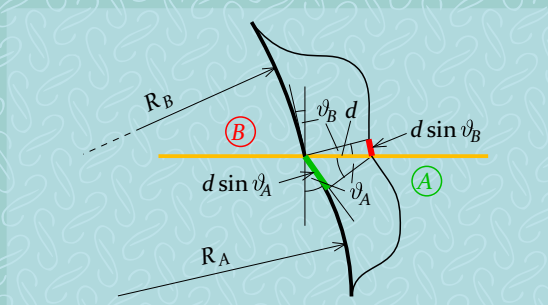


Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok

Informatika rovattal

Támogassa lapunk kiadását
adója 1%-ával – 18157444-2-43

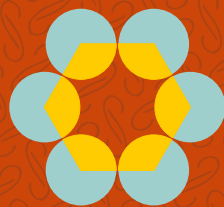


Egy ábra variációszámításhoz



Minima Fibonacci 2 és 3

Amit jó tudni a projektív geometriáról – II. rész | Néhány
további bepakoló | Róka Sándor Erdős-díjas | Beszámoló a
2026. évi EGMO versenyről | Ismerkedés a
variációszámítással | Közlemények | Felhívás



KöMaL

76. évfolyam
5. szám

2026.
május



EGMO 2026 – Bordeaux



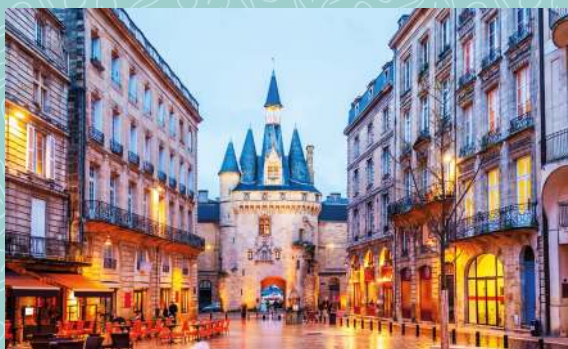
Balról jobbra: Györfy-Kerekes Anna; Kiss Melinda Flóra; Zhai Yufan; Sárdinecz Dóra; Varga Vivien; Bodor Noémi; Sztranyák Gabriella; Velich Nóra



A Gironde-i forradalmárok emlékműve előtt a Place des Quinconces-n



Egy immerszív *Kis herceg* előadáson



Porte-Cailhau



A Grand Théâtre de Bordeaux előtt



Place de la Bourse

A KöMaL
támogatói



Nemzeti
Együttműködési
Alap



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM

KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE

ALAPÍTOTTA: ARANY DÁNIEL 1894-ben

76. évfolyam 5. szám

Budapest, 2026. május

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta. ÁRA: 1600 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

<i>Kiss György:</i> Amit jó tudni a projektív geometriáról, II. rész	258
<i>Kós Rita:</i> Ha ez a háromszög beszélni tudna, mit mondana erről a merőlegesről?	267
<i>Vígh Viktor:</i> Rejtvények, ördöglakatok – Néhány további bepokoló	270
<i>Kiss Melinda Flóra, Györffy-Kerekes Anna, Véllich Nóra:</i> Beszámoló a 2026. évi EGMO versenyről	272
A 2026. évi EGMO feladatai	277
<i>Polák Péter:</i> Megoldásvázlatok a 2026./4. szám matematika gyakorló feladatsorához	278
Matematika C gyakorlatok megoldása (1889.) .	285
A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok (904–908.)	287
A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (907–908., 1903–1907.)	288
A B pontversenyben kitűzött feladatok (5534–5541.)	289
Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (935–937.)	291
Informatikából kitűzött feladatok (699–672.) ..	292
<i>Gnädig Péter:</i> Ismerkedés a variációszámítással	297
Mérési feladatok megoldása (447.)	305
Fizika gyakorlatok megoldása (915.)	308
Fizika feladatok megoldása (5706., 5707., 5717.)	310
Felhívás a Forráspont Fizikátaborra	313
Fizikából kitűzött feladatok (450., 925–928., 5733–5741.)	313
Problems in Mathematics	317
Problems in Physics	319

Főszerkesztő: KORÁNDI JÓZSEF
Fizikus szerkesztő: VANKÓ PÉTER
Műszaki szerkesztő: FRIED KATALIN
Borító: BURGHARDT ZSUZSA
Kiadja: MATFUND ALAPÍTVÁNY
Alapítványi képviselő: KÓS RITA
Felelős kiadó: PATKÓS BALÁZS
Nyomda: OOK-PRESS Kft.
Felelős vezető: SZATHMÁRY ATTILA
INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A matematika bizottság tiszteletbeli elnöke:
HERMANN PÉTER

A matematika bizottság vezetője: KÓS GÉZA

Tagjai: BÁN-SZABÓ ÁRON, BÍRÓ BÁLINT, CZETT MÁTYÁS, GYENES ZOLTÁN, HUJTER BÁLINT, KISS GÉZA, KOZMA KATALIN ABIGÉL, MAGYAR ESZTER, NÉMETH MÁRTON, PACH PÉTER PÁL, PAULOVIKCS ZOLTÁN, RATKÓ ÉVA, SIMON LÁSZLÓ BENCE, SZTRANYÁK ATTILA, UJHÁZY MÁRTON, VÍGH VIKTOR

A fizika bizottság vezetője: SZÉCHENYI GÁBOR

Tagjai: BARANYAI KLÁRA, GNÄDIG PÉTER, HONYEK GYULA, ÓLOSZ BALÁZS, SZÁSZ KRISZTIÁN, VÍGH MÁTÉ, VLADÁR KÁROLY, WOYNAROVICH FERENC

Az informatika bizottság vezetője:
SCHMIEDER LÁSZLÓ

Tagjai: LÓCZI LAJOS, SIEGLER GÁBOR, TÓTH TAMÁS

Fordítók: GYENES ZOLTÁN, TASNÁDI ANIKÓ

Nyelvi korrektor: ANDICS ÁGNES
Javítás koordinálása: CSOBÁNKA PETRA

Szerkesztőségi titkár: ONDINÉ SZABÓ SÁRA

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest,
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
Telefon: +36 20 320-1143
A lap megrendelhető a
<https://komalujsg.myshoprenter.hu>
oldalon keresztül.

Előfizetési díj egy évre: 12 500 Ft
Kéziratokat nem őrzünk meg és nem küldünk vissza.
Minden jog a KöMaL tulajdonosaié.
E-mail: szerk@komal.hu
Internet: <http://www.komal.hu>

This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 20 320-1143
or on the Internet:
<https://komalujsg.myshoprenter.hu>.
A Lapban megjelenő hirdetések tartalmáért
felelősséget nem vállalunk.



Amit jó tudni a projektív geometriáról

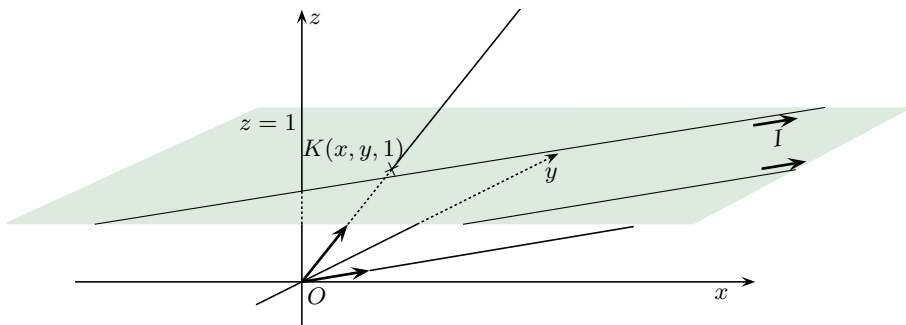
II. rész

Az O -pont modell, homogén koordináták

A 3-dimenziós euklidészi térben vegyünk fel egy O kezdőpontú, x , y és z tengelyű derékszögű koordináta-rendszert. Legyen S a $Z = 1$ egyenletű – vagyis az (x, y) síkkal párhuzamos, a z tengelyt az 1 pontjában metsző – euklidészi sík. Egészítsük ki S -et az előző részben leírt módon ideális pontokkal és egy ideális egyenessel, így kapjuk a Π projektív síkot. Először megadjuk a projektív sík O -pont modelljét.

Állítás. A Π pontjai kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők az euklidészi tér O -n átmenő egyenesének, a Π egyenesei pedig az euklidészi tér O -n átmenő síkjainak, mégpedig illeszkedéstartó módon, azaz Π -ben a P pont pontosan akkor illeszkedik az e egyenesre, ha a P -nek megfeleltetett O -n átmenő egyenest az euklidészi térben tartalmazza az e -nek megfeleltetett sík.

Bizonyítás. A Π sík egy K közösleges pontjának feleltessük meg az OK egyenest, ha pedig I ideális pontja Π -nek, akkor megfelelője legyen az O -n átmenő, az I ideális pontnak megfelelő párhuzamossági osztályba tartozó egyenes (szemléletesen látható – de egyszerűen be is bizonyítható –, hogy az euklidészi térben minden ponton át minden térbeli párhuzamossági osztálynak pontosan egy egyenes megy át).



9. ábra

A Π sík ℓ közösleges egyenesének feleltessük meg az O pont és az ℓ egyenes által meghatározott síkot (az euklidészi térben egy nem illeszkedő pont-egyenes párhoz egyértelműen létezik olyan sík, amely átmegy a ponton és tartalmazza az egyenest), a Π sík i ideális egyenesének megfelelője pedig legyen az O -n átmenő, $Z = 0$ egyenletű sík, vagyis maga az (x, y) sík.

Ezek a megfeleltetések nyilván kölcsönösen egyértelműek. Vizsgáljuk meg az illeszkedéstartást. A Π sík valamely ℓ közösleges egyenesre pontosan akkor tartalmazza a Π sík valamely K közösleges pontját, ha a térben az OK egyenes benne van az O pont és az ℓ egyenes által meghatározott euklidészi síkban. Az I ideális pont pedig akkor illeszkedik Π -ben ℓ -re, ha ℓ az I -nek megfelelő párhuzamossági

osztályhoz tartozik, azaz pontosan akkor, amikor az O pont és az ℓ egyenes által meghatározott sík a $Z = 0$ egyenletű síkot egy ℓ -vel párhuzamos egyenesben metszi, mert az euklidészi térben két párhuzamos síkot egy harmadik sík egymással párhuzamos egyenesekben metsz. A Π sík ideális egyenesének megfelelő $Z = 0$ egyenletű sík pedig azokat az O -n átmenő egyeneseket tartalmazza, amelyek benne vannak a síkban, azaz tartalmazza az ideális pontoknak megfelelő egyeneseket, de nem tartalmaz egyetlen közöséges pontnak megfelelő egyenest sem. $\square$

A 3-dimenziós euklidészi térben egy O -n átmenő egyenest egyértelműen meghatároz bármelyik irányvektora, egy O -n átmenő síkot pedig bármelyik normálvektora. Két (irány)vektor pontosan akkor tartozik ugyanahhoz az O -n átmenő egyeneshez, illetve két (normál)vektor ugyanahhoz az O -ra illeszkedő síkhoz, ha egymás számszorosai. Ezért Π pontjait, illetve egyeneseit azonosíthatjuk a nullvektortól különböző vektorok osztályaival, ahol két vektor, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ és $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$, akkor és csak akkor van ugyanabban az osztályban (amit a $\mathbf{v} \sim \mathbf{w}$ jelöléssel fejezünk ki), ha van olyan nem nulla szám, amivel az egyiket megszorozva a másikat kapjuk. Erre a felismerésre alapozva bevezethetjük a projektív sík pontjainak és egyeneseinek homogén koordinátáit.

Definíció. A Π sík P pontjának homogén koordinátái $(v_1 : v_2 : v_3)$, ha az OP egyenesnek a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektor egy irányvektora.

A Π sík e egyenesének homogén koordinátái $[u_1 : u_2 : u_3]$, ha az O pont és az e egyenes által meghatározott síknak az $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ vektor egy normálvektora.

A homogén koordináták tehát függenek a 3-dimenziós tér koordináta-rendszerének megválasztásától. Egy rögzített koordináta-rendszerben minden pontnak sok homogén koordinátahármasa van. Két koordinátahármas, $(v_1 : v_2 : v_3)$ és $(w_1 : w_2 : w_3)$ pontosan akkor tartozik ugyanahhoz a ponthoz, ha van olyan $\lambda \neq 0$ valós szám, amelyre $v_1 = \lambda w_1$, $v_2 = \lambda w_2$ és $v_3 = \lambda w_3$. Tehát a pontot a homogén koordinátáinak egymáshoz viszonyított aránya határozza meg. A $(0 : 0 : 0)$ hármas nem tartozik egyetlen ponthoz sem (hiszen a $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ vektor nem irányvektora egyetlen egyenesnek sem), viszont bármely ettől különböző hármas pontosan egy pontnak a homogén koordinátahármasa. Ugyanezek elmondhatóak az egyenesek $[u_1 : u_2 : u_3]$ homogén koordinátahármasairól is.

A projektív síkon a P pont akkor és csak akkor illeszkedik az e egyenesre, ha az O -pont modellben az OP egyenes benne van az O és e által meghatározott síkban. Ez pontosan akkor teljesül, ha az egyenes irányvektora merőleges a sík normálvektorára, azaz ha a két vektor skaláris szorzata 0, vagyis a homogén koordinátáikra teljesül, hogy $u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 0$.

Ebben a koordináta-rendszerben ha K közöséges pont, akkor az OK egyenes nincs benne a $Z = 0$ síkban, ezért irányvektorának harmadik koordinátája nem 0, ha viszont I ideális pont, akkor az OI egyenes benne van a $Z = 0$ síkban, azaz irányvektorának harmadik koordinátája 0. Vagyis az ideális pontokat arról lehet „felismerni”, hogy harmadik homogén koordinátájuk 0. A K közöséges pont egyik homogén koordinátahármasa $(x : y : 1)$, ahol $(x, y, 1)$ éppen K derékszögű koordinátái a 3-dimenziós euklidészi térben.

Görbék az euklidészi és a projektív síkon

Ha az euklidészi síkon adott egy Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer, akkor sok ponthalmazt megadhatunk az egyenletével. (Egy ponthalmaz egyenlete egy olyan összefüggés(rendszer), amelyet a halmaz pontjainak koordinátái igazolnak, a halmazon kívüli pontokéi pedig nem.) Megtanultuk koordináta-geometriából, hogy a $2X + 3Y = 1$ egyenlet egy e egyenest, a $X^2 + Y^2 = 1$ egyenlet pedig az origó középpontú egységgörte határozza meg. Az ilyen típusú egyenleteket felírhatjuk kétváltozós polinomok segítségével is. Ha $F_1(X, Y) = 2X + 3Y - 1$, illetve $F_2(X, Y) = X^2 + Y^2 - 1$, akkor az $F_1(X, Y) = 0$, illetve az $F_2(X, Y) = 0$ egyenlet az e egyenes, illetve az origó középpontú egységgörte egyenlete. Ezt az észrevételt általánosítja az affin sík görbe fogalma.

Definíció. Legyen

$$F(X, Y) = \sum_{0 \leq i+j \leq k} a_{i,j} X^i Y^j$$

egy kétváltozós valós együtthatós k -adfokú polinom. Ekkor az

$$F(X, Y) = 0$$

egyenlet egy *affin görbét* definiál a koordináta-rendszerrel ellátott euklidészi síkon. Az affin görbe azon $P(x, y)$ pontok halmaza, amelyek koordinátái kielégítik az $F(x, y) = 0$ egyenletet.

Vizsgáljuk meg, hogyan lehet polinommal megadni a projektív sík egy görbét. A projektív síkon a homogén koordinátákat jelölje X_1, X_2 és X_3 . Mi történik, ha egy háromváltozós $G(X_1, X_2, X_3)$ polinomból indulunk ki? Az előzőek mintájára a projektív síkon a projektív görbét úgy kellene definiálnunk, hogy azon $P(x_1 : x_2 : x_3)$ pontok halmaza, amelyek koordinátái kielégítik a $G(x_1, x_2, x_3) = 0$ egyenletet. E szerint ha $G(X_1, X_2, X_3) = X_1^2 + X_2^2 - X_3$, akkor a $P(1 : 1 : 2)$ pont rajta van a görbén, mert $1^2 + 1^2 - 2 = 0$. De a P pontnak $(2 : 2 : 4)$ is egy homogén koordinátahármasa. Ha ezzel számolunk, akkor azt kapjuk, hogy $2^2 + 2^2 - 4 \neq 0$, azaz P nincs rajta a görbén. Egy pont illeszkedése a görbére nyilván nem függhet attól, hogy a pontnak melyik koordinátahármasával számolunk. Látható tehát, hogy a projektív síkon tetszőleges polinommal nem tudunk görbét definiálni. Viszont *homogén polinomokkal* számolva megváltozik a helyzet. Egy polinomot homogén k -adfokúnak nevezünk, ha a változók fokszámainak összege minden tagjában k . Tehát egy k -adfokú, háromváltozós valós együtthatós homogén polinom megadható

$$H(X_1, X_2, X_3) = \sum_{0 \leq i+j \leq k} a_{i,j} X_1^i X_2^j X_3^{k-i-j}$$

alakban. Például minden másodfokú, háromváltozós homogén polinom felírható

$$a_{2,0} X_1^2 + a_{1,1} X_1 X_2 + a_{0,2} X_2^2 + a_{1,0} X_1 X_3 + a_{0,1} X_2 X_3 + a_{0,0} X_3^2$$

alakban.

Definíció. Legyen

$$H(X_1, X_2, X_3) = \sum_{0 \leq i+j \leq k} a_{i,j} X_1^i X_2^j X_3^{k-i-j}$$

egy háromváltozós valós együtthatós homogén k -adfokú polinom. Ekkor a

$$H(X_1, X_2, X_3) = 0$$

egyenlet egy *projektív görbét* definiál. A projektív görbe a projektív sík azon $P(x_1 : x_2 : x_3)$ pontjainak halmaza, amelyek homogén koordinátái kielégítik a $H(x_1, x_2, x_3) = 0$ egyenletet.

Ha így definiáljuk a görbét, akkor a projektív sík egy pontjának a görbére való illeszkedése független lesz attól, hogy a pontnak melyik homogén koordinátahármasát tekintjük. Ugyanis ha P a projektív sík egy pontja, amelynek $P(x_1 : x_2 : x_3)$ és $P(\lambda x_1 : \lambda x_2 : \lambda x_3)$ két koordinátahármasa, H pedig egy háromváltozós k -adfokú homogén polinom, akkor

$$\begin{aligned} H(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) &= \sum_{0 \leq i+j \leq k} a_{i,j} (\lambda x_1)^i (\lambda x_2)^j (\lambda x_3)^{k-i-j} \\ &= \sum_{0 \leq i+j \leq k} a_{i,j} \lambda^i x_1^i \lambda^j x_2^j \lambda^{k-i-j} x_3^{k-i-j} \\ &= \lambda^{i+j+(k-i-j)} \sum_{0 \leq i+j \leq k} a_{i,j} x_1^i x_2^j x_3^{k-i-j} = \lambda^k H(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Azaz $\lambda \neq 0$ miatt $H(x_1, x_2, x_3) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $H(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = 0$.

Tekintsük a projektív síkot mint az euklidészi sík kiterjesztését az ideális pontokkal és az ideális egyenessel. Legyen $\mathcal{G}$ egy affin görbe, amelyet az $F(X, Y)$ polinom definiál. Hogyan kaphatjuk meg $\mathcal{G}$ projektív síkra való kiterjesztését, azaz azt a $\bar{\mathcal{G}}$ projektív görbét, amelynek az euklidészi síkon lévő pontjai megegyeznek $\mathcal{G}$ pontjaival?

Ha F k -adfokú, akkor legyen

$$H(X_1, X_2, X_3) = X_3^k \cdot F(X_1/X_3, X_2/X_3).$$

Könnyen látható, hogy $H(X_1, X_2, X_3)$ homogén k -adfokú polinom. Mivel

$$H(x, y, 1) = 1^k \cdot F(x/1, y/1) = F(x, y),$$

ezért egy közönséges pont, $P(x_1 : x_2 : x_3)$, amelynek egy homogén koordinátahármasa $(x_1/x_3 : x_2/x_3 : 1) = (x : y : 1)$, pontosan akkor van a $H(X_1, X_2, X_3) = 0$ egyenletű projektív görbén, ha rajta van az $F(X_1/X_3, X_2/X_3) = 0$ egyenletű affin görbén. A projektív görbe azonban tartalmazhat az ideális egyenesen lévő pontokat is. Mivel koordináta-rendszerünkben a projektív sík egy pontja akkor és csak akkor ideális, ha harmadik koordinátája 0, ezért a görbe ideális pontjai kielégítik a $H(X_1, X_2, 0) = 0$ egyenletet.

