkisebb					
a legnagyobb					

7. Számítsuk ki és jelenítsük meg a hiányzó adatokat.
8. Mindkét munkalapon cseréljük le oszloponként az első 99 sor utáni képleteket az értékükre.

Segédszámításokat a prímek munkalapon végezhetünk. A megoldásban saját függvény vagy makró nem használható.

Beküldendő az *i693.zip* tömörtett állományban a munkafüzet az eredeti nevén xlsb formátumban (bináris munkafüzetként) és egy rövid dokumentáció, amelyben szerepel a kiválogatások módszere, a táblázatkezelő neve és verziószáma.

Letölthető állomány: *primek1000000ig.txt*

(10 pont)

I. 694. Sokaknak okoz fejfájást az alábbihoz hasonló másodfokú egyenlőtlenségek megoldása:

$$\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \geqslant \frac{1}{3}.$$

Pedig ezek nem is olyan nehéz feladatok, hiszen nullára rendezve egy tört előjelét kell megvizsgálni, amikor a tört számlálója és nevezője is legfeljebb másodfokú kifejezés.

Nézzük meg egy, már nullára rendezett konkrét példán a megoldást.

$$\frac{x^2-2x+1}{x^2-7x+10} < 0.$$

A számlálóból alkotott egyenletnek egy megoldása van, $x=1$, a nevezőből alkotott egyenletnek kettő, $x_1=2$ és $x_2=5$.

A számláló és a nevező mint függvény grafikonja egyaránt felfelé nyíló parabola, a gyökök közötti függvényértékek negatívak, a kisebb gyöknél kisebb és a nagyobb gyöknél nagyobb értékek esetén pozitívak. Foglaljuk táblázatba:

	$x<1$	$x=1$	$1<x<2$	$x=2$	$2<x<5$	$x=5$	$x>5$
a számláló előjele	pozitív	0	pozitív	pozitív	pozitív	pozitív	pozitív
a nevező előjele	pozitív	pozitív	pozitív	0	negatív	0	pozitív
a tört előjele	pozitív	0	pozitív	$2\notin$É.T.	negatív	$5\notin$É.T.	pozitív

A táblázatból kiolvasható, hogy a fenti egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $x \in$ $\in\ ]2;5[$.

Általánosítsuk:

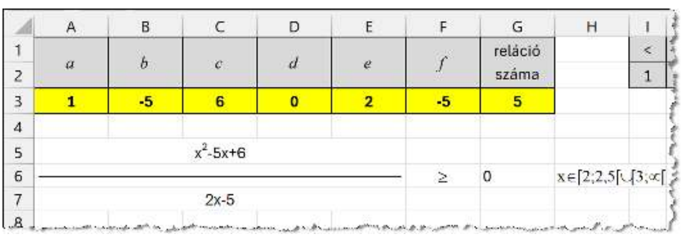
$$\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f} \text{ relációjel } 0.$$

A relációjel lehet: $<$, $\leqslant$, $=$, $\neq$, $\geqslant$ vagy $>$.

1. Nyissunk meg egy üres táblázatkezelő munkafüzetet és a munkafüzet kapja a *tort*, a munkalap a *szamol* nevet.
2. Készítsük el az első három sor celláinak tartalmát és formátumát a minta szerint.

3. Ha az *A3:F3* cellákba begépeljük az együtthatókat, a *G3* cellába a megfelelő relációjel kódját, akkor az *A5:G7* tartomány celláiban jelenjen meg a reláció a minta szerint.

4. Számítsuk ki a számláló és a nevező zérushelyeit, amennyiben vannak.
5. Készítsük el egy új, `kiértékelő` nevű munkalapra a kiértékelő táblázatot és a *szamol* munkalap *H6*-os cellájába az egyenlőtlenség megoldását.

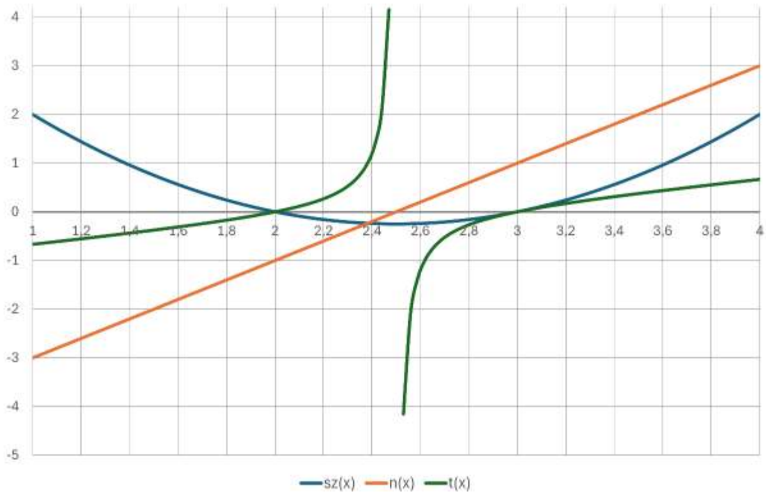


6. Készítsünk értéktáblázatot az 1. sorbeli feliratokkal (`x`, `sz(x)`, `n(x)` és `t(x)`). Az ábrázolási tartománya a zérushelyek minimumánál és maximumánál legyen egy-egy egységgel kisebb és nagyobb. Az x értékek lépésköze legyen egyenletes, és töltse fel az *A2:A102* tartományt.

	A	B	C	D
1	x	sz(x)	n(x)	t(x)
2	1	2	-3	-0,66667
3	1,03	1,9109	-2,94	-0,64997

	A	B	C	D
100	3,94	1,8236	2,88	0,633194
101	3,97	1,9109	2,94	0,649966
102	4	2	3	0,666667
103				
104				

7. Számítsuk ki a *B2:B102* tartományban a számláló adott x-hez tartozó értékeit.
8. Számítsuk ki a *C2:C102* tartományban a nevező adott x-hez tartozó értékeit.
9. Számítsuk ki a *D2:D102* tartományban a tört adott x-hez tartozó értékeit.
10. Egy új, diagram típusú munkalapon ábrázoljuk a számláló és a nevező, továbbá a törtfüggvény grafikonját az adott tartományon.



Segédszámításokat a *szamol* munkalapon a 8. sor alatt végezhetünk. A megoldásban saját függvény vagy makró nem használható.

Beküldendő egy tömörített *i694.zip* állományban a *tort* néven mentett táblázatkezelő munkafüzet, egy rövid dokumentációban pedig a táblázatkezelő neve és verziószáma.

(10 pont)

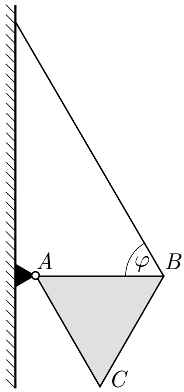
❄

Beküldési határidő: 2026. április 15.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Fizika gyakorlatok megoldása

G. 907. *Az egyenletes tömegeloszlású, $m=0{,}7$ kg tömegű, ABC szabályos háromszög alakú lemez A csúcsa az* ábra *szerint csuklóval csatlakozik a függőleges falhoz. A háromszög vízszintes AB oldalának B végpontját egy fonál köti össze a fallal. A fonál a vízszintessel $\varphi=60°$-os szöget zár be.*



a) *Mekkora erő ébred a fonálban?*

b) *Mekkora nagyságú, és milyen irányú erővel terheli a háromszöglemez a csuklót?*

(4 pont) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

I. megoldás. *a)* A lemezre ható forgatónyomatékok eredője – bármely pontra vonatkoztatva – nulla. Írjuk fel a forgatónyomaték-egyenletet az A pontra vonatkoztatva. Az ebben a pontban ébredő erőnek nincs forgatónyomatéka, így azt az *1. ábrán* fel sem tüntettük.

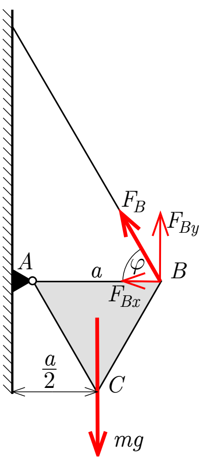
A fonálban csak fonálirányú erő hathat, ezt komponensekre bontjuk: csak az $F_{By}=F_B\sin\varphi$ függőleges komponensnek van az A pontra vonatkoztatva forgatónyomatéka. Az egyenlet:

$$F_{By}a=mg\frac{a}{2},$$

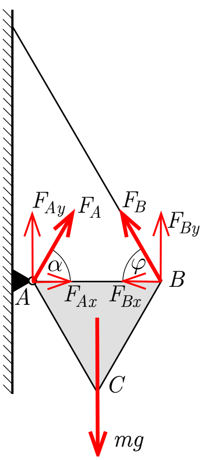
amiből a fonálban ébredő erő:

$$F_B=\frac{F_{By}}{\sin\varphi}=\frac{mg}{2\sin\varphi}\approx 4\text{ N}.$$

b) Az A pontban ható erő nagyságát és irányát a vízszintes és függőleges erők egyensúlya alapján határozzuk meg. A *2. ábrára* berajzoltuk a lemezre ható mindhárom erőt, a fonálerő és a csuklóban fellépő erő komponenseit is.



1. ábra



2. ábra

Az erőegyensúly:

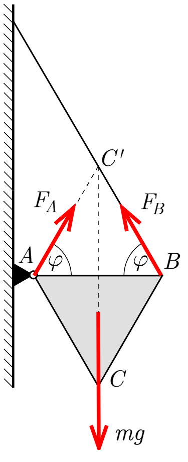
$$F_{Ax}=F_{Bx},$$
$$F_{Ay}+F_{By}=mg,$$

amiből az előző rész eredményét is felhasználva:

$$F_{Ay} = F_{By} = \frac{mg}{2},$$
$$F_A = F_B \approx 4\ \mathrm{N},$$
$$\alpha = \varphi = 60^\circ.$$

A lemez a csuklót az F_A erő ellenerejével terheli.

Csikós Attila (Budapest, Városmajori Gimn., 9. évf.)