Például ha az euklidészi síkon az $Y = mX + b$ egyenletű egyenest nézzük, akkor a megfelelő projektív görbe egyenlete

$$X_3 \left(m \frac{X_1}{X_3} - \frac{X_2}{X_3} + b \right) = 0, \text{ azaz } mX_1 - X_2 + bX_3 = 0.$$

Az $(x_1 : x_2 : 0)$ ideális pont pontosan akkor van a görbén, ha $x_2 = mx_1$, azaz a görbének egy ideális pontja van, az $(1 : m : 0)$ pont, mert a koordináták homogenitása

miatt $(x_1 : mx_1 : 0) \sim (1 : m : 0)$. Ez a számolás a várt eredményt hozta, az m meredekségű egyeneseknek egy közös ideális pontja van, és ez az $(1 : m : 0)$ pont. Ha az euklidészi sík $X = c$ egyenletű egyeneseit tekintjük, akkor a számolás azt adja, hogy a projektív síkra való kiterjesztettjeik egyenlete $X_1 - cX_3 = 0$, közös ideális pontjuk pedig a $(0 : 1 : 0)$ pont.

Összefoglalva a „függőleges” és a „nem függőleges” egyenesek esetét azt mondhatjuk, hogy az euklidészi sík $u_1X + u_2Y + u_3 = 0$ egyenletű egyenese projektív síkra való kiterjesztésének egyenlete $u_1X_1 + u_2X_2 + u_3X_3 = 0$. Ezen egyetlen ideális pont van, a $(-u_2 : u_1 : 0)$. Jegyezzük meg, hogy ez a koordinátahármas mindig egy pontot definiál, mert u_1 és u_2 egyszerre nem lehet 0, hiszen akkor az eredeti egyenlet nem egyenest definiálna. Az ideális egyenes a projektív sík azon pontjait tartalmazza, amelyek harmadik koordinátája 0, vagyis az ideális egyenes egyenlete $X_3 = 0$. Tehát a Π projektív sík egyeneseit azonosíthatjuk az $[u_1 : u_2 : u_3]$ hármasok osztályaival, és ez az azonosítás ugyanaz, mint amit az előző fejezetben az egyenesek homogén koordinátáinak bevezetésekor megadtunk.

Az $X^2 + Y^2 = 1$ egyenletű kör projektív kiterjesztettjének egyenlete

$$X_3^2 \left(\left(\frac{X_1}{X_3} \right)^2 + \left(\frac{X_2}{X_3} \right)^2 - 1 \right) = 0, \text{ azaz } X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = 0.$$

Az $(x_1 : x_2 : 0)$ ideális pont pontosan akkor van a görbén, ha $x_1^2 + x_2^2 = 0$, azaz ha nem csak x_3 , hanem x_1 és x_2 is 0. Viszont a $(0 : 0 : 0)$ az egyetlen olyan hármas, amely nem koordinátahármasa a projektív sík egyetlen pontjának sem, ezért a számolásunk azt adja, hogy az origó középpontú egységkör projektív kiterjesztettjének nincs ideális pontja. Ugyanerre az eredményre jutunk, ha egy ellipszis ideális pontjait keressük. Ez megfelel annak a szemléletes ténynek, hogy a kör és az ellipszis az euklidészi síkon korlátos alakzat, nem nyúlik a végtelenbe.

Az $Y = X^2$ egyenletű parabola projektív kiterjesztettjének egyenlete

$$X_3^2 \left(\frac{X_2}{X_3} - \left(\frac{X_1}{X_3} \right)^2 \right) = 0, \text{ azaz } X_2X_3 - X_1^2 = 0.$$

Az $(x_1 : x_2 : 0)$ ideális pont pontosan akkor van a görbén, ha $x_1^2 = 0$, azaz ha $x_1 = 0$. Tehát a homogenitást felhasználva azt kapjuk, hogy a parabola kiterjesztettjének egy ideális pontja van, $(0 : 1 : 0)$, ami megegyezik a függőleges egyenesek ideális pontjával. Szemléletesen az $Y = X^2$ parabola mindkét szára közelít a függőleges irányhoz, ha pontjainak első koordinátája a végtelenhez tart akár a pozitív, akár a negatív irányban.

Ezt a tényt egyszerű számolással beláthatjuk. Mivel a parabola szimmetrikus az Y tengelyre, ezért elég a pozitív első koordináták esetét vizsgálni. Ha n természetes szám, akkor a parabola (n, n^2) és $(n+1, (n+1)^2)$ pontjait összekötő egyenes meredeksége $((n+1)^2 - n^2)/((n+1) - n) = 2n+1$, ami $n \rightarrow \infty$ esetén a végtelenhez tart, ami a „függőleges” egyenesnek felel meg.

Az $XY = 1$ egyenletű hiperbola projektív kiterjesztettjének egyenlete

$$X_3^2 \left(\frac{X_1}{X_3} \frac{X_2}{X_3} - 1 \right) = 0, \text{ azaz } X_1 X_2 - X_3^2 = 0.$$

Az $(x_1 : x_2 : 0)$ ideális pont pontosan akkor van a görbén, ha $x_1 x_2 = 0$, azaz ha $x_1 = 0$, vagy ha $x_2 = 0$. Tehát a homogenitást felhasználva azt kapjuk, hogy az $XY = 1$ hiperbola kiterjesztettjének két ideális pontja van, $(0 : 1 : 0)$ és $(1 : 0 : 0)$. Ez is egybevág a szemléletünkkel, mert az első pont a „függőleges”, a második pedig a „vízszintes” egyenesek ideális pontja.

A hiperbolát, parabolát, ellipszist és a kört közös néven *kúpszeletnek* nevezzük, mert ezek a görbék előállnak egy egyenes körkúp és egy sík metszeteként (ennek szemléletes bizonyítását tartalmazza például az [5] cikk). Ezt úgy is fogalmazhatjuk, hogy a kúp alapkörét a kúp csúcsából középpontosan vetítve egy síkra kúpszeletet kapunk, a síknak a kúp forgástengelyével bezárt szögétől függően ellipszist (kört), parabolát vagy hiperbolát. Vagyis a kúpszeletek a projektív térben vetítéssel átvihetők egymásba. Az, hogy a projektív síkon a parabola és a hiperbola ugyanolyan görbék, jól látszik a homogén koordinátás egyenleteikből is. Ha a két egyenletben felcseréljük az X_1 és X_3 változókat, akkor az egyik egyenletből a másikat kapjuk. Jól ismert, hogy a két változó, X és Y felcserélése egy affin görbe egyenletében az euklidészi síkon a görbe $Y = X$ egyenletű egyenesre való tükrözésének felel meg. Egyszerű transzformáció a projektív síkon X_1 és X_3 felcserélése is, csak ezt a sík euklidészi részén nem látjuk egyszerűnek, mert ez a csere ideális pontokat közönséges pontokba képez, néhány közönséges pont képe pedig ideális lesz.

A dualitás

A homogén koordináták jól mutatják, hogy a klasszikus projektív síkon a pontok és egyenesek szerepe az illeszkedés szempontjából szimmetrikus: a $(v_1 : v_2 : v_3)$ pont akkor illeszkedik az $[u_1 : u_2 : u_3]$ egyenesre, ha $u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 0$. Érdeemes belegondolni, hogy ha két pont összekötő egyenesének koordinátáit, vagy két egyenes metszéspontjának koordinátáit szeretnénk kiszámolni, akkor az O -pont modellben mindkét esetben egy olyan vektort keresünk, amely két adott, egymással nem párhuzamos vektorra merőleges. Két pont, P_1 és P_2 esetén a keresett vektor az OP_1 és OP_2 egyenesek által meghatározott sík egy normálvektora, két egyenes, e_1 és e_2 esetén pedig az $\langle O, e_1 \rangle$ és $\langle O, e_2 \rangle$ síkok metszésvonalának egy irányvektora. Ennek alapján az **1. Tételben** szereplő két állítás egyszerre fogalmazható meg a következő formában: *az euklidészi térben két nem párhuzamos vektor egyértelműen meghatározza a mindkettőre merőleges vektorok osztályát.*

Két adott vektorra merőleges vektort vektorok vektoriális szorzatát felhasználva lehet megadni: az egymással nem párhuzamos $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ és $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ vektorok esetén ezek a nullvektortól különböző

$$(1) \quad \mathbf{v} \times \mathbf{w} = (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

vektorral párhuzamos vektorok. Ennek bizonyítása azonban meghaladja cikkünk kereteit, az érdeklődő olvasó például a [6] könyvben nézhet utána. Vagyis az **S1** és **S2** állítások bizonyításánál tulajdonképpen ugyanazt kell csinálnunk, csak az első esetben két kerek zárójeles koordinátahármashoz keresünk egy szögletes zárójelben

lévőt, míg a második esetben két szögletes zárójeles koordinátahármashoz keresünk egy kerek zárójelben lévő. Ebből az észrevételből következik a klasszikus projektív síkbeli dualitás elve.

Ha a klasszikus projektív síkon egy állítás megfogalmazható pontokkal, egyenesekkel és azok illeszkedésének segítségével, akkor az állítás pontosan akkor igaz, ha a duálisa igaz. A duális állítást úgy kapjuk, hogy a pontok és az egyenesek szerepét felcseréljük.

Az állításban formálisan csak az illeszkedés szerepelhet, azaz „két pont összekötő egyenese” helyett azt mondjuk, hogy egy „olyan egyenes, amely mindkét pontra illeszkedik”, aminek a duálisa az, hogy „olyan pont, amely mindkét egyenesre illeszkedik”, azaz a két egyenes metszéspontja.

Például két azonos síkban lévő háromszög pontra, illetve egyenesre való perspektivitásának fogalmai egymás duálisai. Desargues tételének már bebizonyított irányát pedig egysíkú háromszögek esetén a következőképpen is megfogalmazhatjuk:

Ha a $P_1P_2P_3$ és $R_1R_2R_3$ csúcsokkal és $p_1 = P_2P_3$, $p_2 = P_3P_1$, $p_3 = P_1P_2$, valamint $r_1 = R_2R_3$, $r_2 = R_3R_1$, $r_3 = R_1R_2$ oldalegyenesekkel adott háromszögek által meghatározott P_iR_i egyenesek ($i = 1, 2, 3$) mindegyike illeszkedik egy E pontra, akkor a $p_i \cap r_i$ pontok ($i = 1, 2, 3$) mindegyike illeszkedik egy e egyenesre.

A dualitás elve miatt tehát igaz a következő is:

Ha a $p_1p_2p_3$ és $r_1r_2r_3$ oldalegyenesekkel és $P_1 = p_2 \cap p_3$, $P_2 = p_3 \cap p_1$, $P_3 = p_1 \cap p_2$, valamint $R_1 = r_2 \cap r_3$, $R_2 = r_3 \cap r_1$, $R_3 = r_1 \cap r_2$ csúcsokkal adott háromszögek által meghatározott $p_i \cap r_i$ pontok ($i = 1, 2, 3$) mindegyike illeszkedik egy e egyenesre, akkor a P_iR_i egyenesek ($i = 1, 2, 3$) mindegyike illeszkedik egy E pontra.

Ez pedig éppen a tétel másik iránya.

A 3-dimenziós projektív tér O -pont modellje

Ebben az utolsó, rövid fejezetben feltételezzük, hogy az olvasó ismeri a valós számok feletti vektortér fogalmát. Ezt felhasználva az O -pont modell alapján a klasszikus projektív síkot a következő módon is megadhatjuk.

Legyen V_3 a 3-dimenziós $\mathbb{R}^3$ vektortér a valós számok $\mathbb{R}$ halmaza felett. A klasszikus projektív sík a következő:

A sík pontjai V_3 -nak az 1-dimenziós alterei (azaz az O -n átmenő egyenesek), a sík egyenesei pedig V_3 -nak a 2-dimenziós alterei (azaz az O -n átmenő síkok).

Egy pont pontosan akkor illeszkedik egy egyenesre, ha a pontnak megfeleltetett 1-dimenziós alteret tartalmazza a síknak megfeleltetett 2-dimenziós alterné.

Ez a fajta leírás magasabb dimenziókban is működik, de mi most csak a 3-dimenziós klasszikus projektív teret adjuk meg, feladatnak hagyjuk az n -dimenziós tér leírását.

Legyen V_4 a 4-dimenziós $\mathbb{R}^4$ vektortér a valós számok $\mathbb{R}$ halmaza felett. A klasszikus projektív tér a következő:

A tér pontjai, egyenesei és síkjai V_4 -nek rendre az 1-, 2- és 3-dimenziós alterei.

Az U és V projektív alterek akkor illeszkednek egymásra, ha a nekik megfeleltetett vektortérbeli alterek közül az egyik tartalmazza a másikat.

Ezt a reprezentációt használva az **S1** és a **T1** állítások azt mondják, hogy két különböző 1-dimenziós altérhez egyértelműen létezik mindkettőt tartalmazó 2-dimenziós altér, **T3** pedig azt, hogy ha három különböző 1-dimenziós altér nincs benne egy 2-dimenziós altérben, akkor egyértelműen létezik mindhámat tartalmazó 3-dimenziós altér. Ezek nyilvánvalóan teljesülnek a vektorterekben. Az **S2** állítás azt jelenti, hogy egy 3-dimenziós térben két különböző 2-dimenziós altérhez egyértelműen létezik olyan 1-dimenziós altér, amelyet mindkét 2-dimenziós tartalmaz, a **T5** állítás pedig azt jelenti, hogy egy 4-dimenziós térben két különböző 3-dimenziós altérhez egyértelműen létezik olyan 2-dimenziós altér, amelyet mindkét 3-dimenziós tartalmaz. Minthogy két altér metszete is altere a vektortérnek, ezért csak a metszettek dimenziójáról kell megmutatnunk, hogy az **S2** esetében 1, **T5** esetében pedig 2. Két különböző 2-dimenziós altere generálja a teljes 3-dimenziós teret, illetve két különböző 3-dimenziós altere generálja a teljes 4-dimenziós teret, ezért a metszetek dimenziói azonnal következnek az úgynevezett *dimenzióformulából*, amely szerint ha U és V egy véges dimenziós vektortér alterei, akkor az $\dim U$, valamint az általuk generált $\langle U, V \rangle$ altér és metszetük dimenzióira teljesül, hogy

$$\dim U + \dim V = \dim(\langle U, V \rangle) + \dim(U \cap V).$$

Ugyancsak a dimenzióformulából következnek a **T2** és **T4** állítások is. Ha U és V két különböző egyenesnek megfelelő altér, akkor $\dim U = \dim V = 2$ és $\dim(U \cap V) = 1$ vagy 0, attól függően, hogy a két egyenes metsző vagy kitérő. Vagyis az első esetben $\dim(\langle U, V \rangle) = 2 + 2 - 1 = 3$, azaz a két egyenes egysíkú, míg a második esetben $\dim(\langle U, V \rangle) = 2 + 2 - 0 = 4$, azaz a két egyenes a teljes 3-dimenziós teret generálja. Ez bizonyítja **T2**-t. A **T4** állítás bizonyításánál ha a síknak megfelelő 3-dimenziós U altér nem tartalmazza az egyenesnek megfelelő 2-dimenziós V alteret, akkor a teljes vektorteret generálják, vagyis $\dim(\langle U, V \rangle) = 4$. Ekkor viszont a dimenzióformulából adódóan $\dim(U \cap V) = 3 + 2 - 4 = 1$, tehát $U \cap V$ egy pont.

A dualitás elvének is létezik 3-dimenziós (és magasabb dimenziós) változata, erre azonban már csak területi korlátok miatt sem térünk ki. Sok egyéb projektív geometriai tétel mellett erről is bővebben lehet olvasni az [1] könyvben. Akik alaposabban szeretnék megismerni a matematika ezen klasszikus fejezetét, azoknak az [1] könyv mellett a [6] könyvet ajánljuk.

Feladatok

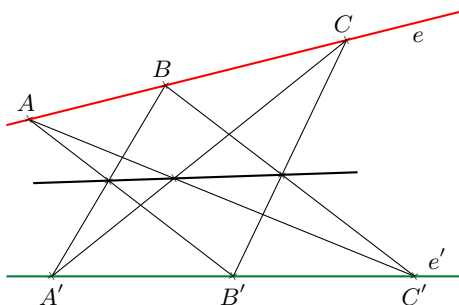
- Legyen E és e a klasszikus projektív sík egy pontja és egy egyenese. Rajzoljunk le két olyan háromszöget az euklidészi síkon, amelyek e -re is és E -re is perspektívek, ha
 - e az ideális egyenes és E egy ideális pont;
 - e az ideális egyenes és E egy közöséges pont;
 - e egy közöséges egyenes és E egy ideális pont;
 - e egy közöséges egyenes és E egy rajta lévő pont.
- Jelöljük az euklidészi síkon lévő $A_1 A_2 A_3$ háromszög A_i csúcshoz tartozó magasságának talppontját M_i -vel ($i = 1, 2, 3$). Mutassuk meg, hogy az euklidészi sík kiterjesztésével kapott klasszikus projektív síkon az $A_1 A_2 \cap M_1 M_2$, $A_2 A_3 \cap M_2 M_3$ és $A_3 A_1 \cap M_3 M_1$ pontok kollineárisak.
- Mutassuk meg, hogy ha a klasszikus projektív síkon lévő $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$ és $C_1 C_2 C_3$ háromszögek ugyanarra az E pontra nézve perspektívek, akkor az

egyes háromszögpárokhoz tartozó e_{AB} , e_{BC} és e_{CA} perspektivitási tengelyek egy ponton mennek át.

4. Mutassuk meg, hogy ha a projektív térben adott két kitérő egyenes, e és f , valamint az egyikükre sem illeszkedő P pont, akkor pontosan egy olyan P -n átmenő egyenes van, amely e -t is és f -et is metszi. Igaz-e ez az állítás az euklidészi térben?
5. Határozzuk meg az euklidészi síkon adott

$$8Y^2 + 6XY - 12X - 26Y + 11 = 0$$

egyenletű görbe projektív kiterjesztettjének egyenletét. Számítsuk ki a görbe ideális pontjainak koordinátáit és ábrázoljuk a görbét.



10. ábra

6. Papposz tétele szerint (bizonyítása megtalálható például a [6] könyv 17.4 fejezetében) ha e és e' a klasszikus projektív sík két egyenese, A , B , C és A' , B' , C' az e , illetve az e' egyenes három-három páronként különböző olyan pontja, amelyek a két egyenes metszéspontjától is különböznek, akkor az $AB' \cap A'B$, $AC' \cap A'C$ és $BC' \cap B'C$ pontok kollineárisak.

Mit állít Papposz tételének duálisa?

7. Mutassuk meg, hogy ha az (1) formulát az $(x_1 : y_1 : 1)$ és $(x_2 : y_2 : 1)$ közöséges pontokra, illetve az $(x_0 : y_0 : 1)$ közöséges és az $(1 : m : 0)$ ideális pontra alkalmazzuk, akkor megkapjuk az euklidészi sík két adott ponton átmenő egyenesének egyenletére, illetve az adott ponton átmenő, adott meredekségű egyenes egyenletére vonatkozó képleteket.

Irodalomjegyzék

- [1] Csikós B. és Kiss Gy.: *Projektív geometria*, Polygon Kiadó, Szeged, 2011.
- [2] Kiss Gy. és Szőnyi T.: *Véges geometriák*, Polygon Kiadó, Szeged, 2001.
- [3] Kiss Gy.: *Desargues tétele*, Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok 57 (2007), 130–137.
- [4] Kós G.: *Térbe kilépő bizonyítások I, Projektív geometriai tételek*, Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok 69 (2019), 389–397.
- [5] Kós R.: *Kúpszeletek és Dandelin gömbjeik*, Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, <https://www.komal.hu/cikkek/dandelin/dandelin.h.shtml>
- [6] Reiman I.: *Geometria és határterületei*, Szalay Könyvkiadó, Kisújszállás, 1999.
- [7] Schmidt T.: *Geometriai terek az algebra szemszögéből*, Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok 54 (2004), 199–206.

Kiss György

ELTE Geometriai Tanszék

Ha ez a háromszög beszélni tudna, mit mondana erről a merőlegesről?



A cím egy tipikus Róka Sándor kérdés, amellyel egy versenyfelkészítő táborban segítette tovább a megoldás útján a diákokat, akik órák óta küzdöttek egy bonyolult geometriai bizonyítással.

És vajon mi a közös a következő tételekben, állításokban?