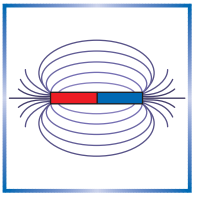
3. ábra

II. megoldás. A lemezre három erő hat: a nehézségi erő, a fonálerő és a csuklóerő. Ezek eredője egyensúly esetén nulla, valamint a három erő hatásvonalának egy ponton kell átmennie. (Ha ez nem így lenne, akkor bármely két erő hatásvonalának metszéspontjára vonatkoztatva a harmadik erő eredő forgatónyomatékot képezne.) A *3. ábráról* láthatjuk, hogy a három erő metszéspontja a C' pont, ami tükörszimmetrikus az AB szakaszra. A szimmetriából következik, hogy a fonálerő és a csuklóerő egyforma nagy, és mindkettő $\varphi = 60^\circ$-os szöget zár be az AB szakasszal.

Mindkét erő nagysága

$$\frac{mg}{2\sin\varphi} = \frac{mg}{\sqrt{3}} \approx 4\ \mathrm{N}.$$

40 dolgozat érkezett. Helyes 14 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 18, hiányos (1–2 pont) 6, hibás 2 dolgozat.



Fizika feladatok megoldása

P. 5674. *Egy hőerőgép egy C hőkapacitású, kezdetben T hőmérsékletű test és egy állandó T_0 hőmérsékletű, nagy méretű hőtartály között üzemel.*

Vizsgáljuk a következő két esetet: $T = T_0 + \Delta T$ és $T = T_0 - \Delta T$. Melyik esetben nyerhetünk több munkát?

(5 pont) Példatári feladat nyomán

I. megoldás. A maximális, reverzibilis folyamatban működő gép (Carnot-gép) által végzett munka a hatásfok folyamatos változása miatt mindkét esetben integrálással fejezhető ki.

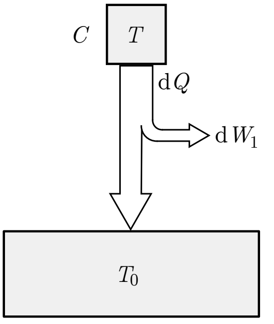
1. eset: $T = T_0 + \Delta T$ (a test melegebb, *1. ábra*).

A pillanatnyi hatásfok:

$$\eta(T) = 1 - \frac{T_0}{T}.$$

A test által leadott kicsiny hőmennyiség $\mathrm{d}Q = -C\mathrm{d}T$, így az eközben végzett elemi munka:

$$\mathrm{d}W = \eta \mathrm{d}Q = -C\left(1 - \frac{T_0}{T}\right)\mathrm{d}T.$$



1. ábra

Ezt integrálva $T_0 + \Delta T$-től T_0-ig:

$$W_1 = -C\int_{T_0+\Delta T}^{T_0}\left(1 - \frac{T_0}{T}\right)\mathrm{d}T = CT_0\left(\frac{\Delta T}{T_0} - \ln\left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right)\right).$$

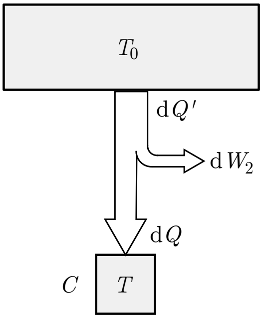
2. eset: $T = T_0 - \Delta T$ (a test hidegebb, *2. ábra*).

Ekkor a hőtartály a meleg oldal (T_0 hőmérsékleten) és a test a hideg (T, változó hőmérsékleten). Reverzibilis folyamat esetén:

$$\frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}Q} = \frac{T_0}{T},$$

ahol $\mathrm{d}Q'$ a hőtartály által leadott, $\mathrm{d}Q = C\mathrm{d}T$ pedig a test által felvett kicsiny hőmennyiség. A kettő különbsége az elemi munkavégzés:

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}Q' - \mathrm{d}Q = C\left(\frac{T_0}{T} - 1\right)\mathrm{d}T.$$



2. ábra

Ezt integrálva $T_0 - \Delta T$-től T_0-ig:

$$W_2 = C\int_{T_0-\Delta T}^{T_0}\left(\frac{T_0}{T} - 1\right)\mathrm{d}T = CT_0\left(-\frac{\Delta T}{T_0} - \ln\left(1 - \frac{\Delta T}{T_0}\right)\right).$$

Összehasonlítás: Vezessük be az $\varepsilon = \frac{\Delta T}{T_0}$ jelölést. Ekkor a két munka különbsége:

$$W_2 - W_1 = CT_0\left(\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} - 2\varepsilon\right) = 2CT_0(\operatorname{artanh}\varepsilon - \varepsilon).$$

Mivel $\operatorname{artanh}\varepsilon = \varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{3} + \cdots > \varepsilon$, ezért $W_2 > W_1$. Tehát több munka nyerhető *a második esetben*, amikor a test kezdetben hidegebb ($T = T_0 - \Delta T$).

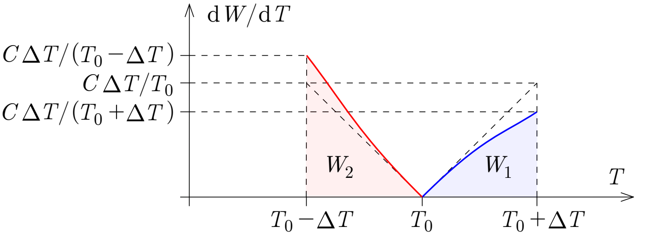
Megjegyzés. $\Delta T \ll T_0$ esetén a közelítő alakok:

$$\frac{W_1}{CT_0} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta T}{T_0}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta T}{T_0}\right)^3$$
$$\frac{W_2}{CT_0} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta T}{T_0}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta T}{T_0}\right)^3,$$

így a különbség csak a harmadrendű tagtól kezdve jelentkezik.

Erdélyi Dominik (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

II. megoldás. Az összehasonlítás az integrálok kiszámítása nélkül is elvégezhető. Az integrálást mindkét esetben egy ΔT hosszúságú intervallumon kellene végezzük: az egyik esetben T_0-ról indulva $T_0 + \Delta T$-ig, a másik esetben $T_0 - \Delta T$-ről indulva T_0-ig (*3. ábra*).



3. ábra

Hasonlítsuk össze a két integrandust! Az első esetben

$$T_0 \leqslant T \leqslant T_0 + \Delta T \quad \Rightarrow \quad T = T_0 + \delta T,$$

míg a második esetben

$$T_0 - \Delta T \leqslant T \leqslant T_0 \quad \Rightarrow \quad T = T_0 - \delta T,$$

ahol $0 \leqslant \delta T \leqslant \Delta T$. Ez alapján (a C konstanst mindkét esetben elhagyva):

$$1 - \frac{T_0}{T} = 1 - \frac{T_0}{T_0 + \delta T} = \frac{\delta T}{T_0 + \delta T} \leqslant \frac{\delta T}{T_0 - \delta T} = \frac{T_0}{T_0 - \delta T} - 1 = \frac{T_0}{T} - 1,$$

azaz a második esetben az integrandus mindig nagyobb (az intervallum szélén pedig egyenlő). Tehát – az I. megoldásban szereplő érveléssel összhangban – a *második* esetben nyerhető több munka.

17 dolgozat érkezett. Helyes 5 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 3, hiányos (1–3 pont) 6, hibás 3 dolgozat.

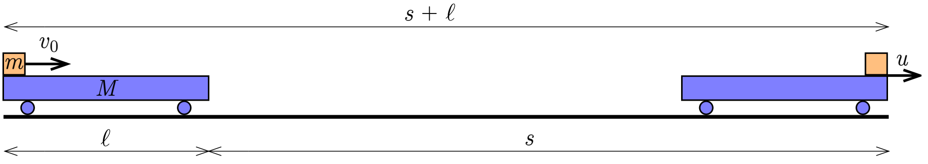
P. 5679. *Vízszintes talajon súrlódásmentesen mozoghat egy M tömegű, lapos felületű, kezdetben álló kiskocsi, amelynek egyik végén egy $m = M/2$ tömegű, kicsiny hasáb helyezkedik el. A kiskocsi* $\ell = 24$ cm *hosszú, a rajta lévő hasáb és a kiskocsi között a súrlódási együttható* $\mu = 0{,}2$.

a) *Legfeljebb mekkora v_0 sebességgel lökhetjük meg a kicsiny hasábot, hogy ne essen le a kiskocsiról?*

b) *Mekkora lesz a kiskocsi és a hasáb sebessége abban a pillanatban, amikor a hasáb lerepül a kiskocsiról, ha $v_1 = 2v_0$ sebességgel lökjük meg a hasábot?*

(4 pont) Közli: *Wiedemann László,* Budapest

I. megoldás. *a)* A testek helyzete a mozgás kezdetekor és a közös mozgás elérésekor az *ábrán* látható.



Eközben a rendszerre nem hat vízszintes külső erő, így alkalmazható a lendületmegmaradás törvénye:

$$mv_0 = (m+M)u,$$

amiből

$$u = \frac{m}{m+M}v_0 = \frac{1}{3}v_0.$$

A munkatétel szerint a rendszer mozgási energiáját a súrlódási munka csökkenti:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \mu mg\ell = \frac{1}{2}(m+M)u^2,$$

amiből u kifejezését (és $M = 2m$-et) behelyettesítve, majd rendezve:

$$v_0 = \sqrt{3\mu\ell g} \approx 1{,}2\ \mathrm{m/s}.$$

Megjegyzés. A súrlódási munkát a súrlódási erő és a *relatív* elmozdulás szorzataként kaptuk meg. Ugyanerre az eredményre jutunk, ha a súrlódási erő munkáját mindkét testre kiszámítjuk, és ezeket összeadjuk. A súrlódási erő a kocsit s úton gyorsítja, a kis testet pedig $s+\ell$ úton fékezi:

$$W_\mathrm{s} = \mu mgs - \mu mg(s+\ell) = -\mu mg\ell.$$

b) Ismét felírhatjuk a lendület megmaradását:

$$mv_1 = mu_2 + Mv_2,$$
$$2mv_0 = mu_2 + 2mv_2,$$
$$u_2 = 2(v_0 - v_2). \qquad (1)$$

A munkatétel ebben az esetben:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \mu mg\ell = \frac{1}{2}mu_2^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2,$$
$$2v_0^2 - \mu\ell g = \frac{1}{2}u_2^2 + v_2^2.$$

Felhasználva (1)-et, majd behelyettesítve az előző részben v_0-ra kapott eredményt:

$$2v_0^2-\mu\ell g=2v_0^2-4v_0v_2+2v_2^2+v_2^2,$$
$$3v_2^2-4v_0v_2+\mu g\ell=0,$$
$$3v_2^2-4\sqrt{3\mu\ell g}v_2+\mu\ell g=0.$$

A másodfokú egyenlet fizikailag értelmes megoldása megadja a kocsi sebességét a kis test leesésének pillanatában:

$$v_2=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)\sqrt{\mu\ell g}\approx 0{,}11\ \mathrm{m/s}.$$

(A másik megoldásból a kis testre negatív sebesség adódna, ami nem lehetséges.) A kis test sebessége ebből (1) alapján:

$$u_2=2(v_0-v_2)=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+2\right)\sqrt{\mu\ell g}\approx 2{,}2\ \mathrm{m/s}.$$

Bús László Teodor (Ceglédi Kossuth L. Gimn., 12. évf.)

II. megoldás. *a)* A kocsit az $mg\mu$ súrlódási erő gyorsítja:

$$Ma_0=mg\mu,$$

amiből

$$a_0=\frac{mg\mu}{M}=\frac{\mu}{2}g.$$

A kocsival együtt mozgó (a_0 gyorsulással gyorsuló) vonatkoztatási rendszerben a kis test mozgásegyenlete (figyelembe véve a $-ma_0$ tehetetlenségi erőt is):

$$ma_{\mathrm{rel}}=-mg\mu-ma_0,$$

amiből (az a_0-ra kapott eredményt felhasználva):

$$a_{\mathrm{rel}}=-\left(1+\frac{m}{M}\right)\mu g=-\frac{3\mu}{2}g.$$

A kis test v_0 kezdősebességről indulva ekkora (negatív) gyorsulással ℓ úton áll meg, amiből:

$$v_0=\sqrt{2\ell|a_{\mathrm{rel}}|}=\sqrt{2\ell\left(1+\frac{m}{M}\right)\mu g}=\sqrt{3\mu\ell g}\approx 1{,}2\ \mathrm{m/s}.$$

b) A $v_1=2v_0$ kezdősebesség esetében a mozgást ismét a kocsival együtt mozgó vonatkoztatási rendszerben vizsgáljuk. A kis test relatív gyorsulása megegyezik az előző részben meghatározott a_{rel} értékkel. Ez alapján a mozgás idejére egy másodfokú egyenletet írhatunk fel:

$$\ell = v_1 t + \frac{a_{\mathrm{rel}}}{2} t^2,$$
$$\ell = 2v_0 t - \frac{3\mu g}{4} t^2,$$

amelynek a fizikailag értelmes megoldása v_0 kifejezését felhasználva:

$$t = \left(\frac{4}{\sqrt{3}} - 2\right)\sqrt{\frac{\ell}{\mu g}} \approx 0{,}11\ \mathrm{s}.$$

Ebből a kis test lerepülésekor a kocsi végsebessége:

$$v_2 = a_0 t = \frac{\mu}{2} g t = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)\sqrt{\mu \ell g} \approx 0{,}11\ \mathrm{m/s},$$

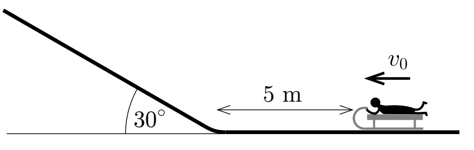
a kis test földhöz viszonyított sebessége pedig (felhasználva, hogy a kis test földhöz viszonyított gyorsulása $a = -\mu g$):

$$u_2 = v_1 + at = 2v_0 - \mu g t = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 2\right)\sqrt{\mu \ell g} \approx 2{,}2\ \mathrm{m/s}.$$

Zádori Gellért (Szegedi Radnóti M. Kísérleti Gimn., 12. évf.)

42 dolgozat érkezett. Helyes 26 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 6, hiányos (1–2 pont) 8, hibás 1, nem értékelt 1 dolgozat.

P. 5680. *Amikor a* 30°*-os hajlásszögű, vízszintes síkban folytatódó domboldalt mindenütt hó borította, Peti szokatlan módját választotta a szánkózásnak: az emelkedő aljától számított* 5 m *távolságból különböző kezdősebességgel indult el.*



a) *Mekkora kezdősebesség esetében áll meg leghamarabb a szánkó?*

b) *Milyen hosszú utat tett meg felfelé az emelkedőn ebben az esetben a szánkó?*

A szánkó pályája egybeesett a domboldal esésvonalával. A lejtő töréspontmentesen csatlakozik a vízszintes felülethez. A szánkó és a hó között a súrlódás elhanyagolható.

(4 pont) Tornyai Sándor fizikaverseny, Hódmezővásárhely

Megoldás. *a)* A síkon Peti v_0 sebességgel a $d=5$ m utat

$$t_1=\frac{d}{v_0}$$

idő alatt teszi meg. Az $\alpha=30^\circ$ hajlásszögű emelkedőn a lassulásának nagysága:

$$|a|=g\sin\alpha=\frac{g}{2},$$

így a lejtőn a megállásig

$$t_2=\frac{v_0}{|a|}=\frac{2v_0}{g}$$

ideig fog mozogni. A teljes mozgási idő $t=t_1+t_2$, azt keressük, hogy ez milyen kezdősebesség esetén minimális. Ezt legegyszerűbben a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséggel kaphatjuk meg:

$$t=\frac{d}{v_0}+\frac{2v_0}{g}\geqslant 2\sqrt{\frac{d}{v_0}\,\frac{2v_0}{g}}=2\sqrt{\frac{2d}{g}}\approx 2\text{ s}.$$

A minimális idő akkor valósul meg, amikor az egyenlőség áll fenn:

$$\frac{d}{v_0}=\frac{2v_0}{g},$$

amiből a keresett kezdősebesség:

$$v_0=\sqrt{\frac{gd}{2}}\approx 5\text{ m/s}.$$

b) Az emelkedőn Peti a v_0 kezdősebességről a megállásig lassulva

$$s=\frac{v_0^2}{2|a|}=\frac{v_0^2}{g}=\frac{d}{2}=2{,}5\text{ m}$$

utat tesz meg.

Bense Tamás (Budapest V. Ker. Eötvös J. Gimn., 10. évf.)

Megjegyzés. A *b)* kérdésre a választ egyszerűbben megkaphatjuk, ha észrevesszük, hogy a minimális idő esetében Peti ugyanannyi ideig mozog a síkon, mint a lejtőn, csak éppen fele akkora átlagsebességgel. Ebből $s=\frac{d}{2}=2{,}5$ m, az előző megoldással összhangban.

53 dolgozat érkezett. Helyes 32 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 15, hiányos (1–2 pont) 4, hibás 2 dolgozat.

P. 5682. *Egy R sugarú, H magasságú hengerben folyadék van. A hengert a tengelye körül forgásba hozzuk. A forgás szögsebességét lassan növeljük egészen addig, amíg a folyadék széle felhúzódik egészen az edény szájáig. Ekkor a pohár aljának közepéről éppen „eltűnik” a folyadék.*

a) *Mekkora az edény legnagyobb szögsebessége?*

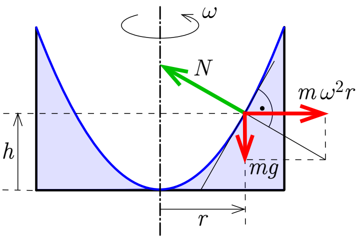
b) *Milyen magasan áll a folyadék a hengerben induláskor?*

(5 pont) Közli: *Simon Péter,* Pécs

Megoldás. *a)* Tegyük fel, hogy a henger ω szögsebességgel forog, és a víz formája a feladatnak megfelelő. Nyilván a víz felszíne forgásszimmetrikus, tehát bármely, a henger forgástengelyén áthaladó keresztmetszet ugyanolyan formájú lesz. Legyen valamely keresztmetszet felszínének az egyenlete $h(r)$, ahol $r=0$ a forgástengely és $h=0$ a henger alaplapja.

Vegyünk egy m tömegű vízrészecskét a felszínen, amely x távolságra van a forgástengelytől. A forgó hengerhez rögzített vonatkoztatási rendszerben erre a részecskére hat az mg nagyságú, függőleges irányú nehézségi erő, az $m\omega^2 r$ nagyságú, vízszintes irányú centrifugális erő (tehetetlenségi erő), és egy, a folyadék felületére merőleges irányú nyomóerő (*1. ábra*). Ahhoz, hogy a részecske egyensúlyban legyen, a nehézségi erő és a centrifugális erő vektoriális összegének merőlegesnek kell lennie a felületre.

A felület meredeksége $h'(r)$, amiből



1. ábra

(1) $$h'(r)=\frac{m\omega^2 r}{mg}=\frac{\omega^2}{g}r,$$

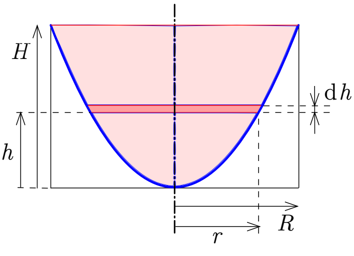
(2) $$h(r)=\frac{\omega^2}{2g}r^2+c,$$

ahol $h(0)=0$ alapján az integrációs állandó $c=0$. Ezen kívül a feladat szövege alapján $h(R)=H$, amiből:

$$\omega=\frac{\sqrt{2gH}}{R}.$$

b) Határozzuk meg a folyadékból hiányzó forgási paraboloid V térfogatát! Ehhez osszuk fel a testet $\mathrm{d}h$ magasságú henger alakú szeletekre (*2. ábra*).