1. Egy n csúcsú fagrafnak $n-1$ éle van (olyan összefüggő gráf, amelyben nincsen kör).
2. Írjunk fel egy pozitív n egész számot különböző módon pozitív egészek összegeként (a sorrendtől eltekintve), amelyekben a legnagyobb tag k . Az ilyen összegek száma pontosan annyi, mint ahány módon fel tudjuk írni n -et k darab pozitív egész összegként.
3. Erdős–Szekeres-tétel: A különböző valós számokból álló $a_1, a_2, \dots, a_{mn+1}$ sorozatnak vagy létezik egy m -nél hosszabb csökkenő részsorozata, vagy van egy n -nél hosszabb növekvő részsorozata.

Ahelyett, hogy valamilyen mesterséges intelligenciának passzolnánk tovább a kérdést – ami jelen esetben nem is ad mindenki számára világos választ – érdekesebb elolvasni Róka Sándor „Ló és lovasa, avagy a párbaállítás módszere” című cikkét. (KöMaL, 1996. január 1–3.o., április 193–196.o., <http://db.komal.hu/KomaLHU/index.phtml>).

A szerzőnek nem ez a kétrészes cikk volt az egyetlen KöMaL-ban megjelent írása. A Rátz László Vándorgyűlések elmaradhatatlan tanárversenyéről szóló beszámolóin túl főleg és leginkább kitűzött feladatai jelentek meg a különböző pontversenyekben.

A kömalozók közül sokan kezdték a megoldások beküldését korábban, már az ABACUS feladatainak megoldásával. Ezt a folyóiratot Róka tanár úr alapította az első KöMaL szám megjelenésének 100-adik évfordulóján, 1994-ben. Ez a kezdeményezés az Egyesült Államokba is eljutott, és negyedszázada már ott is megjelenik az ABACUS angol nyelvű fordítása, és működik a pontversenye is.

Róka Sándornak mintegy 30 cikke jelent meg különböző folyóiratokban és közel 80 könyve. Egész matematikusi, tanári pályáját folyamatos és szorgalmas tematikus gyűjtés és újszerű tudásátadás jellemzi. Bizonyíték erre – több más könyve mellett – a „Hány éves a kapitány?”, a „Logika-land” vagy a „Válogatás Erdős Pál kedvenc feladataiból” feladatgyűjteménye. A középiskolás korosztály leginkább talán a „2000 feladat az elemi matematika köréből” című könyvével találkozott, de sok fiatal tehetség az Erdős Pál Matematikai Tehetséggondozó Iskola tanáraként is megismerte őt. Az Érintőben Héttusa néven vezet népszerű, változatos feladatokat kitűző rovatot (<https://ematlap.hu/hettusa>).



Róka Sándor



Róka Sándor fáradhatatlan munkájának csak a legismertebb szeleteit felsorolva nem meglepő – és nagy öröm –, hogy számtalan hazai szakmai díj mellett **idén februárban egy nemzetközi díjjal is gazdagodott, megkapta a WFNMC Erdős Pál-díját.**

A Nemzeti Matematika Versenyek Világszövetsége (World Federation of National Mathematics Competitions – www.wfnmc.org) az Erdős Pál-díjat olyan matematikusoknak adományozza, akik hazai vagy nemzetközi versenyek szervezésével, illetve szakmai munkájukkal jelentősen hozzájárultak ahhoz, hogy a matematikában tehetséges fiatalok minél szélesebb körben vehessenek részt magas színvonalú megmérettetésekben. (<https://www.wfnmc.org/awards.html>) A díj igazán nemzetközi, a kitüntetettek között minden lakott kontinens képviselteti magát. 1992 óta ítélik oda, eddig összesen 54-en kapták meg, köztük öt magyar és egy magyar születésű amerikai. (1996 – George Berzsenyi, 2000 – Reiman István, Surányi János, 2014 – Pelikán József, 2022 – Kós Géza, 2026 – Róka Sándor) A legtöbb díjjal – héttel – az Amerikai Egyesült Államok büszkélkedhet, ezt követi Ausztrália és Magyarország 5-5 díjjal, majd Kína 3-mal.

A díj egy újabb, nemzetközi elismerése Róka Sándor ama elhivatottságának, szép problémák iránti fogékonyságának, amelyet a KöMaL-ban 1987-től 2026-ig kitűzött 70 feladata is mutat.

Kérdésünkre, hogy melyik a kedvenc feladata a hetvenből, több jelöltet is küldött, amelyekhez személyes megjegyzéseket is írt. Ezek közül az Erdős Pálhoz köthető feladatát választottuk ki arra, hogy itt megosszuk a KöMaL olvasóival:

B. 5004. (2019. január) $2n$ egymást követő egész szám között legfeljebb hány olyan lehet, amely osztható az $n + 1$, $n + 2$, ..., $2n$ számok közül legalább az egyikkel? (6 pont) (Róka Sándor, Nyíregyháza)

„Úgy 50 éve szeretem Erdős $n-2n$ feladatait:

1. Ha az $1, 2, \dots, 2n$ számokból kiválasztunk $n + 1$ darabot, lesz közte kettő, amelyek relatív prímek.
2. Ha az $1, 2, \dots, 2n$ számokból kiválasztunk $n + 1$ darabot, lesz közte kettő, hogy egyik osztója a másiknak.

És még van néhány ilyen feladata.

Erdős egy kongruenciarendszeres feladatáról írt, hogy ott a kérdésre milyen maximumot sejt. Meglepte, hogy téves volt a sejtése. A kongruenciarendszeres feladatot oszthatósági kérdésre fordítottam, és küldtem a KöMaL-nak.

Meglepett, hogy más volt a válasz, mint ahogyan én tudtam. Elrontottam a feladatot, mégpedig ott, hogy a kongruenciás kérdést pontatlanul ültettem át oszthatóságra. Más lett a feladat, mint amit Erdősnél olvastam. De – bár véletlenül – egy szép feladat lett belőle, amelynek szép a megoldása is.” (Lásd [3] 243. oldal alja–244. oldal.)

Tanár úrnak ezúton is gratulálunk! Kérjük, tartsa meg jó szokását, és javasoljon még további szép és érdekes Róka-feladatokat!

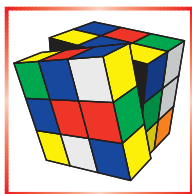
Olvasóinkat pedig bátorítjuk, hogy gondolkozzanak a cikkben idézett feladatokon. Oldják meg a KöMaL és a Héttusa feladatait, majd olvassák el a feladatok megoldását és a szerkesztői megjegyzéseket.

Egy friss hír. Az American Mathematical Society (AMS, <https://www.ams.org/home/page>) kiadója, az MAA Press hamarosan megjelenteti a „Válogatás Erdős Pál kedvenc feladataiból” című könyv ([5]) angol nyelvű kiadását Freud Róbert fordításában.

Források

- [1] <https://www.facebook.com/lovasz.laszlo.matematikus/posts/aki-megszeliditette-a-matematikat-roka-sandor-nyerte-el-a-world-federation-of-nat/1266727052103932/>
- [2] <https://www.wfnmc.org/erdroka.html>
- [3] Erdős Pál: Extremális problémák a számelméletben I. (Számelméleti megjegyzések IV., Matematikai Lapok, 1962, 228–254.o.) https://www.renyi.hu/~p_erdos/1962-23.pdf
- [4] https://www.typtex.hu/author/211/roka_sandor
- [5] https://www.typtex.hu/upload/book/13056/rokau310_medium.jpg

Kós Rita



Rejtvények, ördöglakatok

Néhány további bepakoló

Rovatunkban minden hónapban valamilyen szórakoztató matematikai fejtörőt mutatunk be. Ezek között fontos helyet foglalnak el a különböző kirakós játékok, topológiai feladványok, ördöglakatok és a matematikát felhasználó bűvészmutatványok.

Manapság szinte mindent meg lehet találni az interneten, de az igazi élményt az adja, ha a feladatokat magunk oldjuk meg, a bűvészmutatványok trükkjeit mi találjuk ki, és a szükséges kellékeket is mi tervezzük meg és készítjük el. Próbáljuk meg a feladatokat továbbgondolni, általánosítani, igyekezzünk új feladatokat kitalálni.

A KöMaL 2026. februári számában Szilassi Lajos mutatta be nekünk Tom O'Beirne *Olvasztótégely* nevű játékát. Ez a feladvány tulajdonképpen egy összerakó játék, ahol a megadott elemekből egy előre meghatározott formát kell építenünk. Az összerakók a logikai játékok egy meghatározó (talán a legnagyobb) csoportját alkotják. Ezen a nagy csoporton belül találjuk a bepakoló játékokat, ahol a célt egy doboz („tároló forma”) jelöli ki. Ez néha csak a feladat „megfogalmazása” (azaz a cél forma kijelölése) miatt praktikus, néha a játék szépségéhez is hozzáad (például az Olvasztótégelynél egyértelműen kihangsúlyozza a játék paradox jellegét is), de bizonyos feladványoknál komolyabb megszorításokat is jelent: többnyire a dobozon kívül nagyon könnyű a kívánt forma összeállítása, de a dobozba betenni kimondottan nehéz.

Egy klasszikus, általában John Conwaynek tulajdonított feladvány, hogy állítsunk össze egy $3 \times 3 \times 3$ -as kockát hat darab $2 \times 2 \times 1$ méretű négyzetes oszlopból és három darab egységkockából. Ennél a feladványnál nem lényeges, hogy legyen egy doboz, amibe bepakolhatunk (bár az elemek tárolása miatt mindenképp praktikus). A szükséges darabokat viszonylag könnyen elkészíthetjük, akár egy fa építőjáték néhány eleméből összeragasztva, de ezen a feladaton nyugodtan lehet akár fejben, eszközök nélkül is gondolkodni, nem reménytelen rájönni a megfejtésre.

A 2018-as International Puzzle Party játéktervezői versenyének [2] nagydíját ennek a játéknak egy trükkös variánsa nyerte, amelyet Volker Lattusek tervezett, és Casino néven vált ismertté. A feladat, hogy pakoljunk bele hat darab, két egység átmérőjű, egy egység magas egyenes körhengert (kaszinó zsetont) egy $3 \times 3 \times 3$ méretű kockába. Ez természetesen még az előző játék megoldása alapján könnyen megtehető. A nehezítés a feladványban, hogy a doboz nyitott tetejének két oldalát egy-egy fél egység széles téglalap takarja, így a bepakolást egy 2×3 méretű „lyukon” keresztül kell elvégezni. Ez az aprónak tűnő módosítás különleges csavart visz a feladványba. Jegyezzük meg, hogy itt nyilvánvalóan



1. ábra. A Casino a

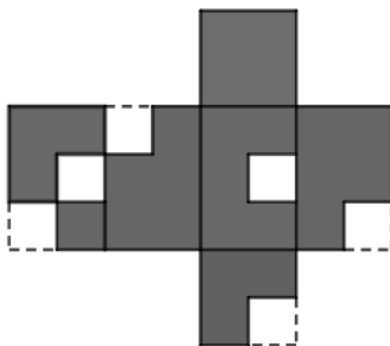
<https://cubicdissection.com>
kivitelezésében

nem cél a teljes doboz kitöltése az elemekkel, így nem világos a végállapot, tehát ebben is eltérhetnek a bepakolók a klasszikus összerakóktól. A Casino nyomtatható tervei ingyenesen letölthetőek [1], de több kivitelben kapható is.

A bepakoló játékok magyar vonatkozása, hogy a kategória egyik legismertebb és legismertebb tervezője **Molnár László**, számos alkotása elérhető kereskedelmi forgalomban is, lásd például a [3] oldalon. Mi itt most a Minima Fibonacci sorozatára szeretnénk felhívni a figyelmet, ahol szintén polikockákat kell egy dobozba bepakolni. A bepakolandó polikockák térfogata rendre 1, 1, 2, 3 és 5 egységnyi, innen kapta a játék a nevét. (Apróbb kivétel a 3 sorszámú, ahol a két egységnyi kocka is össze van ragasztva, tehát annak csak négy eleme van, 2, 2, 3 és 5 térfogattal.) A doboz minden esetben egy $2 \times 2 \times 3$ téglatest, de a bepakoláshoz csak speciálisan elhelyezett „ajtókat” használhatunk.



2. ábra. A Minima Fibonacci 1 a <https://nothingyetdesigns.com> kivitelezésében



3. ábra. A Minima Fibonacci 1 dobozának testhálójá

A Minima Fibonacci 1 elemkészlete jól látszik a 2. ábrán. A doboz pontos megadásához pedig a 3. ábrán lerajzoltuk a testhálót, szürkével jelölve a tömör részeket, az ajtókat kihagyva. Ezek alapján a játék házilag is elkészíthető.

A Minima Fibonacci játéksorozat másik két tagjáról a borítón látható fotó.

Hivatkozások

- [1] <https://www.printables.com/model/67158-casino-puzzle-by-volker-latussek/files>
- [2] <https://puzzleworld.org/DesignCompetition/2018/results.htm>
- [3] <https://www.nothingyetdesigns.com/collections/laszlo-molnar>
- [4] Gál Péter, személyes kommunikáció.

Jó szórakozást!

Vígh Viktor



Beszámoló a 2026. évi EGMO versenyről



Az idei Európai Lány Matematika Diákolimpiát (EGMO) 2026. április 9. és 15. között tartották Bordeaux-ban, Franciaországban. A versenyen 67 ország 260 diákja vett részt, köztük 41 európai ország 161 diákja. A versenyzők két egymást követő napon 3-3 feladat megoldásában mérték össze tudásukat, mindkét feladatsoron 4 és fél órát dolgozhattak.

A magyar csapat szép eredménnyel, 1 ezüst és 3 bronzéremmel tért haza, ezzel az összes ország között a 17. helyet, a 41 európai ország között pedig a 9. helyet szerezte meg hazánknak.

A magyar küldöttség tagjai voltak a versenyzők – Bodor Noémi (Debreceni Fazekas

Mihály Gimnázium), Sárdinecz Dóra (Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium), Varga Vivien (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium), Zhai Yufan (Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium) –, valamint Kiss Melinda Flóra csapatvezető, Velich Nóra csapatvezető helyettes és Györffy-Kerekes Anna megfigyelő.

A versenyzőink eredményei:

Bodor Noémi 18 ponttal ezüstérmes,

Zhai Yufan 17 ponttal bronzérmes,

Sárdinecz Dóra 16 ponttal bronzérmes,

Varga Vivien 14 ponttal bronzérmes szerzett.

Ezúton is köszönjük a Gondolkodás Öröme Alapítvány támogatását!

A versenyzők beszámolójából betekintést nyerhetünk az esemény részleteibe is:

Az idei EGMO Bordeaux-ban került megrendezésre, ezen vettünk részt április 9. és 15. között. Csütörtök reggel a budapesti reptéren megkaptuk az általunk tervezett csapatpulcsikat, továbbá egy-egy plüss kockásfülű nyulat kabalaként. Mintegy másfél órás repülőút után a zürichi reptérre érkeztünk, ahol találkoztunk a luxemburgi csapattal. Innen már közvetlen repülőjárat vitt minket Bordeaux-ba, ahol kora délután szikrázó napsütés és lelkes guide-ok fogadtak minket.

Ezután egy meglepően hosszú villamosozás következett. A szervezőktől egyhetes bérleteket kaptunk, így a továbbiakban is nagyrészt tömegközlekedéssel utaztunk. Délután 4 körül végre megérkeztünk a négycsillagos hotelünkbe, ahol döbbenet tapasztaltuk, hogy a kinti 30 fok ellenére sem működik a légkondi. A hőség elől egy közeli fagyizóba menekültünk, ahol rendkívül kedves kiszolgálásban volt részünk.

A vacsora az eredeti 19 órához képest fél órával később kezdődött, de a svédasztalos étkezésre megérte várni. Estére már egyre több versenyzőt zavart a meleg, ezért a recepción lehetett ventilátorokat igényelni, és a szervezők éjszakai szellőztetést javasoltak. Ez csak részben volt hatékony, így az utazás fáradalmait nem mindenkinek sikerült kipihennie másnap reggelig.

Reggeli után A nagy pénzrablás témájú szabadulószerű „Kincs vadászat” keretében volt lehetőségünk felfedezni Bordeaux belvárosát.

Közben megismerkedtünk az idegenvezetőnkkel, Lamiával is, aki érdekes dolgokat mesélt a tanulmányairól és Párizsról, valamint megkínált minket a környék jellegzetes édességével, a cannelével. Ebéd után visszaindultunk a hotelbe, útközben azonban azzal szembesültünk, hogy az egyetlen közelben lévő hídon nem tudunk átmenni, mert a közepe fel van emelve nagyjából 40 méter magasra, hogy egy teherszállító hajó átmehessen alatta.

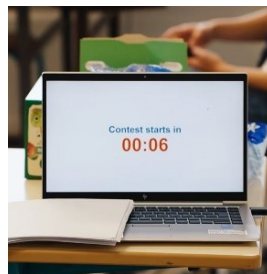
Mintegy 20 perc várakozás után végül leengedték a hidat, és sikerült időben visszaérnünk a szállásra. Késő délután sor került a nyitóünnepségre, ahol inspiráló beszédek és remek zenei aláfestést hallhattunk, továbbá egy vicces bűvész előadást is megtekinthettünk, majd bemutatásra kerültek a résztvevő csapatok.

Este 10-kor, miközben készülődtünk a lefekvéshez, hangos dudálásra és berregésre lettünk figyelmesek. Az ablakon kinézve láttuk, ahogy motorosok egész serege 5 percen keresztül vonult fel a lehető legnagyobb zajt keltve (azóta sem derült ki, hogy miért).

Reggel fájdalmasan korán, 7-kor kellett elindulnunk a 9-kor kezdődő versenyre, mert a szervezők attól tartottak, hogy egy tömegközlekedési sztrájk miatt problémák lehetnek a villamosozással. Ennek következtében kihagytuk a reggelit a hotelben, hogy a lehető legtávolabbi alhassunk, és Nóri csomagolt nekünk szendvicseket. Végül semmilyen hatását nem tapasztaltuk a sztrájknak, így már 8 előtt megérkeztünk a verseny helyszínére.

A fennmaradó időben Nóri jótanácsokkal látott el minket.

A verseny meglepően nehéz volt, mindegyikőnknek csak 1–1,5 feladatot sikerült megoldania a 3-ból. Délután hajókirándulásra indultunk, Dóri és Nancy pedig kipróbálták a hotel edzőtermét. A szervezők nem tudták pontosan, hogy honnan indul a hajó, így nem szálltunk tömegközlekedésre, és a tervezett 20 perc sétából 40 perc lett. Közben végig esett az eső, így működő esernyő hiányában már az odaúton bőrig áztunk.



A hajón sem sikerült megszáradnunk, de kaptunk üdítőt, és meghallgathattuk a város érdekes történetét.



Visszafelé már villamossal mentünk, majd a hotelben egy forró zuhannyal melegedtünk fel. Vacsora után biliárdozással múltunk az időt.

Vasárnap reggel kicsit később indultunk a verseny helyszínére, mint szombaton. Legnagyobb csalódásunkra a feladatok még az előző napinál is nehezebbnek bizonyultak, és a témaköreik sem voltak kedvezőek számunkra. Délután agyagozással vezettük le a feszültséget.



Este a Jane Street által szervezett vacsorára indultunk, ami Bordeaux legikonikusabb épületében, a Palais de la Bourse-ban, került megrendezésre. Rengeteg vadonatúj társasjáték, játékgépek, sőt még egy karaokefülke is rendelkezésünkre állt, és sokféle ételt és italt fogyaszthattunk korlátlan mennyiségben.





Este 9 körül izgatottan tértünk vissza a szállodánkba, mert addigra Melindáék kijavították a megoldásainkat, és végre megtudhattuk az előzetes pontszámainkat.

Hétfő reggel Saint-Émilionba indultunk, egy egész napos kirándulásra. Ott körbevezettek minket a Balestard borászat területén, ami az egyik legnevesebb a régióban.

Betekintést nyerhettünk a prémium borok készítésébe, a szőlő gondozásától a hordós érlelésig. Ezek után az épület teraszán kaptunk ebédet, ami kis szendvicsekből és salátákból állt. Végül délután Saint-Émilion városában vezettek körbe minket, annak összes nevezetességét érintve. Ez nagyon érdekes volt, meglátogattunk többek között katakombákat és egy templomot, amit teljes egészében sziklába vájtak. Amíg mi kirándultunk, Melinda, Anna és Nóri a szállodában maradtak, ahol a nap folyamán lezajlott a koordinálás.



Másnap szintén kirándulással indítottunk, ezúttal a Dune du Pilathoz mentünk, ami egy magas homokdűne az óceánparton. Ekkor már csatlakozhattak hozzánk a csapatvezetők is.