A h magasságban lévő szelet sugara (2) alapján:



2. ábra

$$r(h)=\frac{\sqrt{2gh}}{\omega},$$

térfogata pedig:

$$\mathrm{d}V=\frac{2gh}{\omega^2}\pi\,\mathrm{d}h.$$

A keresett térfogat integrálással határozható meg:

$$V=\frac{2g\pi}{\omega^2}\int_0^H h\,\mathrm{d}h=\frac{gH^2\pi}{\omega^2}=\frac{HR^2\pi}{2}.$$

(Az utolsó lépésben ω előző részben megkapott kifejezését helyettesítettük be.) A teljes henger térfogata $HR^2\pi$, tehát a forgási paraboloid térfogatának kétszerese. Így a folyadék térfogata megegyezik a forgási paraboloid V térfogatával, amiből a folyadék magassága induláskor:

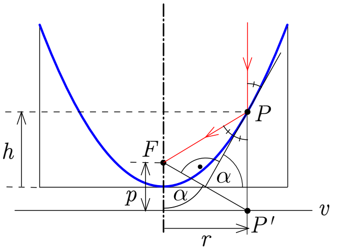
$$H_0=\frac{V}{R^2\pi}=\frac{H}{2}.$$

Rajtik Sándor Barnabás (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

Megjegyzések. 1. A forgási paraboloid metszetének egyenlete meghatározható geometriai megfontolásokkal is. A parabolatükör a tengelyével párhuzamos fénysugarakat a fókuszpontba gyűjti (*3. ábra*). A parabola geometriai definíciója szerint a fókuszponttól és a vezéregyenestől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza ($PF = PP'$). Az F fókuszpont és a v vezéregyenes távolsága a parabola p paramétere, amellyel a parabola egyenlete:

$$h = \frac{1}{2p} r^2.$$

A *3. ábráról* leolvashatóan a görbe érintője az FPP' egyenlő szárú háromszög szimmetriatengelye, így az FP' szakasz merőleges rá. Ezért a merőleges szárú szögek miatt:



3. ábra

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{p}.$$

Ezek alapján (1) felhasználásával ($\operatorname{tg}\alpha = h'(r)$):

$$p = \frac{r}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{g}{\omega^2},$$

$$h = \frac{1}{2p} r^2 = \frac{\omega^2}{2g} r^2,$$

a megoldásban kapott kifejezéssel összhangban.

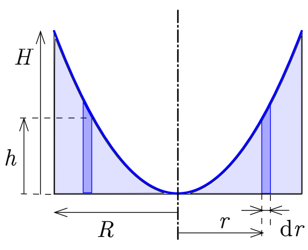
2. A folyadék térfogata a forgástestekre ismert számítási módszerrel is meghatározható. Ekkor a forgástestet r sugarú, dr vastagságú, $h(r)$ magasságú hengergyűrűkre bontjuk (*4. ábra*), amelyek térfogata:

$$\mathrm{d}V = 2r\pi h(r)\,\mathrm{d}r.$$

Behelyettesítve $h(r)$ (2)-ben megkapott kifejezését, és az integrálást elvégezve:

$$V = \int_0^R \frac{2H\pi}{R^2} r^3\,\mathrm{d}r = \frac{2H\pi}{R^2}\frac{R^4}{4} = \frac{HR^2\pi}{2},$$

az előző eredménnyel összhangban.



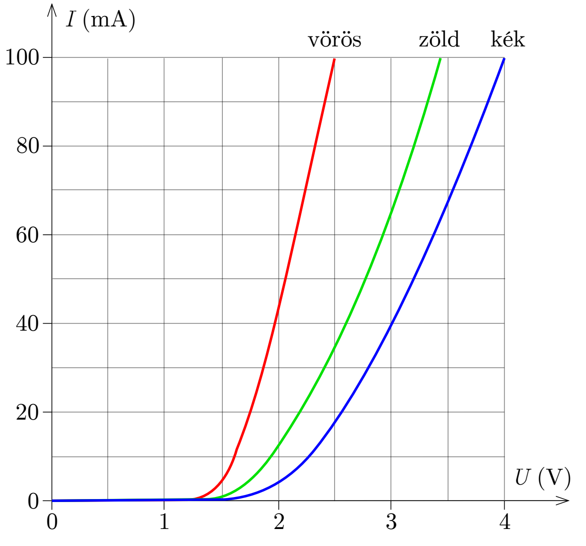
4. ábra

40 dolgozat érkezett. Helyes 19 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 9, hiányos (1–3 pont) 10, nem versenyszerű 1, nem értékelt 1 dolgozat.

P. 5683. *Az* ábrán *különböző színű LED-ek áram–feszültség karakterisztikáját láthatjuk. A grafikonról leolvashatjuk, hogy adott feszültség esetén mekkora a LED árama.*

a) *Az* ábra *alapján határozzuk meg, hogy mekkora teljesítményt vesz fel egy vörös, egy zöld és egy kék LED, ha* 2,5 V *feszültségre kötjük őket párhuzamosan!*

b) *Mekkora lesz ugyanennek a három LED-nek a teljesítménye, ha* 7,5 V *feszültségre kötjük őket sorosan?*



(4 pont) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

I. megoldás. *a)* Párhuzamos kapcsolás esetén mindegyik LED-re ugyanakkora $U=2{,}5$ V nagyságú feszültség esik. Az egyes diódák árama a grafikonról leolvasható: $I_\mathrm{v}\approx 100$ mA, $I_\mathrm{z}\approx 35$ mA, $I_\mathrm{k}\approx 18$ mA. Ebből az egyes diódák teljesítménye a $P=UI$ összefüggés alapján:

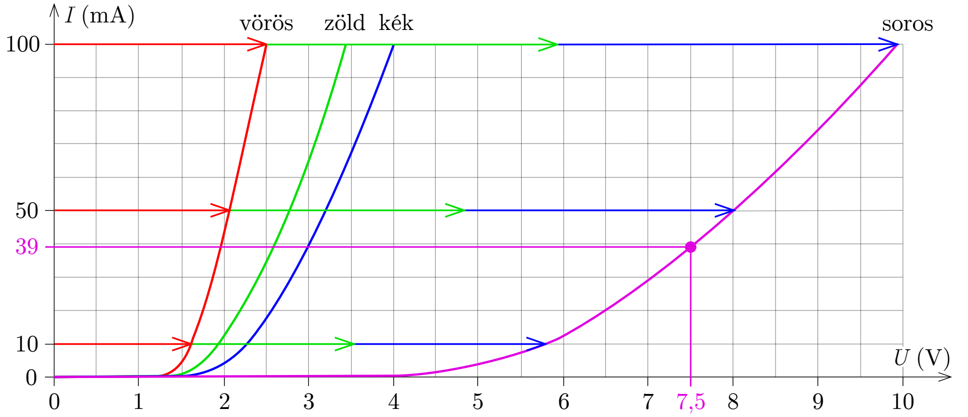
$$P_\mathrm{v}\approx 250\ \mathrm{mW},\quad P_\mathrm{z}\approx 88\ \mathrm{mW},\quad P_\mathrm{k}\approx 45\ \mathrm{mW}.$$

b) Soros kapcsolásnál a diódák árama megegyezik, feszültségeik pedig összeadódnak, összegük: $U_\mathrm{v}+U_\mathrm{z}+U_\mathrm{k}=7{,}5$ V. Próbálgatással megtalálható, hogy ez $I\approx 39$ mA áram esetén teljesül. Ekkor $U_\mathrm{v}\approx 1{,}95$ V, $U_\mathrm{z}\approx 2{,}6$ V, $U_\mathrm{k}\approx 2{,}95$ V. Az egyes diódák teljesítménye ismét a $P=UI$ összefüggés alapján:

$$P_\mathrm{v}\approx 76\ \mathrm{mW},\quad P_\mathrm{z}\approx 101\ \mathrm{mW},\quad P_\mathrm{k}\approx 115\ \mathrm{mW}.$$

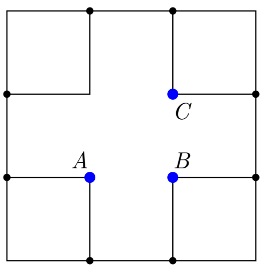
Vértesi Janka (Debreceni Ady E. Gimn., 12. évf.)

II. megoldás. *b)* Ha a három görbét vízszintes irányban grafikusan összeadjuk (*ábra*), akkor megkapjuk a soros kapcsolás eredő karakterisztikáját, amelyről a 7,5 V-hoz tartozó áramérték közvetlenül leolvasható.



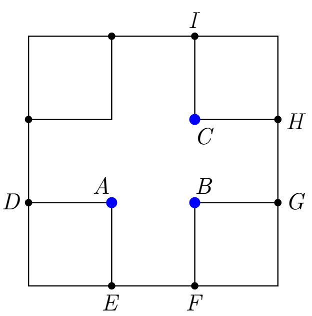
A megoldás többi része megegyezik az I. megoldással.

24 dolgozat érkezett. Helyes 10 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 5, hiányos (1–2 pont) 9 dolgozat.



P. 5684. *Egyenletes vastagságú drótból az* ábrán *látható keretet készítjük el. Számítsuk ki az A és B, valamint az A és C pontok közötti eredő ellenállások arányát!*

(5 pont) Közli: *Cserti József,* Budapest

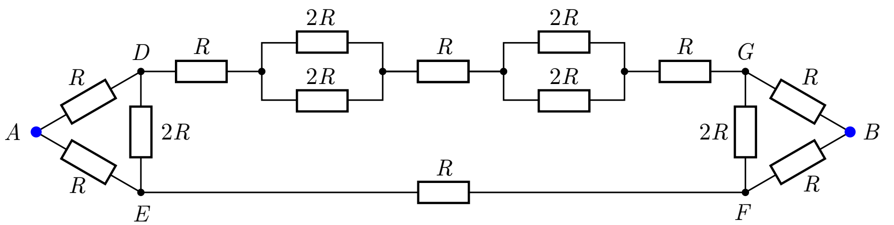


1. ábra

I. megoldás. Az egyenletes vastagság miatt a drótok ellenállása arányos a hosszúságukkal. Legyen a kis négyzetek egy-egy oldalának ellenállása R. Az áttekinthetőség kedvéért az *1. ábrán* látható módon további csúcsokat is megjelölünk.

1. Az A és B pontok közötti ellenállás meghatározása.

Rajzoljuk át a kapcsolást áttekinthetőbb formába (*2. ábra*).

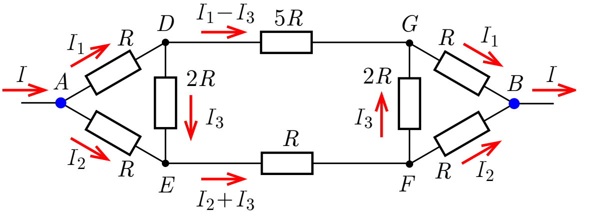


2. ábra

A felső ág középső részének eredő ellenállása:

$$R_{DG} = 3R + 2(2R \times 2R) = 3R + 2R = 5R. \tag{1}$$

Ezt felhasználva a *2. ábra* egyszerűsíthető. A *3. ábrán* (a szimmetriát kihasználva) berajzoljuk az egyes ágak áramát is.



3. ábra

A Kirchhoff-féle csomóponti törvény az A pontra:

$$I = I_1 + I_2. \tag{1}$$

A Kirchhoff-féle huroktörvény az ADE és a $DGFE$ hurkokra:

$$RI_1 + 2RI_3 - RI_2 = 0,$$

$$I_1 + 2I_3 = I_2, \tag{2}$$

$$5R(I_1 - I_3) - 2RI_3 - R(I_2 + I_3) - 2RI_3 = 0,$$

$$5I_1 = 10I_3 + I_2. \tag{3}$$

Az (1), (2) és (3) egyenletekből álló egyenletrendszert megoldva:

$$I_1 = \frac{3}{8}I, \quad I_2 = \frac{5}{8}I, \quad I_3 = \frac{1}{8}I.$$

A potenciálkülönbség A és B között:

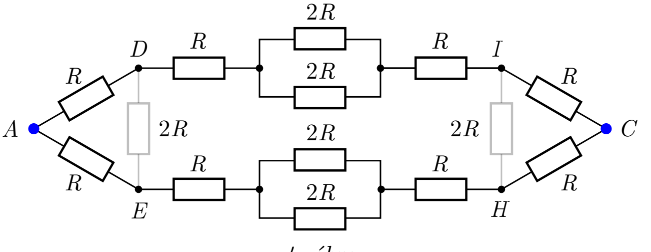
$$U_{AB} = RI_2 + R(I_2 + I_3) + RI_2 = 3RI_2 + RI_3 = \frac{15}{8}RI + \frac{1}{8}RI = 2RI,$$

és ebből az eredő ellenállás:

$$R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I} = 2R.$$

2. Az A és C pontok közötti ellenállás meghatározása.

Az áramkör átrajzolása a *4. ábrán* látható. A szimmetria miatt a D és E, illetve az I és H pontok ekvipotenciálisak, így a DE és az IH ágakon (az ábrán halványan rajzolva) nem folyik áram, azok elhagyhatók.



4. ábra

Az áramkör soros és párhuzamos kapcsolásokból áll, eredő ellenállása könnyen meghatározható:

$$R_{AC} = \frac{1}{2}\left(R + R + \frac{1}{2}\cdot 2R + R + R\right) = \frac{5}{2}R = 2{,}5R.$$

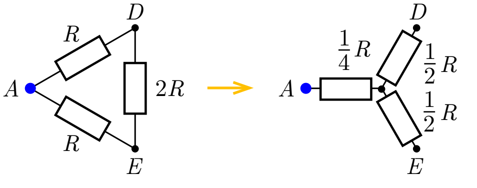
3. A két eredő ellenállás aránya:

$$\frac{R_{AB}}{R_{AC}} = \frac{2R}{2{,}5R} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

Ferencz Kevin (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 11. évf.)

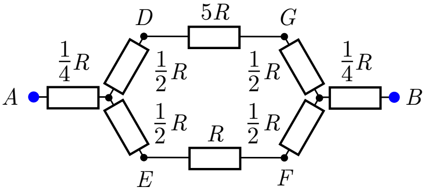
II. megoldás. Az R_{AB} ellenállás meghatározásánál a nehézséget a *2. ábrán* látható ADE és BGF ellenállás-háromszögek jelentik. Ezeket delta–csillag átalakítással szüntethetjük meg. Az átalakítás az *5. ábrán* látható, a csillagkapcsolás ellenállásértékeit a Függvénytáblázatban található képletekkel határoztuk meg:

$$R_A = \frac{R_{AD}\cdot R_{AE}}{R_{AD}+R_{AE}+R_{DE}} = \frac{R\cdot R}{R+R+2R} = \frac{1}{4}R,$$
$$R_D = R_E = \frac{R_{AD}\cdot R_{DE}}{R_{AD}+R_{AE}+R_{DE}} = \frac{R\cdot 2R}{R+R+2R} = \frac{1}{2}R.$$



5. ábra

Ezt az átalakítást, valamint az (1) összefüggést felhasználva a kapcsolás a *6. ábrán* látható módon rajzolható át. (A BGF háromszög a szimmetria miatt ugyanúgy alakítható át, mint az ADE.)



6. ábra

Ezután az eredő ellenállás már könnyen meghatározható:

$$R_{AB} = \frac{1}{4}R + \left(\frac{1}{2}R + 5R + \frac{1}{2}R\right)\times\left(\frac{1}{2}R + R + \frac{1}{2}R\right) + \frac{1}{4}R =$$
$$= \frac{1}{2}R + 6R \times 2R = \frac{1}{2}R + \frac{3}{2}R = 2R.$$

A megoldás többi része megegyezik az I. megoldással.

32 dolgozat érkezett. Helyes 12 megoldás. Kicsit hiányos (3–4 pont) 9, hiányos (1–2 pont) 9, hibás 2 dolgozat.

P. 5686. *Űrhajósok egy a Földről induló* $3/5\,c$ *sebességgel távolodó űrhajóval elindulnak felfedezni a távoli univerzumot. A földi irányítók az indítás után* T *idővel a rakomány egy részét egy másik,* $4/5\,c$ *sebességgel haladó rakétával az űrhajó után küldik.*

a) *Mekkora sebességgel mozog a rakéta az űrhajósok koordináta-rendszerében?*

b) *Mennyi idő telik el a rakományt szállító rakéta elindulása és megérkezése között a földi irányítók, illetve az űrhajósok vonatkoztatási rendszerében?*

A rakéta és az űrhajó gyorsításához szükséges idő elhanyagolható T *mellett.*

(5 pont) Közli: *Széchenyi Gábor,* Budapest

Megoldás. *a)* Legyen az űrhajó Földhöz viszonyított sebessége $v_1=\frac{3}{5}c$, a rakétáé $v_2=\frac{4}{5}c$. A rakéta űrhajóhoz viszonyított sebességét a relativisztikus sebességösszeadó (sebesség-transzformáló) képlettel határozhatjuk meg:

$$v_2'=\frac{v_2-v_1}{1-\frac{v_2 v_1}{c^2}}=\frac{5}{13}c.$$

b) A Földhöz rögzített vonatkozási rendszerben jelölje t a rakéta útjának idejét, eközben s utat tesz meg. Az űrhajó ugyanezt az utat $T+t$ idő alatt teszi meg, tehát:

$$s=v_2t=v_1(T+t),$$

amiből

$$t=\frac{v_1}{v_2-v_1}T=3T.$$

Az űrhajósok vonatkoztatási rendszerében a tőlük v_1 sebességgel távolodó Földön eltelt T idő az idődilatáció miatt hosszabbnak tűnik:

$$T'=\frac{T}{\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}}=\frac{5}{4}T.$$

Ezalatt a Földtől

$$s'=v_1T'=\frac{3}{4}cT$$

távolságra jutnak. Ez alapján a rakéta mozgási ideje az űrhajó rendszeréből:

$$t'=\frac{s'}{v_2'}=\frac{39}{20}T.$$

Monori Bence (Budapest, Bethlen Gábor Technikum, 12. évf.)

Megjegyzés. Eredményünk ellenőrzésére lehetőséget ad a következő gondolatmenet: Az űrhajó indulása és a rakéta érkezése (az űrhajó vonatkoztatási rendszerében a Föld „indulása” és a rakéta érkezése) az űrhajó rendszerében *ugyanott* (az űrhajónál) történik, tehát a két esemény közötti $T'+t'$ sajátidőre érvényes:

$$\frac{T'+t'}{\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}}=T+t.$$

Adatainkat behelyettesítve láthatjuk, hogy ez valóban teljesül. Fontos megjegyezni, hogy ez az összefüggés nem áll fenn külön-külön a T' és T, illetve a t' és t viszonyában, mert a két időtartamot elválasztó esemény, a rakéta indítása máshol történik az űrhajó rendszerében, mint az összeg két végpontját adó események.

32 dolgozat érkezett. Helyes 15 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 3, hiányos (2–3 pont) 13, nem értékelt 1 dolgozat.

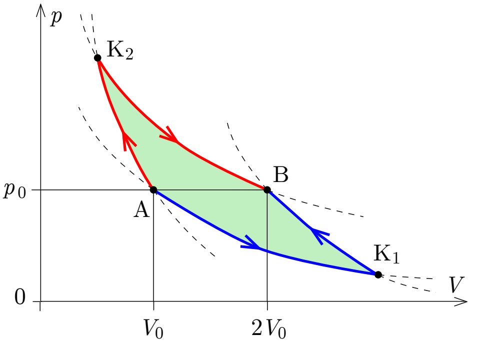
P. 5692. *Egy adott mennyiségű egyatomos ideális gáz kvázisztatikusan eljut a kezdeti p_0 nyomású és V_0 térfogatú állapotából a p_0 nyomású és $2V_0$ térfogatú végállapotába. A folyamatot úgy választjuk meg, hogy a gáz hőmérséklete sohasem csökkenhet, illetve a gáz sohasem adhat le hőt.*

a) *Minimálisan mekkora hőt közölhettünk a gázzal?*

b) *Maximálisan mekkora hőt közölhettünk a gázzal?*

(5 pont) Kvant feladat

I. megoldás. Jelölje a kezdeti, p_0 nyomású és V_0 térfogatú állapotot A, a végső, p_0 nyomású és $2V_0$ térfogatú állapotot B. Mivel a gáz hőmérséklete sehol sem csökkenhet, a folyamat mindvégig az A és B állapotokhoz tartozó izotermák között kell haladjon. Ugyanígy, mivel a gáz sehol nem adhat le hőt, a folyamat mindvégig az A és B állapotokon átmenő adiabaták között kell haladjon. A folyamat tehát csak az *1. ábrán* halvány zölddel jelölt AK_1BK_2 síkidomon belül haladhat.



1. ábra

Az I. főtétel alapján

$$Q=\Delta E+W_g,$$

ahol Q a gáz által felvett hő, $\Delta E=E_B-E_A$ a gáz belső energiájának megváltozása és W_g a gáz által végzett munka. A hőfelvétel akkor lesz minimális, ha a gáz által végzett munka minimális, és akkor lesz maximális, ha a munkavégzés is maximális.