Közösen felsétáltunk a dűne tetejére, ahonnan gyönyörű volt a kilátás, és lehetőségünk volt sok fényképet készíteni. A nap végén került sor a záróceremóniára.

Beszédek hangoztak el a szervezőktől, és volt egy rövid zenei előadás is. Végül mind megkaptuk az érmeinket. Miután véget ért a ceremónia és sok csoportképet csináltunk, visszamentünk a szállásra. Ott vacsoraként egy állófogadás szolgált, ahol az ételek apró adagokban voltak az asztalokra téve. Az estét élő zenével kísérte a már korábban megismert együttes. Mint megtudtuk, a szerda esti repülőjáratunkat törlték, ezért csak csütörtök reggel tudunk hazaindulni.

Így azonban még egy teljes napot maradhattunk a városban a verseny után, és ezt igyekeztünk minél jobban kihasználni. Néhány órát szabadon sétáltunk a városban, vettünk szuveníreket és édességeket. Majd Dóri elment egy közeli mászóterembe, a többiek pedig egy immerzív kiállításra, aminek a Kis herceg volt a témája. Habár a szöveg franciául volt, a képeket mindannyian tudtuk csodálni.

Másnap már csak a hazaút várt ránk, ami kifejezetten hosszúnak érződött a 4 órás párizsi átszállás miatt. Végül délután érkezünk haza, kissé már fáradtan. A verseny azonban mindannyiunk számára egy emlékezetes élmény volt egy szép helyen, amire szívesen gondolunk vissza.



A jövő évi verseny Horvátországban lesz 2027. áprilisában. A válogatási folyamat és a felkészítő program részleteiért a <https://cms.renyi.hu/olimpiak/> oldal EGMO fülét érdemes figyelni 2026. július közepétől. 😊

Bátran jelentkeztek, a felkészülésbe szívesen várunk minden olyan lányt, akit érdekelne a versenyen való részvétel lehetősége vagy csak szeretne több időt tölteni komolyabb matematikafeladatok megoldásával.

Kiss Melinda Flóra, Györffy-Kerekes Anna, Velich Nóra
az EGMO felkészítő csapat nevében

A 2026. évi EGMO feladatai

1. nap

1. feladat. Egy 2026×2026 -os négyzetrácsot *bordónak* nevezzünk, ha a 2026^2 darab egységcellája közül legalább egy pirosra van színezve. Egy cellából álló téglalap alakú régiót *páratlanosnak* hívunk, ha páratlan sok piros cellát tartalmaz. Határozd meg azt a legnagyobb pozitív egész M számot, amelyre bármely 2026×2026 -os bordó négyzetrács esetén létezik egy legalább M cellából álló páratlanos régió.

Megjegyzés: Egy téglalap alakú régió oldalai párhuzamosak a négyzetrács oldalával és tartalmazza a belsejét.

2. feladat. Adott egy pozitív egész n . Mária a következő játékot játssza a táblán: kezdetben felírja az 1-et, majd minden lépésben választ egy $1 \leq j \leq n$ egész számot és a táblán szereplő V számot lecseréli a $j \cdot R\left(\frac{V}{j}\right)$ számra, ahol $R(x)$ az x -hez legközelebbi egész számot jelöli. Ha az x éppen félúton van két szomszédos egész szám között, akkor felfelé kerekít. Például $R(1,3) = 1$ és $R(1,5) = R(1,8) = 2$.

- Bizonyítsd be, hogy minden adott n -re létezik olyan B pozitív egész szám, amelynél nagyobb számot Mária sohasem írhat fel a táblára.
- Egy n egész számra jelölje $f(n)$ a legnagyobb számot, amelyet Mária a táblára véges sok lépés után felírhat. Bizonyítsd be, hogy létezik N pozitív egész, amelyre minden $n \geq N$ esetén $f(n)$ osztható 2026 -tal.

3. feladat. Jelölje $\mathbb{R}$ a valós számok halmazát. Határozd meg az összes $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelyre tetszőleges x, y valós számokra teljesül, hogy

$$f\left(\left(f(x) + f(y)\right)^2\right) = (x+y)f(x+y).$$

2. nap

4. feladat. Legyen $1 = a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$ egy valós számokból álló végtelen sor, amelyre minden n pozitív egész szám esetén teljesül, hogy $a_n = a_{2n} + a_{2n+1}$. Legyen $r = 2026^{2026}$. Bizonyítsd be, hogy

$$\frac{1}{r} \leq a_r \leq \frac{2}{r+1}.$$

5. feladat. Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, amelyre $AC > AB$. Jelölje ABC köréírt körét ω és legyen ω középpontja O . Az ω -hoz B -ben és C -ben húzott érintők K -ban metszik egymást. Legyen az ABK háromszög köréírt körének és a BC egyenesnek a második metszéspontja Z . Jelöljük KZ felezőpontját L -lel. Legyen a KZ és AB egyenesek metszéspontja X . Az O -ból KZ -re állított merőleges az ABL háromszög köréírt körét a BC egyenes A -felőli oldalán egyetlen pontban metszi. Legyen ez a pont V . Bizonyítsd be, hogy LV merőleges CX -re.

6. feladat. Vegyünk egy p prímszámot és legyen n egy pozitív egész szám, amelyre p **nem** osztja n -et. Legyen az n pozitív osztóinak száma k és az osztókat jelöljük $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$ -nel. Minden $i = 1, 2, \dots, k$ -ra jelölje c_i a d_i^2 olyan pozitív ℓ osztóinak számát, amelyekre p osztja $d_i - \ell$ -et. Bizonyítsd be, hogy

$$(p-1)(c_1 + c_2 + \dots + c_k) \geq k^2.$$



Megoldásvázlatok a 2026./4. szám matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. a) Egy számtani sorozat három egymást követő tagja (ebben a sorrendben): y , x és $4x - 5$. Határozza meg ezeket a számokat, ha összegük 1500. (4 pont)

b) Hány olyan mértani sorozat van, amelynek első 5 tagja között szerepel a 2, a 8 és a 32, ha számít a tagok sorrendje is? (5 pont)

c) Rendezze növekvő sorrendbe az alábbi halmazok számosságát! Válaszát indokolja!

$$A = \{x \mid x^2 + 2x + 1 = 2 \text{ egyenlet racionális megoldásai}\};$$

$$B = \{x \mid x \text{ 40 pozitív osztói}\};$$

$$C = \left\{ n \mid 3^{-n+1} > \frac{1}{27^3}, n \in \mathbb{N} \right\}. \quad (5 \text{ pont})$$

Megoldás. a) A három szám összege a középső tag háromszorosa. $3x = 1500$, ebből $x = 500$. A sorozat differenciája $(4x - 5) - x = 3x - 5 = 1495$. Tehát a három szám: -995 ; 500 ; 1995 . Ezek valóban számtani sorozatot alkotnak.

b) A felsorolt számok önmaguk is egy mértani sorozatot alkotnak; $q = 4$ vagy $q = 1/4$. Ezért két eset lehetséges: (I.) az öt szám között is szomszédosak ezek vagy pedig (II.) az első, harmadik és ötödik tagjai a számötösnek.

I. Ha ezek szomszédos tagok, akkor a legkisebb sorszámú tag legfeljebb a harmadik lehet. Ez három lehetőség. Minden lehetőségben két sorozat van ($q = 4$ vagy $q = 1/4$), tehát hat ilyen sorozat van.

II. Ha ezek nem szomszédosak, akkor $q^2 = 4$ vagy $q^2 = 1/4$. Mindkét esetben kétféle lehet a hányados: $q = \pm 2$ vagy $\pm 1/2$, tehát 4 ilyen sorozat van.

Összesen 10 ilyen mértani sorozat van.

c) $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 = 2$, ennek megoldásai $\pm\sqrt{2} - 1$, amelyek irracionálisak, ezért $|A| = 0$. A $40 = 2^3 \cdot 5$, tehát $|B| = 4 \cdot 2 = 8$. A 3-as alapú exponenciális függvény szigorú monoton növekedése miatt a $3^{-n+1} > 3^{-9}$ egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $-n + 1 > -9$, amiből $n < 10$ természetes szám, ezért $|C| = 10$. A számosságok sorrendje: $|A| < |B| < |C|$.

2. a) Bizonyítsa be az alábbi állítást:

„Ha egy derékszögű háromszög mindhárom oldalának hossza pozitív egész szám, akkor az átfogóhoz tartozó magasságának hossza racionális.” (4 pont)

b) Írja fel az a) feladatban szereplő állítás megfordítását, és döntse el róla, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja! (3 pont)

c) Összeadtuk 27 különböző prímszám négyzetét, és eredményül 155 787-et kaptunk. Szerepelhetett-e a prímek között a 3? (5 pont)

Megoldás. a) Legyenek a befogók a és b , az átfogó c , az ehhez tartozó magasság pedig m . Ekkor $T_{\Delta} = \frac{ab}{2} = \frac{c \cdot m}{2}$, vagyis $m = \frac{ab}{c}$, tehát m egész számok hányadosaként előáll, azaz racionális.

b) Az állítás megfordítása: „Ha egy derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magasságának hossza racionális, akkor mindhárom oldalának hossza egész szám.”

Az állítás hamis. Tekintsünk egy négyzetet, amelyiknek az átlói 10 egység hosszúak. Ekkor a négyzet felét képező derékszögű háromszögben $c = 10$, $m = 5$, $a = b = 10/\sqrt{2}$, ezek pedig irracionálisak.

c) Ha egy szám nem osztható hárommal, akkor $3k \pm 1$ alakban írható, ahol $k \in \mathbb{Z}$ és $(3k \pm 1)^2 = 9k^2 \pm 6k + 1$. Ebből látható, hogy a négyzete mindig 1 maradékot ad hárommal osztva. Tegyük fel, hogy a 27 prím között szerepel a 3-as. Ekkor az összeg tagjai között 26 olyan szám szerepel, amely 1 maradékot ad hárommal osztva és egy olyan, amely nullát. Tehát az összeg hármas maradéka 2. Azonban $3 \mid 155787$, ezért ez nem lehetséges. Ha van is 27 ilyen prímszám, a 3 biztosan nem szerepelhetett közöttük.

3. Egy táborban 90 diák vett részt, akiket faházakban szállásoltak el. A faházak mindegyike négy-, nyolc- vagy kilencágyas volt, a nyolcágyasból pontosan öt darab. Miután a diákok elfoglalták a házakat, nem maradt üres ágy.

a) Érkezéskor a szállásadó odaadta az egyik kísérőtanárnak egyesével a kulcsokat. Először a négyágyasokét, utána a nyolcágyasokét, végül pedig a kilencágyasokét. Hányféle sorrendben tehette ezt meg, ha minden faháznak egy kulcsa van, és a kulcsok különbözőek? (4 pont)

Egyik délután a diákok több különböző túralehetőségből választhattak. Összesen 6 csoport alakult a 90 főből. A hat csoport létszámáról a következőket tudjuk:

- i) minden csoport létszáma osztható hattal,
- ii) van olyan csoport, amelyikben éppen feleannyian vannak, mint egy másikban,
- iii) a létszámoknak két módusa van, az egyik megegyezik a mediánnal,
- iv) terjedelme 30.

b) Adja meg, hogy hány fő volt az egyes csoportokban! (6 pont)

Megoldás. a) A négyágyas faházak száma legyen a , a kilencágyasoké pedig b . A feladat feltételei alapján $4a + 9b + 40 = 90$, ahol $a, b \in \mathbb{N}^+$. $9b$ négyes maradéka 2, és $b < 6$. Ezért csak $b = 2$ lehet megoldás. Ekkor $a = 8$.

A kulcsokat $8! \cdot 5! \cdot 2! = 9676800$ -féle sorrendben adhatták oda a kísérőtanárnak.

b) Az első és a negyedik feltételt is tekintetbe véve a hat csoport létszámát jelölheti $6a, 6b, 6c, 6d, 6e, 6a + 30$, ahol $0 < 6a \leq 6b \leq 6c \leq 6d \leq 6e \leq 6a + 30$ és a, b, c, d, e pozitív egész számok. Ekkor $6a + 6b + 6c + 6d + 6e + 6a + 30 = 90$, azaz $a + b + c + d + e + a + 5 = 15$, vagyis $a + b + c + d + e + a = 10$ vagy $2a + b + c + d + e = 10$.

Itt b legfeljebb 2 lehet, különben $b + c + d \geq 12 > 10$ lenne. Ha $b = 2$, akkor csak $a = 1, b = c = d = e = 2$ lehetséges, de így az adatsornak nincsen két módusa. Ezért $b = 1$, így a is 1. Ebből következik, hogy az egyik módusz az 1, továbbá $c + d + e = 7$.

A medián a két középső szám átlaga, $(c + d)/2$, és mivel módusz is, így csak $c = d$ lehet. De nem lehet $c = d = 1$, mert akkor csak egy módusz lenne. Vagyis csak $c = d = 2$ állhat fenn.

Eszerint $a, b, c, d, e, a + 5$ lehetséges értékei: 1, 1, 2, 2, 3, 6.

Ellenőriznünk kell még, hogy teljesül-e az a feltétel is, hogy az egyik szám egy másik kétszerese, és ez valóban teljesül is.

A csoportok létszáma tehát 6, 6, 12, 12, 18, 36.

4. a) Tekintsük az alábbi pontokat a koordináta-rendszerben:

$$A(\log_3 r; \log_3 5r); \quad B\left(-\log_3\left(\frac{r}{3}\right); \log_{\frac{1}{3}} 10\right) \quad \text{és} \quad C(\log_r 1; \log_r 1).$$

Mennyi $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ értéke, ha tudjuk, hogy az ABC háromszög súlypontja az $S(\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ pontban van? (5 pont)

b) Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x^3 + 6x - 6x^2 - 2$ függvény. Adja meg annak a valós számokon értelmezett $g(x)$ függvénynek a hozzárendelési szabályát, amelyre $g(f(x)) = x$. (4 pont)

c) Határozza meg a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + px + p$ függvény hozzárendelési szabályában a p nemnulla valós paraméter értékét úgy, hogy a g és az $x \mapsto x + 1$ lineáris függvény grafikonjainak pontosan egy metszéspontja legyen! (6 pont)

Megoldás. a) A háromszög súlypontjának koordinátái a csúcsok megfelelő koordinátáinak átlaga. Minden $r > 0$; $r \neq 1$ -re $\log_r 1 = 0$, ezért hárommal való szorzás után az alábbi egyenletek írhatóak fel: $\log_3 r - \log_3(\frac{r}{3}) = 1$ és $\log_3(5r) + \log_{\frac{1}{3}} 10 = 1$. Az első egyenlet a logaritmus azonosságai alapján: $\log_3(\frac{r}{r/3}) = \log_3 3 = 1$, tehát ennek az értelmezési tartomány bármely r eleme megoldása. A második egyenletből 3-as alapú logaritmusra való áttéréssel kapjuk, hogy

$$\log_3 5r + \frac{\log_3 10}{\log_3 \frac{1}{3}} = \log_3 5r - \log_3 10 = \log_3\left(\frac{5r}{10}\right) = \log_3\left(\frac{r}{2}\right) = \log_3 3.$$

A logaritmus függvény kölcsönös egyértelműsége miatt $\frac{r}{2} = 3$, amiből $r = 6$. A kapott r érték megfelel a feladat feltételeinek.

b) $f(x) = 2(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 2(x - 1)^3$. Tehát $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{2}} + 1$. Ekkor $g(f(x)) = \sqrt[3]{\frac{2(x-1)^3}{2}} + 1 = x$.

c) A két függvénygrafikon ott metszi egymást, ahol a függvényértékek megegyeznek, azaz $x^2 + px + p = x + 1$, átrendezve: $x^2 + (p - 1)x + (p - 1) = 0$. A másodfokú egyenletnek akkor lesz egy megoldása, ha a diszkriminánsa nulla, azaz: $D = (p - 1)^2 - 4(p - 1) = (p - 1)(p - 1 - 4) = 0$. Egy szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla. Tehát $p = 1$ vagy $p = 5$. A kapott p értékeket behelyettesítve valóban megfelelnek a feladat feltételeinek.

II. rész

5. a) Egy szabályos hatszög alapú egyenes hasáb alap- és oldaléleinek hossza egyenlő. Ha térfogatának adott mértékrendszerben kifejezett mérőszámát elosztjuk

a felszínének ugyanabban a mértékrendszerben kifejezett mérőszámával, akkor a hányados 1,392. Hány egység hosszú a hasáb egy éle? Válaszát egészekre kerekítse! (9 pont)

b) Egy hatszög alapú hasáb élei közül kiválasztunk hármat. Mennyi a valószínűsége, hogy a három él közül pontosan kettőnek van közös pontja? (7 pont)

Megoldás. a) A hasáb egy élét jelölje a , ekkor $V = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 6 \cdot a = a^3 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}$
 és $A = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 6 \cdot 2 + 6a^2 = 3a^2(\sqrt{3} + 2)$. A hányadost felírva egyszerűsítés után
 kapjuk: $\frac{V}{A} = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot (\sqrt{3} + 2)} = 1,392$. Ebből $a \approx 6$.

b) A hatszög alapú hasábnak 18 éle és 12 csúcsa van. Minden csúcsában pontosan 3 él találkozik. A 18 élből hármat $\binom{18}{3}$ -féleképpen választhatunk ki. A kedvező eseteknél válasszuk ki, hogy melyik csúcs lesz a közös pont, és az ott találkozó három él közül melyik kettőre lesz szükségünk, ezt $12 \cdot \binom{3}{2}$ -féleképpen tehetjük meg. Harmadik élnek nem választhatunk olyat, amelyiknek van közös pontja ezekkel, tehát csak $18 - 3 - 2 - 2 = 11$ él jöhet szóba. Ebből: $P = \frac{12 \cdot \binom{3}{2} \cdot 11}{\binom{18}{3}} = \frac{33}{68} \approx 0,4853$.

6. Egy marketingcég egy újfajta csokoládéről készít 100 fős közvéleménykutatást. Először a termék ismerete nélkül, csak a neve alapján döntenek a résztvevők, hogy vennének-e ilyet. Ezután meg is kóstoltatják velük a terméket és újra megkérdezik tőlük, hogy megvennék-e. A két kérdésre adott válaszokat az alábbi táblázat mutatja:

	Név alapján	Kóstolás után
igen	45	72
nem	55	28

a) Legfeljebb hány ember változtathatta meg a véleményét a termék megvásárlásáról a kóstolás hatására? (4 pont)

b) Lehet-e, hogy éppen 42 ember véleménye maradt változatlan a kóstolás hatására? (4 pont)

Ugyanez a cég szervezi egy társasjáték reklámkampányát is. A játék egyik tartozóéka egy szabályos ikozaéder. Ennek 20 oldallapja van, és a feldobása után bármelyikre ugyanakkora valószínűséggel esik. A lapokon csak 4-es, 7-es és 11-es szám szerepel (mindegyiken pontosan egy). A szabálykönyvben egy helyen ezt írják: „a három számból kettő dobási valószínűsége ugyanannyi, és a dobás eredményének várható értéke 7,35”.

c) Hány 4-es szerepel a dobótesten? (8 pont)

Megoldás. a) Az „igen $\rightarrow$ nem” válasszmódosítások maximális száma 28, a „nem $\rightarrow$ igen” válasszmódosítások maximális száma 55, összesen $28 + 55 = 83$, és ez meg is valósulhat. Tehát legfeljebb 83-an változtathatták meg a válaszukat.

b) Tegyük fel, hogy k -an változtattak igen $\rightarrow$ nem irányban, ekkor a másik irányban $100 - 42 - k = (58 - k)$ -an. Tehát az igenek száma

$$45 - k + 58 - k = 103 - 2k = 72,$$

ekkor azonban $k \notin \mathbb{N}$, ami ellentmond a feladat feltételeinek. Ez tehát nem lehetséges.

c) Legyen a két egyenlő valószínűség p , ekkor a harmadik szám valószínűsége $1 - 2p$. Az egyes számok pedig $20p$, $20p$, illetve $20(1 - 2p)$ lapon szerepelnek.

I. eset: $4p + 7p + 11(1 - 2p) = 7,35$, ebből $p = 73/220$. Ez nem lehet megoldás, mert $20p$ nem egész.

II. eset: $11p + 7p + 4(1 - 2p) = 7,35$, amelyből $p = 63/200$. Ez sem megoldás, mivel $20p$ nem egész.

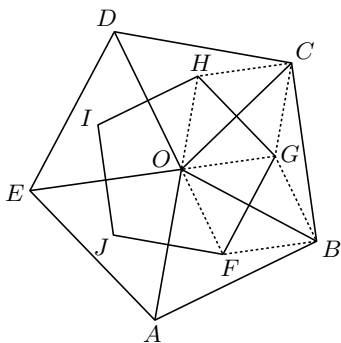
III. eset: $4p + 11p + 7(1 - 2p) = 7,35$, ekkor $p = 7/20$. Azaz hét 4-es és 11-es, valamint hat 7-es szerepel a lapokon.