A gáz által végzett munka megegyezik a p–V síkon a folyamatot leíró görbe alatti (előjeles) területtel (hiszen $\mathrm{d}W = p\,\mathrm{d}V$). Ez alapján a gáz legkisebb munkavégzése, és így legkisebb hőfelvétele az $\mathrm{AK_1B}$ útvonalon, a legnagyobb pedig az $\mathrm{AK_2B}$ útvonalon történik. (Ezek az útvonalak kielégítik a feladat feltételeit: a hőmérséklet soha nem csökken, mindig vagy állandó, vagy növekszik, és hőleadás sincsen, hiszen vagy hőfelvétel történik, vagy adiabatikus a folyamat.)

A $\mathrm{K_1}$ állapotban a gáz állapotjelzői legyenek p_1 és V_1, az utóbbi meghatározása:

$$\begin{aligned}
&p_1V_1 = p_0V_0 && \text{(izoterm folymat)},\\
&p_1V_1^\kappa = p_0(2V_0)^\kappa && \text{(adiabatikus folyamat)},\\
&V_1^{\kappa-1} = 2^\kappa V_0^{\kappa-1} && \text{(a két egyenlet hányadosából)},\\
&V_1 = 2^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}V_0 = 2^{\frac{5}{2}}V_0 && \left(f=3,\ \kappa=\tfrac{5}{3}\right).
\end{aligned}$$

A $\mathrm{K_1B}$ folyamat adiabatikus, ott nem történik hőfelvétel. Az $\mathrm{AK_1}$ folyamat izotermikus, így a hőfelvétel megegyezik a gáz munkavégzésével, amiből:

$$Q_{\min} = Q_{\mathrm{AK_1}} = W_{\mathrm{g,\,AK_1}} = p_0V_0\ln\frac{V_1}{V_0} = \frac{5\ln 2}{2}p_0V_0 \approx 1{,}73\,p_0V_0.$$

Hasonlóan a $\mathrm{K_2}$ állapotban a V_2 térfogat:

$$\begin{aligned}
p_2V_2 &= 2p_0V_0,\\
p_2V_2^\kappa &= p_0V_0^\kappa,\\
V_2^{\kappa-1} &= \frac{1}{2}V_0^{\kappa-1},\\
V_2 &= 2^{-\frac{1}{\kappa-1}}V_0 = 2^{-\frac{3}{2}}V_0.
\end{aligned}$$

Most az $\mathrm{AK_2}$ folyamat adiabatikus, ott nem történik hőfelvétel, és a $\mathrm{K_2B}$ folyamat izotermikus. Ezen a szakaszon a hőfelvétel így ismét megegyezik a gáz munkavégzésével, amiből:

$$Q_{\max} = Q_{\mathrm{K_2B}} = W_{\mathrm{g,\,K_2B}} = 2p_0V_0\ln\frac{2V_0}{V_2} = 5\ln 2\cdot p_0V_0 = 2Q_{\min} \approx 3{,}46\,p_0V_0.$$

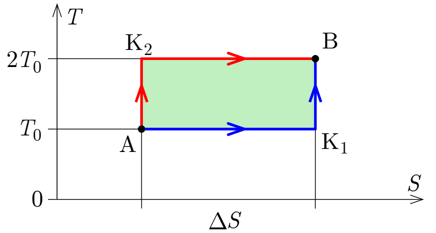
A *Zsebkornél csapat: Baráz Kornél, Horváth Ábel Nándor, Szél Márton*
(Budapest, Szent István Gimn., 12. évf.)

II. megoldás. Legyen a gáz hőmérséklete az A jelű kiinduló állapotban T_0, ekkor az egyesített gáztörvény alapján a B jelű végállapotban a hőmérséklet $2T_0$ lesz. A gáz entrópiaváltozása a folyamat során:

$$\Delta S = nR\left(\frac{f}{2}\ln\frac{2T_0}{T_0} + \ln\frac{2V_0}{V_0}\right) = \ln 2\left(\frac{f}{2}+1\right)nR = \frac{5\ln 2}{2}nR,$$

ahol n a gáz anyagmennyisége, R pedig az egyetemes gázállandó. Felhasználtuk, hogy a gáz egyatomos, így $f=3$. (Az entrópia kezdeti értékét nem tudjuk meghatározni – nincs is rá szükségünk –, csak a megváltozását.)

A folyamat során a hőmérséklet sehol sem csökkenhet. Ahhoz pedig, hogy a gáz soha ne adjon le hőt, az entrópia sem csökkenhet sehol. Tehát a folyamatnak a T–S hőmérséklet–entrópia grafikonon (*2. ábra*) a halvány zöld területen belül kell maradnia, csak a nagyobb hőmérséklet és nagyobb entrópia irányába haladhat (vagy állandó lehet).



2. ábra

A T–S grafikonon a gáz által felvett hőt a görbe alatti (előjeles) terület adja meg (hiszen $\mathrm{d}Q = T\,\mathrm{d}S$). Ebből látszik, hogy a minimális hőközlést úgy érhetjük el, ha először állandó T_0 hőmérsékleten hőt közlünk a gázzal (növeljük az entrópiáját), majd adiabatikusan (hőközlés, és így entrópiaváltozás nélkül) összenyomva növeljük a hőmérsékletét ($\mathrm{AK_1B}$ folyamat). A maximális hőközléshez pedig éppen fordítva, először adiabatikusan (izentropikusan) növeljük a hőmérsékletét, majd ezután állandó $2T_0$ hőmérsékleten közlünk vele hőt ($\mathrm{AK_2B}$ folyamat).

A minimális közölt hő tehát:

$$Q_{\min} = T_0 \Delta S = \frac{5\ln 2}{2} nRT_0 = \frac{5\ln 2}{2} p_0 V_0 \approx 1{,}73\, p_0 V_0.$$

a maximális közölt hő pedig:

$$Q_{\max} = 2T_0 \Delta S = 5\ln 2 \cdot nRT_0 = 5\ln 2 \cdot p_0 V_0 = 2Q_{\min} \approx 3{,}46\, p_0 V_0.$$

Patócs Péter (Budapest, Kempelen Farkas Gimn., 10. évf.)

31 dolgozat érkezett. Helyes 8 megoldás. Hiányos (1–3 pont) 22, hibás 1 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 448. Mérjük meg, hogy egy adott megvilágítású KöMaL újságban a fizika feladatok szövegét legfeljebb milyen távolságból tudjuk elolvasni! A lap megvilágítását a mobiltelefon fényérzékelőjét használva mérjük meg. Milyen pontosan lehet megvilágítást mérni ezzel az alternatív módszerrel?

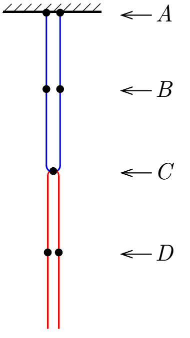
(6 pont) Közli: *Széchenyi Gábor,* Budapest

G. 917. Egy országúti kerékpárversenyen a szökevények egy csoportja T idővel a főmezőny előtt halad, de hosszabb ideje mindenki azonos v sebességgel mozog. Az útvonal mentén végig reklámfeliratok vannak elhelyezve, ezért a szponzorok kérésére a tévés közvetítés rendezője azt az utasítást adja, hogy az útvonal minden pontját legalább egyszer mutatni kell a tévén. Ezen kívül a szökevényeket és a főmezőnyt átlagosan ugyanannyi ideig kell mutatni, továbbá nem szabad 30 másodpercnél gyakrabban váltogatni a két csoport között. Milyen T és v esetén lehet teljesíteni a rendező kívánságait? (A csoportok méretét hanyagoljuk el.)

(4 pont) Közli: *Bodor András,* Budapest

G. 918. Egy 2 kg tömegű és 2 m hosszú kötél mindkét végét (egymáshoz közel) a mennyezethez rögzítjük, majd a hurok alsó pontján átvetünk egy másik ugyanolyan kötelet. Mekkora az egyes kötelekben ébredő feszítőerő az *ábrán* látható hét pontban?

(4 pont)



G. 919. Hogyan működik a hajólift a kínai Három-szurdok-gátnál? Hogyan oldották meg, hogy különböző alvíz- és felvízállások esetén is működjön? Függ-e az emelőerő attól, hogy mekkora súlyú hajót emel a lift?

https://www.erdekesvilag.hu/elkeszult-a-vilag-legnagyobb-hajoliftje-kinaban

(3 pont)

G. 920. Egy felül nyitott, hőszigetelt tartályban 60 °C-os víz található. A tartály fölötti csapot megnyitjuk, és állandó vízhozammal 0 °C-os vizet engedünk bele. 5 perc után a tartályban lévő, jól elkevert víz hőmérséklete 40 °C.

a) Mekkora lesz a tartályban a víz hőmérséklete további 5 perc múlva?

b) A vizet egy órán keresztül engedjük a tartályba. Adjuk meg és ábrázoljuk a tartályban lévő víz hőmérsékletét az idő függvényében!

(4 pont) Tarján Imre fizikaverseny, Szolnok

P. 5715. Egy ℓ hosszúságú fonálinga nehezéke nyugalmi állapotban majdnem a vízszintes talajig ér. Az ingát vízszintes helyzetéig kitérítjük, majd elengedjük. Amikor az inga fonala valamekkora α szöget zár be a függőlegessel, a fonalat hirtelen elégetjük. Mekkora α szög esetén repül a nehezék az egyensúlyi helyzetétől legmesszebbre, és mekkora ez a távolság? (A légellenállást hanyagoljuk el.)

(5 pont) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

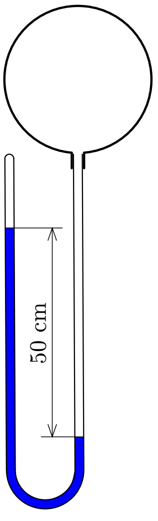
P. 5716. Egy m tömegű korong súrlódásmentesen mozoghat egy vízszintes asztallapon. Egy nyújthatatlan kötél egyik vége a koronghoz, másik vége egy M tömegű testhez van rögzítve miközben átvetettük egy lyukon az asztalon (a kötél és az asztallap közötti súrlódás szintén elhanyagolható). Az m tömegű test kezdetben egy R sugarú körpályán halad, mikor sugárirányban kicsiny lökést adunk neki. Mekkora periódusidővel rezeg az M tömegű test?

(5 pont) Közli: *Erdélyi Dominik,* Budapest

P. 5717. Dido legendájának egy másik változata szerint a hercegnő hajójával Észak-Afrika egyik egyenesnek tekinthető partvonalán kötött ki. A helyi uralkodótól annyi földet kért, amennyit a 4 km hosszúságú kerítésével le tudott választani. A kerítés kialakításánál azt is figyelembe vette, hogy a parthoz 1 km-nél közelebb az egységnyi nagyságú földterület ára kétszer akkora, mint ennél távolabb. Mekkora és milyen alakú területet különített el magának Dido, ha célja a lehető legértékesebb terület megszerzése volt?

(Lásd a **P. 5700.** feladatot lapunk 2026. januári számában.)

(5 pont) Közli: *Vigh Máté,* Herceghalom



P. 5718. Tamás és Balázs felfújás előtt 1,5 g-nak mérte egy gumiból készült léggömb tömegét. Felfújást követően a bekötött, 8,0 dm^3 térfogatú, gömb alakú lufit ismét mérlegre tették: ezúttal a mérés eredménye 2,0 g lett. Végül a felfújt léggömb száját egy mindkét végén nyitott, U-alakban meghajlított, vékony, vízzel részben megtöltött üvegcső egyik végére csatlakoztatva és a bekötést feloldva azt tapasztalták, hogy a cső két szárában lévő vízszintek között 50 cm különbség alakult ki.

a) Hány vízcentiméter a felfújt léggömbbe zárt levegő abszolút nyomása?

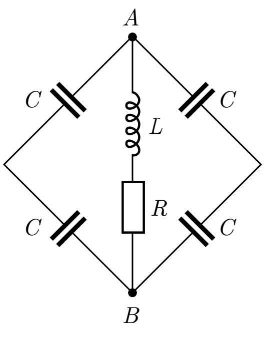
b) Balázs szerint a befújt levegő tömege a mérlegelésnél kapott értékek különbsége, azaz 0,5 g. Tamás viszont azt állítja, hogy a léggömb felfújt állapotában jóval több, csaknem 10 g levegőt tartalmaz. Melyik fiúnak van igaza? Hány gramm levegő került a léggömbbe?

A mérések helyszínén a légnyomás 10^5 Pa, a hőmérséklet 27 °C. A levegő moláris tömege 29 g/mol, a víz sűrűsége 1 g/cm^3.

(4 pont) Tornyai Sándor fizikaverseny, Hódmezővásárhely

P. 5719. Egy szabályos n-szög körülírt körének sugara R. A sokszög csúcsaiban rendre q, $2q$, $3q$, …, nq töltéseket helyeztünk el. Határozzuk meg az elektromos térerősséget a sokszög középpontjában!

(5 pont) A Kvant nyomán



P. 5720. Az *ábrának* megfelelően egy $R = 100\ \Omega$ ellenállást, egy $L = 1$ H tekercset és négy egyforma $C = 20\ \mu$F kondenzátort kapcsolunk össze. Az A és B pontokra $f = 50$ Hz frekvenciájú, $U_{\text{eff}} = 220$ V váltóáramú feszültséget kapcsolunk.

a) Mekkora az áramkör hatásos teljesítménye?

b) Mekkorára módosítsuk a C kapacitásokat, hogy az áramkör meddő teljesítménye nulla legyen?

(5 pont) Közli: *Cserti József,* Budapest

P. 5721. Fénysugár érkezik levegőből egy 1,5 törésmutatójú üvegtömb sík felületére.

a) Mekkora a beesési szög, ha a beeső és a megtört sugár 30°-os szöget zár be egymással?

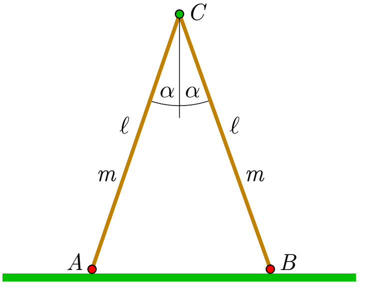
b) Maximálisan mekkora szöget zárhatnak be egymással a beeső és a megtört sugarak?

(4 pont) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

P. 5722. Adjunk nagyságrendi becslést arra, hogy az atommag méretének megfelelő térrészbe bezárt elektronnak mekkora az impulzusbizonytalansága, és ez a klasszikus (nemrelativisztikus) fizika törvényei szerint mekkora sebességnek felel meg!

(4 pont) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

P. 5723. Kétágú létrához hasonló szerkezetet láthatunk az *ábrán.* A függőleges síkban elhelyezett, vékony, homogén rudakat súrlódásmentes, könnyű csukló köti össze. A rudak ℓ hosszúak, m tömegűek, a talajon lévő végükön könnyű görgők találhatók, amelyek biztosítják, hogy a vízszintes felületen súrlódásmentesen csúszhasson szét a „létra”. Kezdetben a két rúd által bezárt szög 2α. Ebből a helyzetből indítjuk el lökésmentesen a szerkezetet. Szétcsúszás közben a rudak a kezdetben felvett függőleges síkban mozognak.



a) Mekkora sebességgel csapódik a vízszintes talajra a C csukló?

b) Az indítást követő pillanatban mekkora az A, B és C pontok gyorsulása?

c) A talajra csapódás előtti pillanatban mekkora az A, B és C pontok gyorsulása?

(6 pont) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

❄

Beküldési határidő: 2026. április 15.
Elektronikus munkafüzet: https://www.komal.hu/munkafuzet

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS (Volume 76. No. 3. March 2026)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 159): **K. 894.** Knowing that $\frac{x}{y}=\frac{4}{7}$ and $\frac{y}{z}=\frac{14}{3}$ find $\frac{x+y}{z}$. **K. 895.** The sum of a few distinct positive prime numbers is 40. What can be these prime numbers? **K. 896.** A circle with radius R is given. We draw the tangent lines to the circle from an external point P. These two lines form a 60° angle, and the circle is in one of the 60° angles formed by the two lines. How many circles of unit radius can be drawn that is tangent to exactly two of the circle and the two lines, if *a)* $R=3$; *b)* $R=4$? **K/C. 897.** We have two dice with six faces, both containing the numbers from 1 to 6. On one of the dice the sum of the opposite numbers is always the same, on the other one the difference of the opposite numbers is always the same. We rolled the dice, and the same number came out on top for both. What can be the second smallest and the second biggest value of the product of the eight numbers on the side faces of the two dice? **K/C. 898.** In parallelogram $ABCD$ the angle at A is 60 degrees, $AD=20$ cm, $AB=30$ cm. Let E be the trisection point of AB closer to B. Let F and G be the midpoints of line segments ED and BC, respectively. The circle with diameter ED intersects FG at H. Find the length of line segment DH.

New exercises for practice – competition C (see page 160): **Exercises up to grade 10: K/C. 897.** See the text at Exercises **K**. **K/C. 898.** See the text at Exercises **K**. **Exercises for everyone: C. 1893.** How many rectangular prisms are there with a volume of 2560 cm^3 where every edge has an integer length measured in centimeters. (Proposed by *Márton Ujházy*, Budapest) **C. 1894.** Prove that if n is an integer, then the value of $\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}+\frac{7n}{15}$ is also an integer. (Scottish competition problem) **C. 1895.** The surface of a cube shaped small planet is covered in grass, its edges have a length of 1 km. A goat is tied to one of the vertives with a rope of length $\sqrt{2}$ km. What ratio of the surface of the planet can be consumed by the goat? (Proposed by *Márton Ujházy*, Budapest) **Exercises upwards of grade 11: C. 1896.** Let E be the center of square $ABCD$. A quarter circle with center D and radius DA inside the square intersects the semicircle with diameter AB inside the square at point F. Line EF intersects line AB at M, and the semicircle with diameter DA outside the circle at point N. Prove that F is the midpoint of line segment MN. (Proposed by *Bálint Bíró*, Eger) **C. 1897.** We choose three vertices of a regular n-gon such that the chance of picking any of the triples is the same. Prove that if n is even, then the probability of the triangle formed by the three vertices being obtuse is three times as big as the probability of it being acute. (Proposed by *Márton Ujházy*, Budapest)

New exercises – competition B (see page 161): **B. 5518.** Let n and k be positive integers. How many ways are there to partition the lattice trapezoid with vertices $(0,0)$, $(n,0)$, $(k,1)$ and $(0,1)$ into lattice triangles of area 1/2? (A polygon is called a lattice polygon if both coordinates of all its vertices are integers.) (3 points) (Proposed by *Attila Sztranyák*, Budapest) **B. 5519.** Viktor has drawn a parallelogram of unit area. Bálint measured one of its sides and one of its diagonals. What is the smallest possible value of the sum of these two measurements? (3 points) (Proposed by *Bálint Hujter*, Budapest) **B. 5520.** Two circles are given in the plane, lying outside each other. Two line segments with lengths d_1 and d_2 are also given. How many lines are there that intersect the first circle in a chord of length d_1 and the second circle in a chord of length d_2? (4 points) (Proposed by *Géza Kiss*, Csömör) **B. 5521.** Positive integer k is given. Find all positive integers n such that in the prime factorization of $\frac{(2^k n)!}{(n!)^{2^k}}$ the exponent of 2 is exactly 2^k-1. (5 points) (Proposed by *Zoltán Bertalan*, Békéscsaba) **B. 5522.** Does there exist a sequence of positive integers a_1, a_2, $\ldots$ and positive integer N such that for every $n\geqslant N$, $a_n<a_{n+1}<a_1+a_2+\ldots+a_n$ and $a_{n+1}\mid a_1+a_2+\ldots+a_n$? (5 points) (Proposed by *Sándor Róka*, Nyíregyháza) **B. 5523.** Find the largest possible number of distinct integer roots of polynomial $p(x)=a_{12}x^{12}+a_{11}x^{11}+$ $+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$ with integer coefficients if $a_0+a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}+a_{12}=0$ and $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11}=12$. (5 points) (Proposed by *Attila Sztranyák*, Budapest)

B. 5524. In triangle ABC, F is the midpoint of side BC. A line intersects line segments AB, AC, AF, in points X, Y, Z, respectively. Prove that $AB \cdot AX + AC \cdot AY > 2AF \cdot AZ$. (6 points) (Proposed by *Ábel Szakács*, Budapest) **B. 5525.** For edge e in tetrahedron T let us define quantity $r(e)$ as the ratio of the distance of the two heights of the tetrahedron from the endpoints of e and the length of edge e. Let $R(T)$ be defined as the sum of $r(e)$ for all the edges of tetrahedron T. Show an example for a tetrahedron T for which $R(T) > 5.999$. (6 points) (Based on an idea of *Zoltán Bertalan*, Békéscsaba)

New problems – competition A (see page 162): **A. 929.** Let $\mathcal{P}$ be a set of ten points in the plane. A subset $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ is said to be *isolable* if there exists a closed disk of positive integer radius that contains all points of $\mathcal{Q}$ but none of the points of $\mathcal{P} \setminus \mathcal{Q}$. Prove that at least one third of the five-element subsets of $\mathcal{P}$ are not isolable. (Proposed by *Áron Bán-Szabó*, Palaiseau) **A. 930.** Does there exist a tetrahedron such that the incenters of its faces are coplanar? (Proposed by *Gábor Moussong*, Budapest) **A. 931.** Prove that for any integers $k > 10$ and $n > k^4$, among the integers $(n + 1^2)$, $(n + 2^2)$, $(n + 3^2)$, $\ldots$, $(n + k^2)$, there is at least one that has a prime divisor greater than k. (Proposed by *Géza Kós*, Budapest)

Problems in Physics

(see page 186)

M. 448. Measure the maximum distance from which the text of the physics problems in a KöMaL magazine under given lighting condition is readable. The lighting of the page should be measured by the light sensor of a cell phone. How accurately can lighting be measured using this alternative method?