A kapott megoldások a feladat feltételeinek megfelelnek.

7. Egy erdei kilátótorony egyik emelete szabályos ötszög alakú, amelynek oldalai 5 métereseek. Az emelet padlóján elhelyeztek két, különböző „fotópontot”, ahová állva a legjobb fotókat lehet készíteni a tájról. Külön-külön mindkét pontra igaz, hogy egyenlő távol van az ötszög köré írt körének középpontjától és két szomszédos csúcától.

a) Legfeljebb milyen messze lehet egymástól a két „fotópont”? (11 pont)

b) A kilátóban ingyenes tájékoztatófüzetet osztanak az erdő élővilágáról. Ebben van egy ábra is, amelyben tíz, a környekre jellemző állatból álló tápláléklánc szerepel. A képen két állatot egy vonallal összekötöttek, ha az egyik megeszi a másikat. Balambér azt számolta, hogy van két állatkép, amiből csak 3 vonal indul ki, de a többiből legalább hat. Testvére szerint ez azt jelenti, hogy bármelyik állatképtől el lehet jutni bármelyik másikhoz a vonalak mentén. Igaza van-e? (5 pont)



Megoldás. a) A fotópontok egy-egy olyan háromszög köré írható körének középpontjában vannak, amelyet az ötszög középpontja és két szomszédos csúcs meghatároz. Ha 5 ilyen pont lenne, akkor a forgásszimmetria miatt ezek is egy szabályos ötszöget alkotnának. Ennek a szabályos ötszögnek minden oldala egyenlő és minden átlója egyenlő, és az átlói hosszabbak az oldalainál. Tehát az átlók hosszát keressük.

Használjuk az ábra jelöléseit. Mivel a szimmetriák miatt $OF = FB = BG = GC = CH = HO = OG$, azért $OFBG$ és $OGCH$ egybevágó rombuszok, amelyeknek közös az OG oldala. Az FOH és BGC egyenlő szárú háromszögek szárszöge egyenlő (144°), így egybevágóak. Emiatt $HF = CB = 5$ méter.

Megjegyzések. 1. Az is belátható, hogy $FHCB$ téglalap, illetve a megfelelő szögek kiszámolásával is bizonyítható ez szimmetriákra való hivatkozás helyett.

2. A feladat úgy is megoldható, hogy felhasználjuk, hogy a két ötszög hasonló, és kiszámítjuk a hasonlóság arányát.

b) Az ábrát tekinthetjük egy 10 pontú egyszerű gráfnak, amelyben két csúcs foka 3, a többi pedig legalább 6. Azt keressük, hogy összefüggő-e ez a gráf.

Tegyük fel, hogy a gráf nem összefüggő, legalább két komponensből áll. Abban a komponensben, amelyben van hatodfokú pont, legalább 7 pont kell, hogy szerepeljen. Tehát a másik komponensben legfeljebb 3 lehet. De mivel van kettő háromfokú csúcs, ezért minden komponens legalább 4 csúcsból kell, hogy álljon. Ellentmondásra jutottunk, a gráf összefüggő kell, hogy legyen. Tehát bármelyik állatképtől el lehet jutni bármelyik állatképig a vonalak mentén, azaz a testvérének igaza van.

8. a) Egy konkáv deltoidot a szimmetriatengelye körül megforgatva olyan forgástestet kapunk, amelyiknek a térfogata $\frac{500\pi}{3} \text{ dm}^3$. Számítsa ki a deltoid területét, ha az egyik átlója 5 dm-es. (7 pont)

b) Meghatároztuk a valós számok halmazán értelmezett

$$f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$$

hozzárendelési szabállyal megadott függvény zérushelyeit. Ezután kiszámítottuk a második, illetve harmadik legnagyobb zérushely közötti határozott integrál értékét, így egy nem egész számot kaptunk. Melyik az a legkisebb pozitív szám, amellyel megszorozva az f -et a szóban forgó határozott integrál egész? (5 pont)

c) Írja fel az $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ függvény egy x tengellyel párhuzamos érintőjének az egyenletét! (4 pont)

Megoldás. a) A deltoidot megforgatva a kapott forgástest két, azonos alapú, egyenes körkúp közötti térrész. Jelöljük a deltoid szimmetriatengellyel egybeeső átlóját e -vel, a másikat pedig f -fel, továbbá a konkáv csúcs és f távolsága legyen x . Ekkor a térfogatok háromszorosát véve:

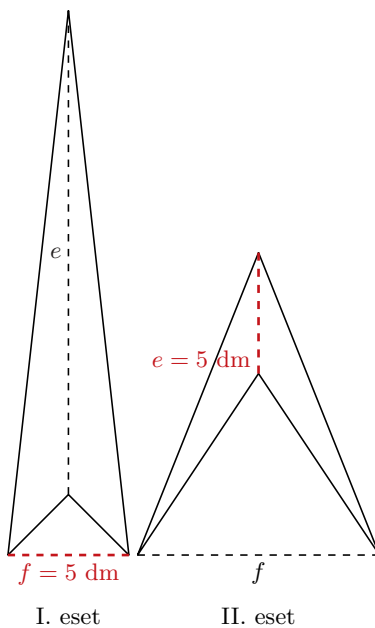
$$\begin{aligned} 3V_{\text{forgástest}} &= (f/2)^2 \pi \cdot (e + x) - (f/2)^2 \pi \cdot x = \\ &= (f/2)^2 \pi \cdot e = 500\pi \text{ dm}^3. \end{aligned}$$

Két esetet kell vizsgálni, attól függően, hogy melyik átló az 5 dm-es.

I. eset: $(f/2)^2 \pi \cdot e = 500\pi$, tehát $e = 80 \text{ dm}$, azaz $T = 5 \cdot 80/2 = 200 \text{ dm}^2$.

II. eset: $(f/2)^2 \pi \cdot 5 = 500\pi$, ahonnan $f = 20 \text{ dm}$, azaz $T = 5 \cdot 20/2 = 50 \text{ dm}^2$.

b) Egy szorzat akkor és csak akkor nulla, ha legalább az egyik tényezője nulla, ezért f zérushelyei: ± 1 és ± 2 . Ezek közül a második legna-



gyobb a -1 , a harmadik legnagyobb pedig az 1 . A zárójelet felbontva egyszerűbben integrálható függvényt kapunk:

$$\int_{-1}^1 (x^4 - 5x^2 + 5) dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + 4x \right]_{-1}^1 = \frac{76}{15}.$$

Mivel integrálás során $\int a \cdot f(x) dx = a \int f(x) dx$, ezért 15 a legkisebb jó szám.

c) $(x^4 - 5x^2 + 4)' = 4x^3 - 10x$. A keresett érintő meredeksége 0 , tehát $4x^3 - 10x = 0$, ahonnan $2x(2x^2 - 5) = 0$, azaz $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{\sqrt{10}}{2}$; $x_3 = -\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Tehát három pontban is húzható ilyen érintő hozzá. Ha $x = 0$, akkor $f(0) = 4$. Az érintő egyenlete: $y - 4 = 0$. A másik kettő: $0 = y - f(x_2) = y - f(x_3) = y - \frac{5}{4}$.

9. a) Bizonyítsa be, hogy tetszőleges $x, y \in \left[\frac{\pi}{7}; \frac{3\pi}{7} \right]$ esetén az $\mathbf{a}(\operatorname{tg} x; \operatorname{tg} y)$ és a

$\mathbf{b} \left(\frac{\cos x}{\sin x}; \frac{\cos y}{\sin y} \right)$ vektor skaláris szorzata 2 . (4 pont)

b) Oldja meg az

$$\frac{x}{y^2} + \frac{1}{xy} = \frac{4-x}{y} - \frac{1}{x}$$

egyenletet a pozitív valós számpárok halmazán! (5 pont)

c) Az alábbi végtelen összegről tudjuk, hogy konvergens és értéke negatív, valós szám. Adja meg a $p \in \mathbb{R}$ lehetséges értékeit!

$$\frac{1}{p+1} + \frac{p^2-1}{p+1} + \frac{(p^2-1)^2}{p+1} + \frac{(p^2-1)^3}{p+1} + \dots < 0 \quad (7 \text{ pont})$$

Megoldás. a) A megadott intervallum minden pontjában értelmezettek a feladatban szereplő kifejezések. Vegyük észre, hogy $\mathbf{b}$ koordinátái valójában $\operatorname{ctg} x$ és $\operatorname{ctg} y$, azaz $\mathbf{a}$ megfelelő koordinátáinak a reciprokai. A skaláris szorzást elvégezve: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} y \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} y} = 1 + 1 = 2$. Ezzel az állítást bizonyítottuk.

b) Az egyenletet megszorozva a pozitív y -nal és rendezve a következőt kapjuk:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + x + \frac{1}{x} = 4.$$

Ismert, hogy egy pozitív szám és reciprokának összege legalább 2 , és az egyenlőség csak akkor teljesül, ha a szám az 1 . Ez alapján a bal oldal legalább 4 . Tehát mindkét számpárnál az egyenlőség teljesül, így az egyenlet megoldása csak $x = y = 1$.

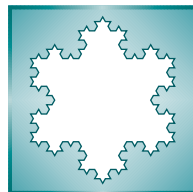
c) A feladatban szereplő végtelen összeg végtelen mértani sor, amelynek első tagja $\frac{1}{p+1}$, a kvóciense pedig $p^2 - 1$. A kifejezés akkor értelmes, ha $p \neq -1$. A végtelen mértani sor pontosan akkor konvergens, ha kvóciense -1 és 1 közé esik:

$-1 < p^2 - 1 < 1$, ahonnan $0 < p^2 < 2$, így $-\sqrt{2} < p < \sqrt{2}$. Ha ez teljesül, akkor az összeg egyenlő az $\frac{a_1}{1-q}$ hányadossal:

$$\frac{\frac{1}{p+1}}{1 - (p^2 - 1)} = \frac{1}{(p+1)(2-p^2)} < 0.$$

A kifejezés nem értelmes, ha a nevezőben bármelyik tényező nulla, ebből következően $p \neq -1; \pm\sqrt{2}$. A kapott tört értéke pontosan akkor negatív, ha $p+1$ és $2-p^2$ különböző előjelűek. A kvóciensre tett kikötés miatt $p^2 < 2$, amiből $2-p^2 > 0$, ezért a nevező másik tényezője negatív: $p+1 < 0$, $p < -1$. Ezeket összevetve azt kapjuk, hogy az egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $p \in]-\sqrt{2}; -1[$.

Polák Péter
Budapest



Matematika C gyakorlatok megoldása

C. 1889. Egy számegyenesen be van jelölve az 1 és a $\sqrt{5}$, semmi más. Adjuk meg szerkesztéssel a számegyenesen a 0 helyét. (Az elemi szerkesztési lépéseket, mint például szög felezése, tengelyes tükrözés, nem kell részletezni.)

Javasolta: Veszprémi Ferenc (Budapest)

1. megoldás. Ha a számegyenesen be van jelölve az 1 és a $\sqrt{5}$, akkor a számokat jelképező két pont közötti szakasz hossza nyilvánvalóan $\sqrt{5} - 1$. Ennek a szakasznak a segítségével az alábbi ábra derékszögű háromszögei euklideszi módon megszerkeszthetők.

Alkalmazva a Pitagorasz-tételt az egyes derékszögű háromszögekre:

$$(1) \quad \begin{aligned} c &= \sqrt{2} \cdot (\sqrt{5} - 1); & d &= \sqrt{3} \cdot (\sqrt{5} - 1); \\ e &= 2 \cdot (\sqrt{5} - 1); & f &= \sqrt{5} \cdot (\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

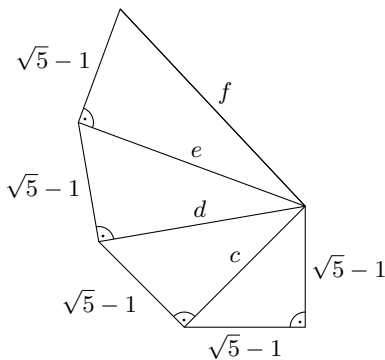
Az ilyen eljárással megszerkesztett f szakasz hossza (1) szerint

$$f = \sqrt{5} \cdot (\sqrt{5} - 1) = 5 - \sqrt{5}.$$

Jelöljük az e számegyenesen A -val, illetve B -vel az 1, illetve a $\sqrt{5}$ helyét. Ezután az AB félegyenesre a B pontból kiindulva mérjük fel a BC szakaszt úgy, hogy $BC = f = 5 - \sqrt{5}$, ekkor

$$(2) \quad AC = \sqrt{5} - 1 + 5 - \sqrt{5} = 4.$$

Az így keletkezett AC szakasz A -hoz legközelebbi negyedelőpontja megszerkeszthető úgy, hogy megfelezzük az AC szakaszt, jelölje a felezőpontot T , majd



1. ábra

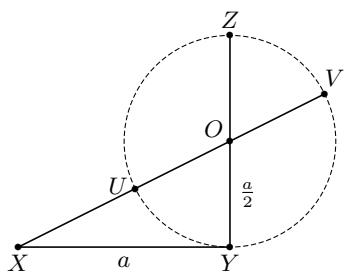
az AT szakaszt is megfelezzük, és a P -vel jelölt felezőpont az AC szakasz A -hoz közelebbi negyedelőpontja.

Megszerkesztettük tehát az egységnyi hosszúságú AP szakaszt, amelyet a PA félegyenesen az A -ból felmérve megkapjuk a 0 helyét.

Nádas Zorka Lilla (Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium, Szeged, 8. o. t.) dolgozata alapján

2. megoldás. Mivel a számegyenesen csak az 1 és a $\sqrt{5}$ van megjelölve, ezért a két pont meghatároz egy $\sqrt{5} - 1$ hosszúságú szakaszt, ezt használjuk fel a további szerkesztési lépésekhez, amelyekben arra törekszünk, hogy az 1 hosszúságú szakaszt előállítsuk.

Tekintsük a 2. ábrát, amelyen az $XY = a$ szakaszra merőlegest állítottunk, erre a merőlegesre ráértük az $YZ = a$ szakaszt, amelynek felezőpontját O -val jelöltük. Megszerkesztettük az O középpontú, $\frac{a}{2}$ sugarú kört, ennek az XO egyenessel való metszéspontjai U és V .



2. ábra

Az ábra alapján felírhatjuk az X pontnak a körre vonatkozó hatványát, ez egyrészt a^2 , másrészt pedig $XU \cdot XV$ vagy másként $XV \cdot (XV - a)$, ezért $XV \cdot (XV - a) = a^2$, ebből az $\left(\frac{XV}{a}\right)^2 - \frac{XV}{a} - 1 = 0$ egyenletet kapjuk.

Az $\frac{XV}{a}$ -ban másodfokú egyenletet megoldva

$$(3) \quad \frac{XV}{a} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

Ha tehát az a szakasz hosszát úgy választjuk meg, hogy $a = \sqrt{5} - 1$ legyen, amely éppen a számegyenesen adott két pont távolsága, akkor könnyen látható, hogy

$$(4) \quad XV = 2.$$

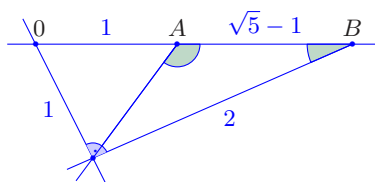
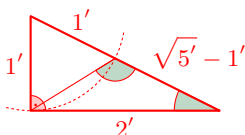
A fentiekben leírt euklideszi szerkesztési lépéseket végrehajtva kaptunk egy 2 hosszúságú szakaszt, ezt megfeleztve adódik az 1 hosszúságú szakasz, amelyet a számegyenesre az adott 1-et jelképező pontból balra felmérve megkapjuk a 0 helyét.

Farkas Réka (Jedlik Ányos Gimnázium, Budapest, 8. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. Könnyen igazolható, hogy $\frac{XU}{a} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, ez az aranymetszés arányszáma, tehát az $XU + a$ hosszúságú szakaszt az XU és a hosszúságú szakaszok az $\frac{XU}{a} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ aránynak megfelelően osztják két részre.

2. A helyes megoldások között számosan a magasságtétel felhasználásával állították elő az $5 - \sqrt{5}$ távolságot és ebből a 4 egység hosszúságú szakaszt. Olyan megoldás is született, amely a számegyenessel párhuzamos egyenesen felvette az egymás után következő a és $5a$ szakaszokat, ezekből a magasságtétel alkalmazásával szerkesztette meg az $a \cdot \sqrt{5}$, majd az $a \cdot (\sqrt{5} - 1)$, szakaszt, ezután hivatkozott a párhuzamos szelőszakaszok tételére.

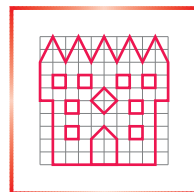
3. Hasonlóság erejéig meg tudjuk szerkeszteni a számegyenest.



Vegyünk fel egy tetszőleges egységet ($1'$ a piros ábrán), és szerkesszünk $1'$ és $2'$ befogójú derékszögű háromszöget. Ennek átfogója $\sqrt{5'}$ hosszú. Metsszünk le belőle egy $1'$ egységnyi szakaszt az ábra szerint, a másik rész hossza $\sqrt{5'} - 1'$. Ennek segítségével $A = 1$ és $B = \sqrt{5}$ helyének ismeretében (kék ábra) – például a három jelölt szög átmásolásával – megkapható a számegyenesen a 0 helye.

108 dolgozat érkezett. 5 pontos 65, 4 pontos 10, 3 pontos 9, 2 pontos 1, 1 pontos 4, 0 pontos 18.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (904–908.)



K. 904. Egy faluban három utca van: a T , a V és a P utca. A T utcában tartózkodó emberek mindig igazat mondanak, a V utcában mindig hazudnak, a P utcában tartózkodók beszédében pedig igaz és hamis mondatok felváltva követik egymást. Egy nap a falu tűzoltótornyában az ügyeletes megfigyelő egy füstoszlopot látott felszállni az egyik utcából. Másodpercekkel ezután megszólalt a telefon: A hívó csak ennyit mondott: „Tűz van az utcában!” Az ügyeletes tűzoltó megkérdezte: „Melyik utcában?” A hívó válasza a következő volt: „A P utcában.” Melyik utcába kellett menniük a tűzoltóknak?

Észt versenyfeladat

K. 905. Anna már nagyon várja a nyári szünidőt, ezért elhatározta, hogy a VAKÁCIÓ szó betűiből összeállítható betűsorozatokat sorban leírja füzetébe. Hányadik helyen szerepel ezen a listán a VAKÁCIÓ szó, ha Anna végig ábécésorrendben halad?

Javasolta: Kozma Katalin Abigél (Győr)

K. 906. Egy téglalap egyik átlója a téglalap egyik oldalának háromszorosa, a másik oldalánál egy egységgel hosszabb. Egységben mérve mekkorák a téglalap oldalai?

Javasolta: Czett Máttyás (Zalaegerszeg)

K/C. 907. A házfelújítás során a téglalap alakú kamra járólapozása a következő feladatunk. 1×1 -es, négyzet alakú járólapjaink vannak. A kamra oldalhosszai egész számok (ezen egységben mérve). Hány járólapot kell felhasználni, ha a szélső (tehát fal vagy ajtó menti) járólapok száma fele az összes járólapnak?

Skót versenyfeladat

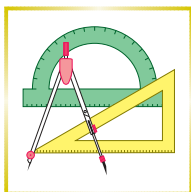
K/C. 908. Anna egy egységsugarú korongot tett az asztalra, Boglárka pedig Anna korongja köré lerakott három egyforma korongot. Minden külső korong érinti Anna korongját és pontosan két másik külső korongot. Mekkora a sugara Boglárka korongjainak?

Javasolta: *Kozma Katalin Abigél* (Győr)



Beküldési határidő: 2026. június 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (907–908., 1903–1907.)

Feladatok 10. évfolyamig

K/C. 907. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

K/C. 908. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

Feladatok mindenkinek

C. 1903. Egy matekszakkör 17 lelkes tagja szeretne a nyári szünetben egy közös matekozásra összejönni, ezért összegyűjtik, ki mikor ér rá: mindenkitől egy, legalább két naptól álló intervallumot kapnak. (Például július 3-ától 6-áig.)

Az összegyűlt adatok alapján megállapítható, hogy bármely három diák között van kettő, akik megjelöltek közös napot.

Lesz-e biztosan olyan nap, amelyen mindenki ráér?

Lesz-e biztosan két olyan nap, hogy mindenki ráér legalább az egyiken?

Javasolta: *Paulovics Zoltán* (Budapest)

C. 1904. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogója egységnyi hosszúságú. A C -ből induló magasságának talppontja legyen D , a D -ből az AC -re állított merőleges talppontja E , az E -ből az AB -re állított merőleges talppontja pedig F . Tudjuk, hogy F éppen az átfogó felezőpontja. Mekkora a háromszög befogói?

Javasolta: *Ujházy Márton* (Budapest)

C. 1905. Legyenek a, b, c, d különböző pozitív egészek. A következő négy állítás közül kettő igaz, kettő hamis:

(i) $a < b < c < d$,

(ii) $a + b = c + d$,

(iii) $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$,

(iv) $a^3 - b^3 = c^3 - d^3$.

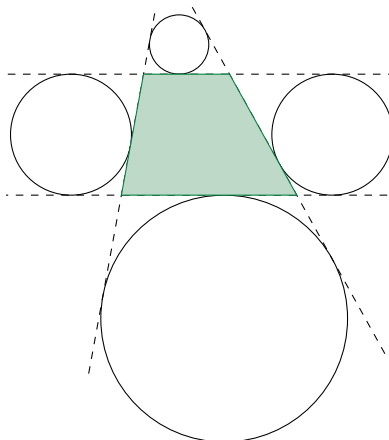
Adjuk meg d legkisebb lehetséges értékét.

Skót versenyfeladat

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1906. Egy érintőtrapéz minden oldalának hozzáírt körét megrajzoltuk. Igazoljuk, hogy az alapokhoz írt körök összterülete legalább akkora, mint a szárakhoz írt körök összterülete.

Javasolta: *Ujházy Márton* (Budapest)



C. 1907. Leírtuk nagyság szerint növekvő sorrendben a 0 és 1 közötti, legfeljebb 99 nevezőjű (nem egyszerűsíthető) törtet. Melyik szám áll közvetlenül a $\frac{11}{21}$ után?

Javasolta: *Birkás György* (Siófok)

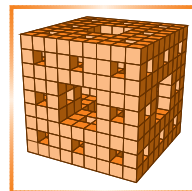


Beküldési határidő: 2026. június 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5534–5541.)



B. 5534. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\{x\} + \left\{\frac{1}{x}\right\} = 1$$

egyenletet, ahol $\{x\}$ az x szám törtrészét jelenti.

(3 pont)

Javasolta: *Holló Gábor* (Budapest)

B. 5535. Egy nem egyenlő szárú háromszög oldalai a , b , c , beírt körének sugara r . Az a oldalhoz tartozó súlyvonal s_a , továbbá jelölje t_a a beírt kör középpontjának távolságát az s_a egyenesétől. Mutassuk meg, hogy

$$2t_a s_a = |b - c| \cdot r.$$

(3 pont)

Javasolta: *Kiss Géza* (Csömör)

B. 5536. Egy szabályos hatszög csúcsaiba hat természetes számot írtunk, amelyek összege 2027. Egy lépésben a hat szám közül egyet kicserélünk a két szomszédos csúcsban álló szám különbségének abszolút értékével.

Elérhető-e ilyen lépésekkel, hogy mindegyik csúcsban 0 álljon?

(5 pont)

Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

B. 5537. A k körben a CD húr felezi az AB húrt. A k -hoz C -ben, illetve D -ben húzott érintők az AB egyenest X -ben, illetve Y -ban metszik. Igazoljuk, hogy $XA = YB$.

(4 pont)

Cruz Mathematicorum

B. 5538. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 9} + \frac{1}{y^2 - 5y + 9} + \frac{1}{z^2 - 5z + 9} = \frac{1}{\sqrt{6x - 9}} + \frac{1}{\sqrt{6y - 9}} + \frac{1}{\sqrt{6z - 9}}.$$

(5 pont)

Javasolta: *Bencze Mihály* (Brassó)

B. 5539. Legyen n pozitív egész szám. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{n! \cdot \left[\frac{n}{30}\right]!}{\left[\frac{n}{2}\right]! \cdot \left[\frac{n}{3}\right]! \cdot \left[\frac{n}{5}\right]!}$$

egész szám, és osztója az 1, 2, ..., n számok legkisebb közös többszörösének.

(5 pont)

Pafnutij Ljovics Csebisev (1821–1894) (Szentpétervár)

B. 5540. Legalább és legfeljebb mekkora lehet a K konvex sokszög területe, ha merőleges vetülete az x - és y -tengelyeken, valamint az $x = y$ egyenesen is egy egységnyi hosszúságú szakasz?

(6 pont)

Orosz feladat nyomán

B. 5541. A , B és C az F fókuszpontú parabola három pontja, ebben a sorrendben. A parabolához a B pontban húzott érintő az A pontban húzott érintőt a P , a C pontban húzott érintőt pedig a Q pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy az FAP és FCQ körök F -től különböző metszéspontja rajta van az AC egyenesen.

(6 pont)

Javasolta: *Holló Gábor* (Budapest)

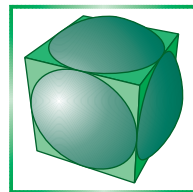


Beküldési határidő: 2026. június 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (935–937.)



A. 935. Egy bűnöző az origóból indul, és a sík egész koordinátájú pontjain mozogva menekül. Egy lépésben mindig egy szomszédos rácspontra lép úgy, hogy kétszer egymás után nem halad ugyanabba az irányba. Tudjuk, hogy az első lépését felfele teszi meg, továbbá minden rácspontot pontosan egyszer érint útja során. Egy ügynök szintén az origóból indul, viszont nem látja a bűnözőt. Szerencsére a központban tudják követni a bűnöző mozgását, de csak a következő módon tudnak kommunikálni az ügynökkel: adott egy előre meghatározott $S \subseteq \mathbb{N}$ végtelen halmaz, amelyre minden $s \in S$ esetén a bűnöző s -edik lépése után küldenek egy 1-est vagy egy 2-est az ügynöknek. Az ügynök csak akkor mozog, amikor üzenetet kap, és mindig pontosan annyit, amennyit a bűnöző az utolsó üzenet óta lépett.

Mennyi

$$I = \inf_S \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|S \cap \{1, 2, 3, \dots, n\}|}{n} \right)$$

értéke az olyan S halmazok felett, amelyekre az ügynök egyértelműen követni tudja a bűnöző mozgását?

A bűnöző mozgását korlátozó szabályokról az ügynök és a központ is tud.

Javaolt: Németh Márton (Budapest)

A. 936. Adott egy nem egyenlő szárú, hegyesszögű ABC háromszög a síkon, amelynek szimmedián pontját jelöljük K -val, Feuerbach-körének középpontját pedig N -nel. Szerkesszünk körzővel és vonalzóval olyan különböző X , X^* , Y , Y^* pontokat, amelyekre

- az XY , X^*Y^* egyenesek metszéspontja K ;
- az XX^* , YY^* egyenesek metszéspontja N ;
- az X , X^* pontok, valamint az Y , Y^* pontok izogonális konjugáltak a háromszögben.

Javaolt: Bán-Szabó Áron (Palaiseau)

A. 937. Legyen $P \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ legalább másodfokú, irreducibilis komplex polinom. Tegyük fel, hogy létezik egy $M > 1$ egész szám, amelyre

$$P(x_1, \dots, x_n) \mid P(x_1^M, \dots, x_n^M).$$

Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan nem nulla c komplex szám, ζ komplex egységgyök, valamint olyan nemnegatív egész $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ számok, amelyekre

$$P(x_1, \dots, x_n) = c \left(x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} - \zeta x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n} \right).$$

Javaolt: Navid Safaei (Teherán)



Beküldési határidő: 2026. június 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



Informatikából kitűzött feladatok (699–672.)

I. 699. Táborozáskor a gyerekek egy csoportja kő-papír-olló játékot játszik. Egy-szerre ketten játszanak, és a győztes +1 pontot, a vesztes −1 pontot kap az eddigi eredményéhez. Kezdetben mindenki 0 pontról indul.

Készítsünk programot *i699* néven, amely minden játék után megadja az összes maximális ponttal rendelkező gyerek számát és sorszámaikat emelkedő sorrendben.

Példa bemenet	Kimenet
5 7	1 4
4 1	2 2 4
2 3	2 2 4
1 3	3 2 4 5
5 3	1 2
2 4	1 2
2 1	1 2
3 5	

A program standard bemenetének első sorában a játékosok száma N ($1 \leq N \leq 100$) és a lejátszott partik száma M ($1 \leq M \leq 1000$) található. A következő M sor mindegyike egy parti eredményét tartalmazza ($1 \leq G_i \neq V_i \leq N$), ami G_i nyelését és V_i veszteségét jelenti.

A programmal a standard kimenetre írjuk ki M sorba az egyes partik utáni legtöbb ponttal rendelkező gyerekek létszámát és a sorszámaikat szóközzel elválasztva.

Beküldendő egy tömörített *i699.zip* állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

(10 pont)

I. 700. Ez a feladat az előző tanévben elkezdett és az ebben a tanévben folytatott prímeikkel kapcsolatos sorozat (**I. 633.**; **I. 641.** és **I. 661.**, illetve **I. 673.**, **I. 693.**) hatodik része. Most az alábbi speciális prímeket keressük az 1 000 000 alatti prímszámok között: *Bölcsföldi-prímek*, *Fibonacci-prímek*, *Kynea-prímek*, *Mersenne-prímek* és *Smarandache–Wellin-prímek*. Lássuk e prímcsoportok definícióját:

Bölcsföldi-prím: Egy prímszám (tízes számrendszerben) Bölcshöldi-prím, ha: minden számjegye 2 vagy 3, a számjegyeinek száma prím, a számjegyek összege prím. Például a 223, ami prím, csak kettes és hármas számjegyekből áll, számjegyeinek száma 3, ami szintén prím, ahogy az összegük, a 7 is.

Fibonacci-prímek: a Fibonacci-sorozat prím tagjai. Például 89.

Kynea-prímek: A $(2^n + 1)^2 - 2$ alakú príme. Például a 79, hiszen $(2^3 + 1)^2 - 2 = (8 + 1)^2 - 2 = 9^2 - 2 = 81 - 2 = 79$, és 79 prím.

Mersenne-prímek: A $2^n - 1$ alakú prímszámok. Például a 127, hiszen prím és $127 = 128 - 1 = 2^7 - 1$.

Smarandache–Wellin-prímek: Az első n prímszám decimális alakjának egymás után fűzésével keletkező prím. Például az első két prím egymás után fűzésével keletkező 23 ilyen, de az első háromból adódó 235 nem ilyen, mert nem prím.

1. Készítsünk egy táblázatkezelő munkafüzetben prímek néven munkalapot, és munkánkat mentjük *prim_6* néven a táblázatkezelő program alapértelmezett formátumában.
2. A *primek1000000ig.txt* fájlból illesszük be az **A3**-as cellától az 1 000 000 alatti prímek listáját. Az első két sorba oszlopfeliratokat készíthetünk a számítások értelmezéséhez.
3. Válogassuk ki az öt prímcsoport tagjait az 1 000 000 alatti prímszámok közül. A számításokat ezen a munkalapon végezzük.
4. Hozzunk létre egy *eredmények* nevű munkalapot, amelyen az **A** oszlop celláit töltsük fel 1-től egész számokkal addig, amennyi a speciális prímszámok darabszámának maximuma. A következő oszlopokban határozzuk meg cellák kiagyása nélkül, növekvő sorrendben:
 - a. a **B** oszlopban a Bölcsföldi-prímeket;
 - a. a **C** oszlopban a Fibonacci-prímeket;
 - a. a **D** oszlopban a Kynea-prímeket;
 - a. az **E** oszlopban a Mersenne-prímeket;
 - a. az **F** oszlopban a Smarandache-Wellin-prímeket.
5. A munkalap adattartományát formázzuk a minta szerint.

	A	B	C	D	E	F
1	1	23	2	7	3	2
2	2	223	3	23	7	23
3	3	32233	5	79	31	2357

6. Készítsük el az *eredmények* munkalapon az adott helyre a mintán látható táblázatot.

	H	I	J	K
1	Az egymilliónál kisebb prímek között			
2	típus	darab	a legkisebb	a legnagyobb
3	Bölcsföldi-prímek			
4	Fibonacci-prímek			
5	Kynea-prímek			
6	Mersenne-prímek			
7	Smarandache-Wellin-prímek			
8	Több típusban is előfordul			

7. Számítsuk ki és jelenítsük meg a hiányzó adatokat.
8. A *primek* munkalapon cseréljük le oszloponként az első 99 sor utáni képleteket az értékükre.

A program standard kimenetére írjuk ki a létrehozott útvonalakat tartalmazó teljes területet. A kimenet egy $N \times N$ méretű HTML táblázat legyen. A nulla értéket tartalmazó cellák maradjanak üresen.

Példa:

Bemenet	Kimenet
11 0 0 13 0 0 2 5 0 0 0 0 0 7 0 0 3 13 11 0 0 17 0 0 0 0 11 0 2 0 0 0 5 0 0 0 17 0 7 0 0 0 0 3 0	<table> <tr><td> </td><td> </td><td>13</td>...</tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>39</td>...</tr> ... <tr><td> </td><td>5</td><td> </td>...</tr> </table>

Beküldendő egy tömörített *i701.zip* állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely tartalmazza a megoldás rövid leírását, és megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

(10 pont)

I. 702. Ez a feladat unokatestvére az előző tanévben elkezdett és az ebben a tanévben folytatott prímekkel kapcsolatos sorozatnak. Most néhány fajta speciális számot keresünk az 1 000 000 alatti pozitív természetes számok között. Név szerint: *automorfikus számok*, *Cullen-számok*, *Harshad-számok*, *interpretírek*, *Szábit-számok* és a *Zuckerman-számok*. Lássuk ezek definícióit!

Az **automorfikus számok** olyan számok, amelynek négyzete ugyanarra a számra végződik, mint maga a szám. Például: $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, $76^2 = 5776$, és $890\,625^2 = 793\,212\,890\,625$, így az 5, 6, 76 és 890 625 mind automorfikus számok.

Cullen-számnak azokat a természetes számokat nevezzük, amelyek felírhatók $n \cdot 2^n + 1$ alakban, ahol n természetes szám. Például $n = 4$ esetén $4 \cdot 2^4 + 1 = 4 \cdot 16 + 1 = 65$ ilyen szám.

Harshad-szám vagy más néven **Niven-szám** minden szám, amely az adott számrendszerben osztható saját számjegyeinek összegével. Például a 42-es szám ilyen, hiszen a számjegyei összege 6, és 42 osztható 6-tal.

Az **interpretírek** két egymást követő, páratlan prímszám számtani közepei. Például a 9 interpretím, mert 7 és 11 átlaga.

A **Szábit-számok**, más néven **Thabit-számok**, **Szábit ibn Kurra-számok** vagy **321-számok** olyan pozitív egész számok, amelyek felírhatók $3 \cdot 2^n - 1$ alakban, ahol n természetes szám. Például $n = 10$ esetén $3 \cdot 2^{10} - 1 = 3 \cdot 1024 - 1 = 3072 - 1 = 3071$ Szábit-szám.

A **Zuckerman-számok** olyan természetes számok, amelyek oszthatók számjegyeik szorzatával. Például a tízes számrendszerben a 212 Zuckerman-szám, mivel $2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$, és a 212 osztható 4-gyel.

- Készítsünk egy táblázatkezelő munkafüzetben specegesz néven munkalapot, és munkánkat mentsük *specialis_egeszek* néven a táblázatkezelő program alapértelmezett formátumában.

- Töltsük fel az **A2:A1000000** tartományt növekvő sorrendben a pozitív egészekkel 1-től 999 999-ig
- A *primek1000000ig.txt* fájlból illesszük be a **B2**-es cellától az 1 000 000 alatti prímek listáját. Az első sorba oszlopfeliratokat készíthetünk a számítások értelmezéséhez.
- Válogassuk ki a hat számcsoporthoz 1 000 000 alatti elemeit. A számításokat ezen a munkalapon végezzük.
- Hozzunk létre egy eredmények nevű munkalapot, amelyen az A oszlop celláit töltsük fel 1-től egész számokkal addig, amennyi a speciális számcsoporthoz darabszámának maximuma. A következő oszlopokban határozzuk meg cellák kihagyása nélkül, növekvő sorrendben:
 - a **B** oszlopban az automorfikus számokat;
 - a **C** oszlopban a Cullen-számokat;
 - a **D** oszlopban a Harshad-számokat;
 - az **E** oszlopban az interprímeket;
 - az **F** oszlopban a Szábit-számokat;
 - a **G** oszlopban a Zuckerman-számokat.
- A munkalap adattartományát formázzuk a minta szerint.

	A	B	C	D	E	F	G
1	1	5	1	1	4	2	1
2	2	6	3	2	6	5	2
3	3	76	9	3	9	11	3

- A *specegeszek* munkalapon cseréljük le oszloponként az első 99 sor utáni képleteket az értékükre.

Segédszámításokat a prímek munkalapon végezhetünk. A megoldásban saját függvény vagy makró nem használható.

Beküldendő az *i702.zip* tömörtett állományban a munkafüzet az eredeti nevén *xlsb* formátumban (bináris munkafüzetként) és egy rövid dokumentáció, amelyben szerepel a kiválogatások módszere, a táblázatkezelő neve és verziószáma.

Letölthető fájl: *primek1000000ig.txt*

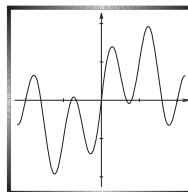
(10 pont)



Beküldési határidő: 2026. június 15.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>





Bevezetés

A fizikában (és sok más tudományterületen) gyakran szükségünk lehet egy függvény szélsőértékének (minimumának vagy maximumának) meghatározására. Ez történhet differenciálszámítás segítségével, grafikus ábrázolással, esetenként algebrai egyenlőtlenségek felhasználásával, vagy erre alkalmas, az interneten szabadon hozzáférhető számítógépes programok (pl. GeoGebra, WolframAlpha) futtatásával.

Ha egy egyváltozós, sima (differenciálható) $f(x)$ függvénynek valamely x_0 pontban (lokális) szélsőértéke van, akkor ott a deriváltja nulla kell hogy legyen. Ezzel egyenértékű megfogalmazás (ami nem igényli a differenciálszámítás formális szabályainak ismeretét) a következő. Ha a függvény értékei az x_0 ponthoz közel, attól kicsiny ϵ távolságra

$$f(x_0 + \epsilon) = f(x_0) + m(x_0)\epsilon + \delta(x_0, \epsilon)$$

alakban írhatók fel (ahol $\delta(x_0, \epsilon)$ „nagyon kicsi” mennyiség), akkor $m(x_0)$ -at a függvény x_0 pontbeli „meredekségének” nevezzük. A „nagyon kicsi” pongyola megfogalmazás itt azt jelenti, hogy δ még ϵ -nál is sokkal kisebb, mert a δ/ϵ hányados ϵ csökkentésével tetszőlegesen kicsivé tehető. A δ mennyiséget gyakran „másodrendűen kicsinek” is nevezzük, és a közelítő számításokban ϵ mellett elhanyagoljuk.

Azokat a pontokat, ahol a függvény meredeksége nulla, *stacionárius pontoknak* nevezzük. Ezen pontok közelében a függvény első közelítésben állandónak tekinthető. Ha egy sima függvénynek valahol szélsőértéke van, ott a meredeksége nulla.¹ Ha $m(x_0) \neq 0$, akkor az x_0 pontból kicsit elmozdulva $f(x)$ növekedne (vagy csökkenne), ellentétes irányban pedig csökkenne (vagy növekedne), az x_0 pontban tehát $f(x)$ -nek sem maximuma, sem pedig minimuma nem lehetne. (Fordítva ez nem feltétlenül igaz, a kérdéses hely lehet inflexió pont is; lásd pl. az $f(x) = x^3$ függvényt az $x = 0$ pontban.)

A szélsőérték-probléma könnyen általánosítható többváltozós függvényekre is. Ha például $h(x, y)$ a tengerszint feletti magasságot jelöli az x és y GPS-koordinátákkal megadott helyen, akkor h szélsőértékénél (pl. egy fokozatosan emelkedő domb tetején) mind az x irányú, mind pedig az y irányú meredekség nulla kell legyen, tehát a kérdéses helyen $h(x, y)$ stacionárius. Ha tetszőleges n változós függvényeket vizsgálunk, ott n különböző „irányú” meredekség eltűnése a szélsőérték szükséges (de nem elégséges) feltétele.