G. 917. At a road cycling race, a group of breakaways is ahead of the main peloton by a time gap of T, but for a long time, everyone has been moving at the same speed of v. Along the route, advertising banners were placed continuously. At the sponsors' request, the television broadcast director gave the instruction that every point on the route must be shown on TV at least once. Additionally, the breakaway group and the peloton must be shown on average for the same amount of time, and alternating between the two groups should not occur more frequently than every 30 seconds. For which values of T and v can these requirements of the director be fulfilled? (The sizes of the groups are neglected.) **G. 918.** Both ends of a rope of mass 2 kg and of length 2 m are attached (close to each other) to the ceiling, and then another identical rope is thrown over the lower point of the loop. What is the tension in each rope at the seven points shown in the figure? **G. 919.** How does the boat lift at the Three Gorges Dam in China operate? How was it solved to make it work at different fore- and tailwater levels? Does the lifting force depend on the weight of the boat elevated by the lift? `https://www.erdekesvilag.hu/elkeszult-a-vilag-legnagyobb-hajoliftje-kinaban` **G. 920.** An open-top, thermally insulated tank contains water at a temperature of 60 °C. A tap above the tank is opened and water at 0 °C flows from it into the container at a constant rate. After 5 minutes, the temperature of the well-mixed water in the container is 40 °C. *a)* What will the temperature of the water in the tank be after another 5 minutes? *b)* We let the water flow into the tank for an hour. Determine the temperature as a function of time, and plot the temperature versus time graph.

P. 5715. At rest, the string of a simple pendulum is vertical, and its bob almost reaches the ground. The length of the string is ℓ. The pendulum is displaced horizontally and released. When the angle between the string of the pendulum and the vertical is α, the string is suddenly burned. At what angle α does the bob fly farthest from its equilibrium position, and what is this distance? (The air drag can be neglected.) **P. 5716.** A disc of mass m can move on a horizontal frictionless surface of a table. The disc is connected to a body of mass M by an inextensible rope that passes through a hole in the table (the friction between the rope and the tabletop is also negligible). The disc initially moves on a circular path of radius R when it is slightly pushed radially. What is the period of the oscillation of the body of mass M? **P. 5717.** According to another version of the legend of Dido, the princess landed her ship on an almost straight coastline in North Africa. She asked the local king for as much land as she could enclose with a 4 km fence. Designing the wall, she also considered that land located within 1 km of the coast is worth twice as much per unit area as land farther inland. What is the size and the shape of the area Dido set aside for herself if her goal was to obtain the most valuable possible territory? (See exercise **P. 5700.** in the January 2026 issue of our magazine.) **P. 5718.** Before inflation, Thomas and Blaise measured the mass of a rubber balloon to be 1.5 g. After they blew up and tied the spherical balloon, which had a volume of 8.0 dm^3, the blown balloon was put on the scale again; this time the measured mass was 2.0 g. Finally, they connected the inflated balloon to one arm of a thin U-shaped glass tube that was partially filled with water. The other arm of the tube remained open to the atmosphere. After releasing the tie of balloon, they observed that a height difference of 50 cm developed between the water levels in the two arms of the tube. *a)* How many $\mathrm{cmH_2O}$ (centimetre of water) is the total pressure of the air closed into the inflated balloon? *b)* According to Blaise, the mass of the air blown into the balloon is the difference between the values obtained during weighing, i.e., 0.5 g. Thomas, on the other hand, claims that when inflated, the balloon contains much more air, almost 10 g. Which boy is right? How many grams of air was blown into the balloon? At the place of the measurements, the air pressure is 10^5 Pa, the temperature is 27 °C. The molar mass of air is 29 g/mol, and the density of water is 1 $\mathrm{g/cm^3}$. **P. 5719.** The radius of the circumcircle of a regular n-gon is R. Charges of q, $2q$, $3q$, …, nq are placed at the vertices of the polygon. Determine the electric field at the centre of the polygon. **P. 5720.** The figure shows a circuit which consists of a resistor of resistance $R=100\ \Omega$, a coil of inductance $L=1$ H, and four identical capacitors of capacitance $C=20\ \mu\mathrm{F}$. An AC generator with frequency of $f=50$ Hz and r.m.s. (root-mean-square) voltage of $U_{\mathrm{eff}}=220$ V is connected to points A and B. *a)* What is the active power of the circuit? *b)* How should the capacitance value C be modified to get zero reactive power? **P. 5721.** A ray of light enters the plane surface of a glass block with a refractive index of 1.5 from air. *a)* What is the angle of incidence if the angle between the incident and refracted rays is 30°? *b)* What can be the maximum angle between the incident and refracted rays? **P. 5722.** Estimate the order of the momentum uncertainty of an electron confined in a space of the order of an atomic nucleus. To what velocity does this correspond according to the laws of classical (non-relativistic) physics? **P. 5723.** The figure shows a two-legged ladder-like structure. The thin, uniform density rods placed in a vertical plane are joined with a light frictionless hinge. The length of the rods is ℓ, they each has mass of m, and on their lower ends there are light castors that ensure that the rods can move frictionlessly apart on the horizontal surface. Initially, the angle of the two rods is 2α. From this position, the rods start to move without any push. While sliding apart, the rods remain in the initial vertical plane. *a)* At what speed does the hinge C strike the horizontal plane? *b)* What is the acceleration of the points A, B and C right after the starting moment? *c)* What is the acceleration of the points A, B and C right before the hinge strikes the ground?

SZTE BOLYAI INTÉZET

2026.03.14. Szombat

PI NAP SZEGED

09:00–11:00 Matematika az Aradi téren (rossz idő esetén a Bolyai Épületben)

Bolyai terem programok
(Bolyai Épület II. emelet)

PIZZA

09:00
Ördöglakatok, Rubik kockák, szabad játék a Bolyai teremben

10:00
Makay Géza
Sudokuzzunk egy pi-cit

10:40
Kevei Péter
Rab matematikusok

11:20
Waldhauser Tamás
π

PIROSKA SZÖRP

12:00
Pi-zza szünet

13:20
Polygon verseny díjátadó

14:00
Ambrus Gergely
Szúrós és laPItott parketták

14:50
Németh József
Már megint π

PITE

16:00
Lajos Józsefné és Dr. Katz Sándor
Prima Primissima Díjas matematikatanárokkal Kosztolányi József beszélget

17:30
Pi-te szünet

18:00
Waldhauser Tamás
Csomózzunk együtt!

Kérjük, **5 főnél nagyobb csoport** jelezze részvételi szándékát a következő email címen: gyorffylajos38@gmail.com. További kérdésekre is örömmel válaszolunk!

Matek az Utcán 2026

Ismét π-nap, ami azt jelenti, hogy ezen a szombaton idén is lesz Matek az Utcán a Bolyai János Matematikai Társulat szervezésében!

Ez a nap a Matematika Nemzetközi Világnapja. Az idei nemzetközileg meghirdetett téma „a matematika és a remény".

A programok célja szerte az országban, hogy a szabadtéri helyszíneken érdekes matematikai tevékenységekbe vonjuk be az utca emberét. **Budapesten a központi esemény a Blaha Lujza téren lesz március 14-én 10-től 14 óráig.**

A programok előkészítésében és lebonyolításában számos önkéntes vesz részt, a helyszíneken pedig országszerte várjuk az érdeklődőket.

Az esemény részletes programja megtalálható a Bolyai János Matematikai Társulat honlapján.

Az országszerte megrendezésre kerülő programok közül néhány időpontja és helyszíne:

március 11. szerda

15:00-17:00, **Budapest**, XVII. ker. Rákoskeresztúri városközpont, a Bistro 17, a Deichmann és a Szabó Ervin Könyvtár közti területen

március 12. csütörtök

8:00-11:00, **Debrecen**, Szent Anna utca 20-26, a Svetits Katolikus Gimnázium kapujában
8:00-13:00, **Győr**, a Batthyány téren
15:00-17:00, **Szokolya**, Fő u. 24.

március 13. péntek

Délelőtt, **Szombathely**, Zrínyi Ilona u. 10.
9:00- 13:00, **Veszprém**, Kossuth Lajos utca, a Posta előtti téren
16:00-19:00, **Bonyhád**, Szabadság tér 2.

március 14. szombat

9:00-19:00, **Szeged**, Aradi vértanúk tere 1.
10:00-12:00, **Cegléd**, a gimnázium előkertjében
10:00-12:00, **Debrecen**, Egyetem tér 1., a Matematikai Intézet előtt
10:00-13:00, **Esztergom**, Széchenyi tér
10:00-13:00, **Gödöllő**, Szabadság tér 9., a Líceum előtt
10:00-13:00, **Szombathely**, a Berzsenyi Dániel Könyvtár Gyermekkönyvtárában
10:00-14:00, **Budapest**, Blaha Lujza tér
13:00-18:00, **Siófok**, Fő tér 2., Teátrum Kávéház

A MATEMATIKA NEMZETKÖZI VILÁGNAPJA
MÁRCIUS 14.