¹Ez a megállapítás nem feltétlenül helyes, ha a kérdéses pont a függvény értelmezési tartományának határára esik. Például az $f(x) \equiv \sqrt{x}$ minimuma az $x_0 = 0$ pontnál van, de ott a függvény meredeksége nem nulla, hanem formálisan „végtelen nagy”.

Variációszámítási problémák

Az olyan feladatokat, amelyekben valamilyen mennyiség szélsőértékét (maximumát, minimumát, esetleg csak a stacionárius helyét) keressük, de nem egyetlen változó függvényében, hanem egy görbe vagy egy síkbeli (esetleg térbeli) tartomány összes lehetséges alakzata közül szeretnénk kiválasztani a számunkra legmegfelelőbbet, *variációszámítási problémának* nevezzük.²



A fizika (és sok más természettudományi szakterület) szinte valamennyi kérdése variációszámítási feladatként is megfogalmazható. Az alábbiakban felsorolunk néhány jellegzetes variációszámítási problémát a geometria, a klasszikus mechanika és az optika köréből.

1. A gömb felületén két adott pont között melyik az a görbe, amelynek ívhossza a legrövidebb? Az ilyen tulajdonságú görbét az adott felület (jelen esetben a gömb) *geodetikus vonalának* nevezik. Megoldás: a két ponton átmenő *főkör* rövidebb íve.

2. Egy függőleges sík két pontját valamilyen alakú rögzített, merev, vékony drótszál köti össze. A szálon egy pontszerűnek tekinthető test (például egy kicsiny, átfúrt gyöngyszem) csúszhat le súrlódásmentesen. Melyik az a görbe, amely mentén a legrövidebb idő alatt ér le a kezdősebesség nélkül elindított kis test a drótszál aljáig? Ez a brachistochron (legrövidebb idő) probléma. Megoldás: *ciklois*.

3. Milyen az alakja annak a síkgörbének, amelynek két adott pont közötti darabját adott tengely körül megforgatva a kapott felület felszíne minimális? Megoldás: $y(x) = a \operatorname{ch} \frac{x-x_0}{a}$ alakban megadható ún. *lánggörbe*.

4. Egy tömegpont egydimenziós mozgását vizsgáljuk valamilyen erőterben, de nem használjuk fel a Newton-féle mozgásegyenleteket. Tudjuk, hogy a test t_1 pillanatban egy ismert x_1 helyen volt, és egy későbbi t_2 pillanatban az ismert x_2 helyhez érkezik. Kiszámítjuk minden elképzelt $x(t)$ út-idő függvényhez tartozó mozgásra a test E_m mozgási energiájának és az E_h helyzeti energiájának különbségét, majd ezt a különbséget a $t_1 < t < t_2$ időtartamra átlagoljuk. Vajon melyik az az $x(t)$ függvény, amelyre ez az átlagérték – amelynek $(t_2 - t_1)$ -szeresét „hatásnak” nevezték el – a lehető legkisebb? Meglepő módon a hatás annál az $x(t)$ függvénynél a legkisebb, amelyik az $F = ma$ Newton-egyenletnek tesz eleget, tehát a ténylegesen megvalósuló mozgást írja le [1].

5. A geometriai optika alapjelenségei: a fény visszaverődése, illetve a fénytörés. Ezt a két jelenséget egyetlen variációs elv, a *Fermat-elv* segítségével így lehet megfogalmazni: A fény egy adott pontból egy másik (adott helyen lévő) pontba úgy jut el, hogy az ehhez szükséges idő a lehető legrövidebb legyen [2].

A variációs problémák külön csoportját képezik azok, amelyeknél a szélsőértéket csak valamilyen *mellékfeltételnek* eleget tevő függvények körében keressük. Ilyen problémákra is mutatunk néhány példát.

6. Két rögzített pont között adott hosszúságú lánc (vagy súlyos, hajlékony kötél) helyezkedik el. Milyen alakú láncnál lesz a gravitációs helyzeti energia minimális?

²Formálisan a variációszámítási feladatok végtelen sok változós függvények, avagy „függvény-változós függvények” szélsőérték-problémája.

Itt a mellékfeltétel a lánc hossza. Megoldás: $y(x) = a \operatorname{ch} \frac{x-x_0}{a} + b$ alakban megadható görbe, amelyet – nem véletlenül – *lánccörbének* is neveznek.

7. A legrégebben, több mint 2000 éve megfogalmazott variációs probléma ez volt: Adott kerület mellett melyik síkidom területe a legnagyobb? A válasz: a kör. Ezt – geometriai intuíciónál felhasználva – már az ókori görögök is tudták, de szigorú matematikai bizonyítást csak a 19. század végén találtak a problémára.

8. Az előző kérdés egyik változata az ún. Dido-féle probléma. A legenda szerint Dido, Türosz hercegnője, miután menekülni kényszerült hazájából, Észak-Afrikába érkezett, ahol a helyi uralkodótól annyi földet kért, amennyit egy ökörbőrrel körbe tud keríteni. Az uralkodó beleegyezett, mire Dido hosszú, keskeny csíkra vágta a bőrt, amiből kerítést készített, majd a lehető legnagyobb földterületet választotta le a tengerpart mentén, megalapítva Karthágó városát. Vajon milyen alakú volt Dido kerítése? A válasz: félkör, amelyet a tengerpart zár le. (A tengerparton nyilván nem kellett kerítést építenie.)

9. Az utóbbi hónapokban a Dido-féle probléma két újabb változata is megjelent a KöMaL kitűzött fizika feladatai között. Az egyik szerint Dido hajózásai során egy 1 km sugarú, kör alakú szigeten kötött ki, valahol a Földközi-tengeren. Legfeljebb mekkora földterületet tudott leválasztani, ha a kerítésének hossza 1 km volt? Dido a kettéosztott sziget kisebb területrészét tekinthette sajátjának [3].

10. Dido legendájának egy másik változata szerint a hercegnő hajójával Észak-Afrika egyik egyenesnek tekinthető partvonalán kötött ki. A helyi uralkodótól annyi földet kért, amennyit a 4 km hosszúságú kerítésével le tudott választani. A kerítés kialakításánál azt is figyelembe vette, hogy a parthoz 1 km-nél közelebb az egységnyi nagyságú földterület ára kétszer akkora, mint ennél távolabb. Mekkora és milyen alakú területet különített el magának Dido, ha célja a lehető *legértékesebb* terület megszerzése volt [4]?

A variációsszámítás matematikája

A fentebb felsorolt néhány (és még sok más) probléma fizikai megfontolásokkal, analóg fizikai jelenségekkel való összekapcsolással is megoldható, de tisztán matematikai megfontolásokat alkalmazva is célhoz érhetünk. A témakör általános matematikai elméletét a svájci *Leonhard Euler* (1707–1783) és az olasz születésű francia *Joseph-Louis Lagrange* (1736–1813) alkotta meg a 18. század közepén. Módszerük alapja a szélsőértéket adó függvény *kicsiny* megváltoztatása, a függvény „variálása” volt; innen származik a matematika ezen ágának elnevezése is, és róluk nevezték el a variációsszámítás alapegyenletét *Euler–Lagrange-egyenletnek*.

A továbbiakban nem fogunk foglalkozni a variációsszámítás általános problémáival (mert azok matematikai apparátusa lényegesen meghaladná a KöMaL fizika rovatában elvárható ismereteket), helyette csak egy egyszerűbb eseten, a Dido-féle problémakör fentebb megfogalmazott 10. feladatán keresztül mutatjuk be a módszer lényegét. Megfontolásaink során intuitív, szemléletes érveket is alkalmazunk, ezek tehát nem tekinthetők szigorú matematikai bizonyításnak, de további munkával azzá tehetők lennének. A kisebb pongyolaságokért cserébe azt kapjuk, hogy

elemi matematikát alkalmazva is bepillantást nyerhetünk ebbe az érdekes és nagyon hasznos tudományterületbe.

Az alábbiakban megfogalmazzuk a variációs feladatok megoldásához vezető lépéseket, és alkalmazzuk azokat a Dido-féle problémakör utoljára említett 10. feladatára. Megfontolásaink alkalmazhatók a Dido-féle problémakör többi (8. és 9.) feladatára, sőt az alapkérdésre, az adott kerület mellett a legnagyobb területű síkidom meghatározására is.

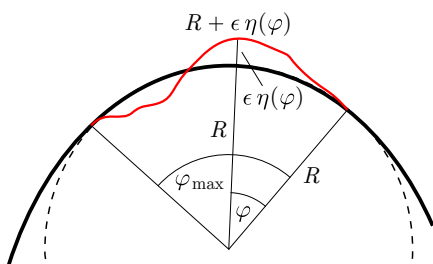
(i) Tegyük fel, hogy Dido földmérői (mert a hercegnő népes kísérettel menekült el Türoszból) azt állítják, hogy megtalálták az adott kerítéshosszhoz tartozó legnagyobb területű, illetve legnagyobb ($E_{\max}$) értékű földdarab határoló görbét. Dido kételkedett ebben, és így gondolkodott: Mi lenne, ha a kerítést az egyik helyen kicsit emerre, máshol pedig kicsit amarra tolnánk el, vagyis a görbét egy kicsit „variálnánk”? Háttha így értékesebb földterülethez juthatnánk!

Mivel azonban Dido nemcsak gyanakvó, de óvatos is volt, először csak *nagyon kicsi* határmódosítást képzelt el. Udvari matematikusa azt javasolta, hogy próbaként a kerítés egyes pontjait a görbe ottani érintőjére merőleges irányban $\epsilon \cdot \eta(s)$ mértékben tolják el, ahol $\eta(s)$ egy ügyesen választott függvény (s a görbe valamelyik pontjától a görbe mentén mért ívhossz), ϵ pedig egy olyan kicsi, dimenziótlan szám, amelynek 1-nél magasabb kitevőjű hatványait ϵ mellett elhanyagolhatjuk.³ Ebben a közelítésben a módosított földterület értéke a korábbihoz képest ϵ -nal arányos mértékben változik meg:

$$E \approx E_{\max} + C \cdot \epsilon,$$

ahol C valamilyen (nyilván a görbe eredeti alakjától és $\eta(s)$ -től függő) állandó.

Vajon milyen előjelű lehet a C szám? Ha C pozitív, akkor pozitív ϵ mellett $E > E_{\max}$, tehát Dido gyanúja jogos volt: a földmérők nem a legjobb megoldást javasolták. Ha C negatív, akkor negatív ϵ mellett lesz $E > E_{\max}$, tehát a földmérők megint bajba kerülnek. Dido csak akkor lehet elégedett a munkájukkal, ha *tetszés szerinti* (de a mellékfeltételt „tisztetben tartó”) $\eta(s)$ függvény mellett $C = 0$.



1. ábra

(ii) Tekintsük a kerítésnek egy kicsiny darabját, ami jól közelíthető egy R sugarú kör valamekkora ívével. (Ez a kör a görbének a kérdéses helyhez tartozó „simulóköre”, R neve görbületi sugár, $1/R$ pedig a görbület.) Mi történik, ha ezen körív φ szöggel jellemezhető pontjához tartozó sugarát $\epsilon \eta(\varphi)$ értékkel megnöveljük, ahol $\epsilon \ll 1$ és $\eta(\varphi)$ valamilyen folytonos és törésmentes függvény (1. ábra)?⁴

³A „határmódosítás” során vigyáznunk kell arra, hogy az előírt mellékfeltétel érvényes maradjon (esetünkben a kerítés hossza ne változzon meg).

⁴Az ábra *nem* méretarányos; a nagyon kicsiny $\epsilon \eta(\varphi)$ sugárnövekményeket a jobb láthatóság kedvéért nagyra rajzoltuk.

Vajon mennyit változik ezen határmódosítás miatt a körülfogott terület eredeti T_0 nagysága és a kerítés K_0 hossza? A területet – a körcikket kicsiny $\Delta\varphi$ nyílásszögű darabkákra osztva és az ϵ^2 -tel arányos tagot elhagyva – így számíthatjuk ki:

$$T = \sum_i \frac{(R + \epsilon \eta_i)^2}{2} \Delta\varphi \approx \frac{R^2}{2} \sum_i \Delta\varphi + \epsilon R \sum_i \eta_i \Delta\varphi = T_0 + \Delta T.$$

A kerítés hosszát úgy kaphatjuk meg, hogy a görbe vonalat sokszöggel közelítjük, és az élek hosszát a Pitagorasz-tétel segítségével számítjuk ki:

$$K \approx \sum_i \sqrt{(R + \epsilon \eta_i)^2 + \left(\epsilon \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{\Delta\varphi} \right)^2} \Delta\varphi,$$

ami a másodrendűen kicsi (ϵ^2 -tel arányos) tagok elhagyása után így írható (felhasználtuk, hogy $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$, ha $x \ll 1$):

$$K = R \sum_i \Delta\varphi + \epsilon \sum_i \eta_i \Delta\varphi = K_0 + \Delta K.$$

Leolvashatjuk, hogy a kerítésnek egy kis darabon történő és kicsiny mértékű módosítása a körülölelt terület nagyságának

$$(1) \quad \Delta T = \epsilon R \sum_i \eta_i \Delta\varphi$$

növekedéséhez vezet, a kerítés hossza pedig

$$(2) \quad \Delta K = \epsilon \sum_i \eta_i \Delta\varphi$$

értékkel lesz nagyobb. (Az η_i mennyiségek lehetnek negatív számok is, így akár ΔK , akár ΔT lehet nullánál kisebb.)

Megjegyzés. A fenti képletekben szereplő összeg a felosztás finomításával egyre jobban egy határozott integrálhoz közelít:

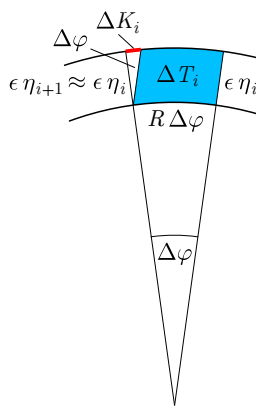
$$\sum_i \eta_i \Delta\varphi \approx \int_0^{\varphi_{\max}} \eta(\varphi) d\varphi.$$

Ezt a kapcsolatot azonban a továbbiakban sehol nem használjuk ki, hiszen sem az összeget, sem az integrált nem fogjuk (nem is tudnánk) konkrétan kiszámítani.

Összevetve (1)-et és (2)-t megállapíthatjuk, hogy

$$(3) \quad \Delta T = R \cdot \Delta K.$$

Ezt – a továbbiak szempontjából fontos – összefüggést a 2. ábráról is leolvashatjuk.⁵ Az R görbületi sugarú görbét



2. ábra

⁵Az ábra méretarányai ismét erősen torzítottak.

egy kis helyen körrel közelítjük, és sok kicsiny, $\Delta\varphi$ nyílásszögű részre osztjuk fel. A felosztás i -edik darabkájára igaz, hogy

$$\Delta K_i \approx \epsilon \eta_i \Delta\varphi, \quad \text{valamint} \quad \Delta T_i \approx R \Delta\varphi \epsilon \eta_i.$$

Ezek szerint (az adott közelítésben) $\Delta T_i = R \Delta K_i$, és ez az arányosság a kicsiny járulékok összegzése után is fennmarad.

(iii) Ha Dido a kerítés két különböző (A -val és B -vel jelzett) részén úgy hajt végre kicsiny módosítást, hogy eközben a kerítés teljes hossza nem változik, akkor fennáll, hogy

$$\Delta K^{(A)} + \Delta K^{(B)} = \epsilon \sum_i \eta_i^{(A)} + \epsilon \sum_i \eta_i^{(B)} = 0.$$

Ha mind a két módosítás helyszínén ugyanakkora az egységnyi földterület ára (vagyis mindkettő a tengerparthoz 1 km-nél közelebb, vagy mindkettő ennél távolabb található), akkor a legkedvezőbb megoldás területe nem változhat meg:

$$\Delta T^{(A)} + \Delta T^{(B)} = R^{(A)} \Delta K^{(A)} + R^{(B)} \Delta K^{(B)} = \Delta K^{(A)} \left(R^{(A)} - R^{(B)} \right) = 0.$$

Mivel $\Delta K^{(A)}$ lehet nullától különböző mennyiség, szükségszerű, hogy $R^{(A)} = R^{(B)}$ teljesüljön, vagyis a kerítés görbületi sugara az azonos földárakhoz tartozó területeken *mindenhol ugyanakkora* kell hogy legyen. Ilyen tulajdonsága a körnek és a köríveknek van, tehát megállapíthatjuk: Dido (tengerparttól tengerpartig húzódó) kerítése optimális esetben a tengerparti (drágább) és a távolabbi (olcsóbb) területen is *körív*.

(iv) Ha Dido két különböző árfekvésű területen hajt végre kicsiny módosítást a kerítésen, és az egész elkülönített terület *értékét* akarja maximalizálni, akkor bármilyen (kicsiny) határmódosításra az elkerített földrész értékváltozása, vagyis a területváltozásoknak a földegységárakkal *súlyozott összege* kell, hogy nulla legyen. Ebben az esetben is fennáll, hogy

$$\Delta K^{(A)} + \Delta K^{(B)} = 0,$$

továbbá

$$2\Delta T^{(A)} + \Delta T^{(B)} = 2R^{(A)} \Delta K^{(A)} + R^{(B)} \Delta K^{(B)} = 0.$$

(Az A jelzés a tengerparti sávra, B pedig a többi területre utal.) A fenti két egyenletből kapjuk, hogy

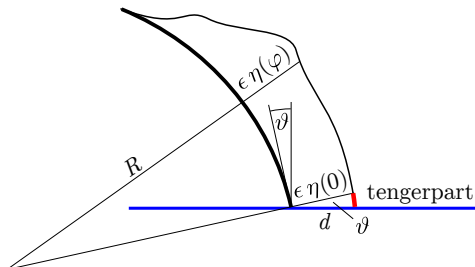
$$(4) \quad R^{(A)} = \frac{1}{2} R^{(B)},$$

vagyis Dido problémájának megoldásában a drágább tengerparti sávban húzódó körív sugara fele az olcsóbb területen található körívének.

(v) A kerítés pontos alakjának megadásához tisztáznunk kell még a köríveknek egymáshoz, illetve a tengerparthoz való csatlakozásának szabályait is. Belátjuk,

hogy a különböző görbületű körívek törésmentesen csatlakoznak egymáshoz, a tengerpartnál pedig a körív érintője merőleges a partvonalra.

Tekintsük először azt a kerítésmódosítást, amely során a tengerpartnál a kerítés érintője valamekkora ϑ szöget zár be a partvonalra merőleges egyenessel, továbbá a határvonal megváltozása során a kerítés vége a tengerparton egy kicsiny d távolsággal mozdul el (3. ábra).



3. ábra

A T terület megváltozása a szélsőértéknél

$$\Delta T = \epsilon R \sum_i \eta_i \Delta \varphi = 0.$$

A területváltozásba nem számítottuk bele a tengerparton kialakuló kicsiny, jó közelítéssel derékszögű háromszögnek tekinthető, $\frac{1}{2}(\epsilon \eta(0))^2 \operatorname{tg} \vartheta$ nagyságú területet, mert az ϵ^2 -tel arányos. A kerítés hosszának megváltozásánál azonban nem hagyhatjuk figyelmen kívül az ábrán piros vonallal jelölt, $d \sin \vartheta$ növekményt:

$$\Delta K = \epsilon \sum_i \eta_i \Delta \varphi + \epsilon \eta(0) \operatorname{tg} \vartheta = 0.$$

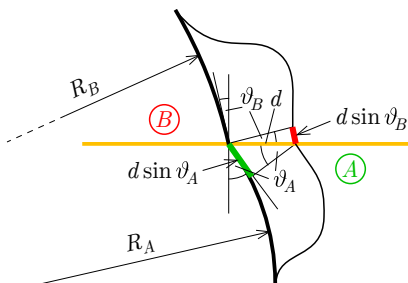
Az itt szereplő összeg $\Delta T = 0$ miatt eltűnik, és marad $\eta(0) \operatorname{tg} \vartheta = 0$. Mivel Didot semmi nem akadályozza meg abban, hogy a tengerparton kicsit odébb indítsa a kerítést, $\eta(0)$ lehet nullától különböző, emiatt $\vartheta = 0$, tehát a görbe érintője valóban merőleges a tengerpart vonalára.

Hasonló megfontolásokból kaphatjuk meg, hogy a különböző görbületű körívek törésmentesen kapcsolódnak egymáshoz. A 4. ábrán látható határmódosításnál még meghagytuk a lehetőségét, hogy a kerítésnek töréspontja legyen. A földterület értékének változatlanságából

$$2R_A \epsilon \sum_i \eta_i^{(A)} \Delta \varphi + R_B \epsilon \sum_i \eta_i^{(B)} \Delta \varphi = 0$$

következik, ami (4) felhasználásával így is írható:

$$(5) \quad \sum_i \eta_i^{(A)} \Delta \varphi + \sum_i \eta_i^{(B)} \Delta \varphi = 0.$$



4. ábra

A kerítés hosszának változatlanságából

$$\epsilon \sum_i \eta_i^{(A)} \Delta \varphi + \epsilon \sum_i \eta_i^{(B)} \Delta \varphi + d \left(\sin \vartheta^{(B)} - \sin \vartheta^{(A)} \right) = 0,$$

vagyis az (5) összefüggés felhasználásával

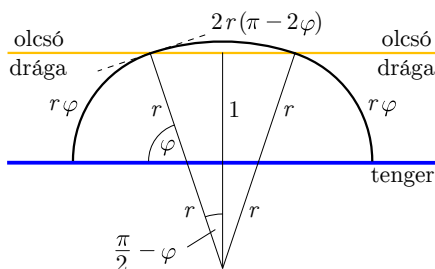
$$d \left(\sin \vartheta^{(A)} - \sin \vartheta^{(B)} \right) = 0$$

következik. Mivel általában $d \neq 0$, a kerítésgörbe törésmentességének $\vartheta^{(A)} = \vartheta^{(B)}$ feltételét kapjuk.

(vi) Az eddigi eredmények ismeretében már pontosan meg tudjuk határozni a kerítés alakját és jellemző adatait, valamint a legnagyobb értékű elkerített terület nagyságát.

Foglaljuk össze, hogy mit tudunk.

1. A határgörbe érintője a görbe végpontjainál merőleges a tengerpartra.
2. A görbe három, törésmentesen csatlakozó körívből áll.
3. Ha a két szélső körív sugara r , a középsőé $2r$.
4. A körívek csatlakozási pontjai 1 km távol vannak a tengerparttól.
5. A kerítés teljes hossza 4 km egység.



5. ábra

Az 5. ábráról leolvashatjuk, hogy (a távolságokat km egységekben számolva)

$$r \sin \varphi = 1 \quad \text{és} \quad 2r\varphi + 2r(\pi - 2\varphi) = 4,$$

vagyis

$$2 \sin \varphi = \pi - \varphi.$$

Ennek a trigonometrikus egyenletnek a numerikus megoldása:

$$\varphi \approx 1,246 \approx 71,4^\circ \quad \text{és} \quad r = 1,055 \text{ km.}$$

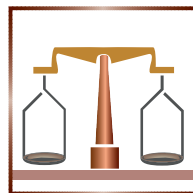
Az r és φ ismeretében már kiszámíthatjuk a Dido által körülkerített legértékesebb terület nagyságát:

$$A = 2 \frac{r^2 \varphi}{2} + \frac{(2r)^2 (\pi - 2\varphi)}{2} - r^2 \sin \varphi \cos \varphi = r^2 (2\pi - 3\varphi - \sin \varphi \cos \varphi) \approx 2,5 \text{ km}^2.$$

- [1] Solt György: Feynman és a legkisebb hatás elve, KöMaL 2018. november, 490–493. o. <http://db.komal.hu/KomalHU/>
- [2] Gnädig Péter: Hengerlencsék képalkotása és a Fermat-elv, KöMaL 2016. május, 296–304. o.
- [3] **P. 5700.** feladat, KöMaL 2026./1. (január), 58. oldal.
- [4] **P. 5717.** feladat, KöMaL 2026./3. (március), 188. oldal.

Gnädig Péter

Vácduka



Mérési feladatok megoldása

M. 447. *Mérjük meg egy laza csavarrugó rugóállandóját különböző, a rugóval összemérhető tömegű nehezékek segítségével*

- a) *statikus módszerrel,*
 b) *dinamikus módszerrel (rezgések tanulmányozásával).*

Vessük össze a kétféle módszerrel kapott eredményeket, és próbáljunk magyarázatot adni az esetleges eltérésre!

(6 pont)

Közli: Vigh Máté, Herceghalom

Megoldás. A méréshez egy $M = (7,76 \pm 0,01)$ g tömegű csavarrugót és 5 darab $m = (10,00 \pm 0,01)$ g tömegű nehezéket használtunk. A tömegeket $\Delta m = \pm 0,01$ g pontosságú mérleggel mértük, a megnyúlás mérésére vonalzót ($\Delta y = \pm 0,1$ cm), a rezgésidő mérésére stopperórát ($\Delta t = \pm 0,2$ s) használtunk.

a) A statikus módszerrel a rugó teljes hosszát mérjük a ráakasztott nehezékek számának (N) függvényében. A rugó teljes hossza

$$y = y_0 + \frac{mg}{k}N,$$

ahol y_0 a felfüggesztett, de terheletlen rugó hossza és k a keresett rugóállandó.

Az 1. táblázat a mért adatokat mutatja.

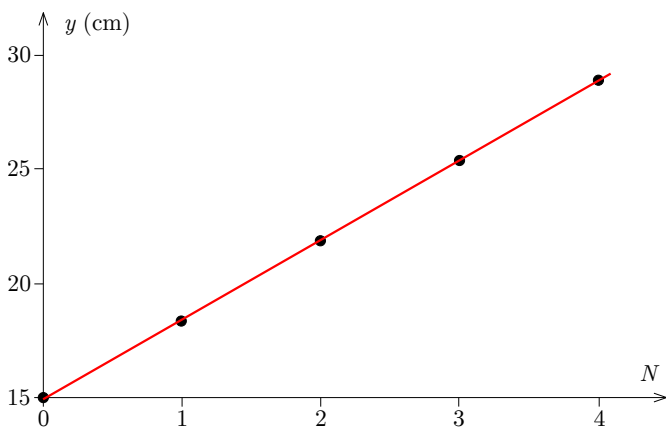
N	y (cm)
0	15,0
1	18,4
2	21,9
3	25,4
4	28,9

1. táblázat

Az 1. ábrán látható grafikonon y -t N függvényében ábrázoltuk, és a mérési pontokra $y = a_1 N + b_1$ alakú egyenest illesztettünk. Az illesztés eredménye:

$$a_1 = (3,48 \pm 0,03) \text{ cm}, \quad b_1 = (14,96 \pm 0,08) \text{ cm}.$$

A statikus módszerrel mért rugóállandó ebből:



1. ábra

$$k_s = \frac{mg}{a_1} = (2,82 \pm 0,03) \text{ N/m}.$$

A hibát a meredekség hibája adja: $\Delta a_1/a_1 \approx 1\%$ (míg az m tömeg és a g nehézségi gyorsulás relatív hibája csak $0,1\%$).

b) A dinamikus módszernél a terhelte rugó rezgésének periódusidejét mérjük a terhelés függvényében. Ebben az esetben azonban a rugó tömegét is figyelembe kell vennünk. (A statikus esetben az csak a terheletlen hosszt módosította, a függvény meredekségét nem változtatta meg.) A rugó különböző részei azonban nem azonos sebességgel mozognak: az egyik vége áll, míg a másik a ráakasztott testekkel együtt v sebességgel mozog.

Legyen a rugó hossza L , tömege M . A rögzített végétől x távolságra a rugó kicsiny, Δx hosszúságú és

$$\Delta M = \frac{M}{L} \Delta x$$

tömegű darabja

$$v(x) = \frac{x}{L} v$$

sebességgel fog mozogni. (Feltételezzük, hogy a rugó megnyúlása $Nm > M$ miatt közel egyenletes.) A kicsiny darab mozgási energiája

$$\Delta E_m = \frac{1}{2} \Delta M (v(x))^2 = \frac{1}{2} \frac{M}{L} \left(\frac{xv}{L} \right)^2 \Delta x.$$

Ezt összegezve (integrálva) a rugó teljes hosszára a rugó mozgási energiája:

$$E_m = \frac{Mv^2}{2L^3} \int_0^L x^2 dx = \frac{1}{2} \frac{M}{3} v^2.$$

Tehát a rugó úgy viselkedik, mint egy $M_{\text{eff}} = M/3$ tömegű pontszerű test a rugó végén. Ebből az Nm tömeggel terhelt rugó rezgésének periódusideje:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Nm + M/3}{k}}.$$

Négyzetre emelve:

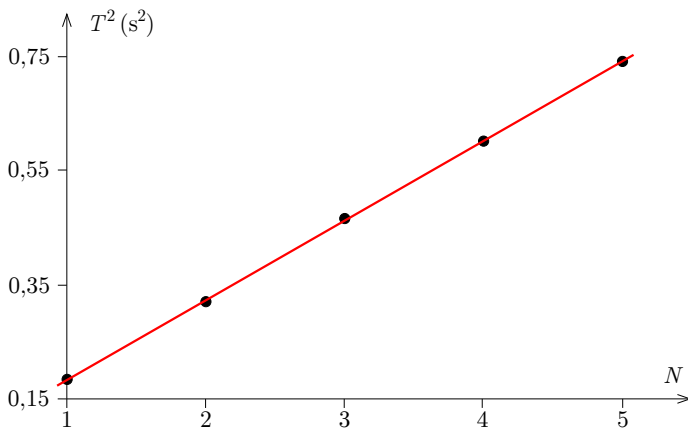
$$T^2 = \frac{4\pi^2 m}{k}N + \frac{4\pi^2}{k}M_{\text{eff}},$$

azaz T^2 N lineáris függvénye.

Minden esetben 50 periódus idejét mértük, a mért és számított adatokat a 2. táblázat mutatja.

N	$50T$ (s)	T (s)	T^2 (s ²)
1	21,2	0,424	0,180
2	28,2	0,564	0,318
3	34,1	0,682	0,465
4	38,8	0,766	0,587
5	43,1	0,862	0,743

2. táblázat



2. ábra

A 2. ábrán látható grafikonon T^2 -et ábrázoljuk N függvényében, és a mérési pontokra $T^2 = a_2N + b_2$ alakú egyenest illesztettünk. Az illesztés eredménye:

$$a_2 = (0,141 \pm 0,002) \text{ s}^2, \quad b_2 = (0,039 \pm 0,004) \text{ s}^2.$$

A hibaszámításnál $\Delta T = \Delta t/50$, és T^2 relatív hibája pedig T relatív hibájának kétszerese. Ebből a dinamikus módszerrel mért rugóállandóra

$$k_d = \frac{4\pi^2 m}{a_2} = (2,80 \pm 0,03) \text{ N/m},$$

a rugó effektív tömegére pedig

$$M_{\text{eff}} = \frac{mb_2}{a_2} = (2,7 \pm 0,3) \text{ g}$$

adódik. A hibaszámításnál m hibája ismét elhanyagolható az illesztési paraméterek hibája mellett, így k_d relatív hibája megegyezik a_2 relatív hibájával, M_{eff} relatív hibája pedig a_2 és b_2 relatív hibájának összege.

Összehasonlítás és diszkusszió.

A két különböző módszerrel kapott rugóállandó hibahatáron belül megegyezik:

$$k_s = (2,82 \pm 0,03) \text{ N/m}, \quad k_d = (2,80 \pm 0,03) \text{ N/m}.$$

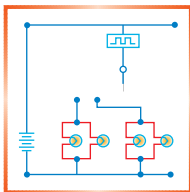
A rugó mért effektív tömege hibahatáron belül megegyezik a számított értékkel:

$$M_{\text{eff}} = \frac{mb_2}{a_2} = (2,7 \pm 0,3) \text{ g}, \quad \frac{M}{3} = (2,59 \pm 0,01) \text{ g}.$$

A két eredmény mutatja, hogy a rugó effektív tömegét helyesen vettük figyelembe.

Erdélyi Dominik (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

13 dolgozat érkezett. Helyes 3 megoldás. Kicsit hiányos (5 pont) 5, hiányos (2–4 pont) 5 dolgozat.

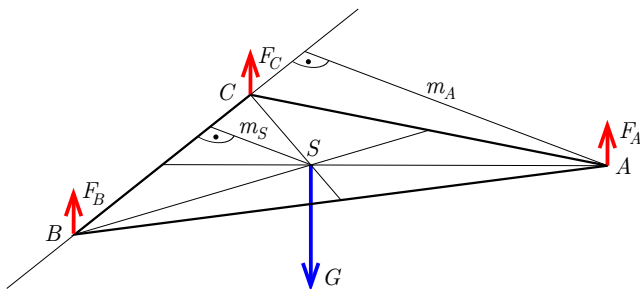


Fizika gyakorlatok megoldása

G. 915. Egy a , b és c oldalélű háromszög alakú, vékony lemez homogén tömegeloszlású, súlya G . A lemezt vízszintes helyzetben, a háromszög csúcsainál alátámasztjuk. Mekkora erővel terheli a lemez az alátámasztási pontokat?

(4 pont)

I. megoldás. Az 1. ábrán berajzoltuk a háromszög súlyvonalait és a háromszögre ható erőket. A lemezre ható G nehézségi erőt egyetlen, a súlypontban ható erőként vettük figyelembe.



1. ábra

A lemez egyensúlyban van, így a rá ható erők forgatónyomatékának eredője bármely tengelyre vonatkoztatva nulla. Vizsgáljuk először a BC tengelyre vonatkoztatott forgatónyomatékokat. Ekkor F_B és F_C forgatónyomatéka nulla, tehát az egyensúlyhoz az szükséges, hogy

$$F_A m_A = G m_S.$$

A súlypont a súlyvonal csúctól távolabbi harmadolópontjában van, így a párhuzamos szelők tétele alapján

$$\frac{m_A}{m_S} = 3,$$

amiből

$$F_A = \frac{G}{3}.$$

Ugyanígy járhatunk el a háromszög többi oldalára illeszkedő tengellyel is, tehát a háromszög alakjától függetlenül mindhárom alátámasztási pontot azonos erő terheli:

$$F_A = F_B = F_C = \frac{G}{3}.$$

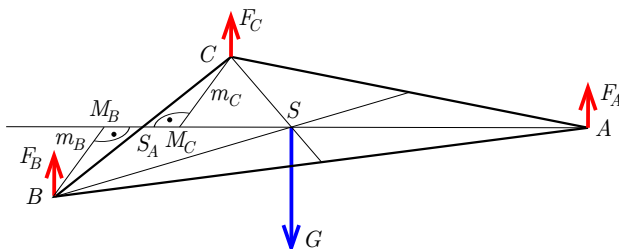
Csikós Attila (Budapest, Városmajori Gimn., 9. évf.)

II. megoldás. Az előző megoldáshoz hasonlóan felrajzoltuk a háromszöget (2. ábra), de most az AS tengelyre vizsgáljuk a forgatónyomatékok egyensúlyát. Ekkor G és F_A forgatónyomatéka nulla, tehát az egyensúly feltétele:

$$F_B m_B = F_C m_C.$$

A $BM_B S_A$ és $CM_C S_A$ háromszögek egybevágósága miatt $m_B = m_C$, és így $F_B = F_C$. Ugyanígy járhatunk el egy másik súlyvonal esetében is, tehát a három alátámasztási pontra ható erő megegyezik. A három erő eredőjének egyensúlyt kell tartania a G nehézségi erővel, így az előző megoldással összhangban:

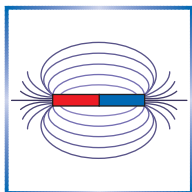
$$F_A = F_B = F_C = \frac{G}{3}.$$



2. ábra

Blaskovics Bálint (Budapest, Óbudai Árpád Gimn., 9. évf.)

40 dolgozat érkezett. Helyes 20 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 3, hiányos (1–2 pont) 7, hibás 10 dolgozat.



Fizika feladatok megoldása

P. 5706. Homogén tömegeloszlású vékony vasrúdból a , b és c hosszúságú darabokat vágunk le, és azokból háromszög alakú merev keretet hozunk létre. A vaskeret teljes súlya G . A keretet vízszintes helyzetben a csúcsainál alátámasztjuk. Mekkora erővel terheli a vaskeret az alátámasztási pontokat?

(4 pont)

Közli: Gnädig Péter, Vácduka

Megoldás. A rudak homogén tömegeloszlása miatt az egyes rudakra ható nehézségi erő:

$$G_a = \frac{a}{a+b+c}G, \quad G_b = \frac{b}{a+b+c}G, \quad G_c = \frac{c}{a+b+c}G.$$

A homogenitás miatt ezek az erők az egyes rúddarabok felezőpontjaiban hatnak, így az egyes rúddarabok súlya egyformán oszlik el a két végpont között. Ez alapján az egyes csúcsokban az alátámasztásra ható erők:

$$F_A = \frac{b+c}{2(a+b+c)}G, \quad F_B = \frac{a+c}{2(a+b+c)}G, \quad F_C = \frac{a+b}{2(a+b+c)}G.$$

Mezei Marcell (Debreceni Fazekas Mihály Gimnázium, 10. évf.)

24 dolgozat érkezett. Helyes 15 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 2, hiányos (1–2 pont) 5, hibás 2 dolgozat.

P. 5707. Eduárd egy hosszú, állandó hajlásszögű lejtőn gurul lefelé a kerékpárjával egyenletes sebességgel. Hogyan függ a sebességtől a fékeken disszipálódó teljesítmény?

Eduárd tömege biciklivel együtt m , a lejtő hajlásszöge α , és fékezés nélkül Eduárd $v_{\max}$ sebességre gyorsulna fel.

(4 pont)

Közli: Bodor András, Budapest

Megoldás. A gördülési ellenállás elhanyagolható a légellenálláshoz képest, ezért azt nem vesszük figyelembe. A $v_{\max}$ maximális sebességet akkor éri el a biciklis, ha egyáltalán nem fékez, ilyenkor a közegellenállási erő egyensúlyt tart a nehézségi erő lejtőirányú komponensével:

$$mg \sin \alpha = \frac{1}{2} c \rho A v_{\max}^2 = k v_{\max}^2,$$

ahol k a c alaktényezőtől, a levegő ρ sűrűségétől és a biciklis A keresztmetszetétől függő, de a sebességtől független állandó. Az egyenletből:

$$k = \frac{mg \sin \alpha}{v_{\max}^2}.$$

Ha a biciklis $v < v_{\max}$ állandó sebességgel gurul, akkor a közegellenállási erő és a fékezőerő összege tart egyensúlyt a nehézségi erő lejtőirányú komponensével:

$$mg \sin \alpha = k v^2 + F_f,$$

amiből a fékezőerő:

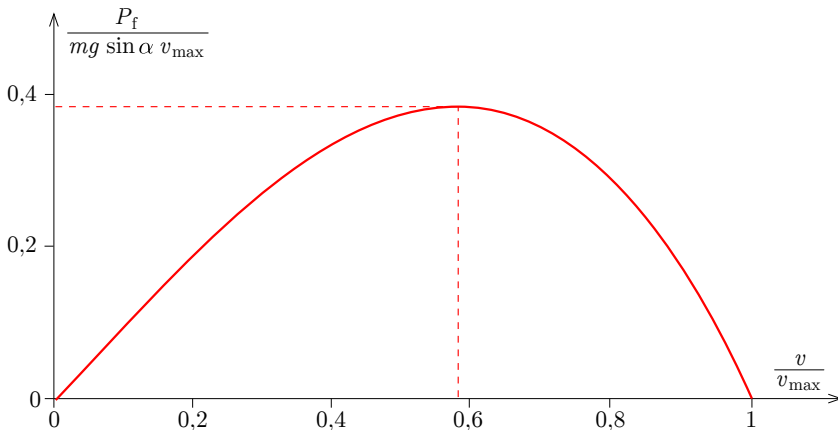
$$F_f = mg \sin \alpha - kv^2 = mg \sin \alpha \left(1 - \frac{v^2}{v_{\max}^2} \right).$$

A fékezőerő teljesítménye $-F_f v$, tehát a féken disszipálódó hőteljesítmény:

$$P_f(v) = F_f v = mg \sin \alpha \left(1 - \frac{v^2}{v_{\max}^2} \right) v.$$

Molnár Lili (Szolnok, Verseghy Ferenc Gimn., 12. évf.)

Megjegyzés. A $P_f(v)$ függvényt az ábrán látható grafikonon ábrázoltuk.



Látható, hogy a grafikonnak valahol a $0 < v < v_{\max}$ tartományon maximuma van. Ez érthető, hiszen nagyon kis v sebességnél ugyan nagy erővel kell fékezni, de a $P_f = F_f v$ miatt minimális a féktelejesítmény, a határsebességhez közeledve pedig az F_f fékerő csökken. A maximumhelyet és a maximum értéket le lehet olvasni a grafikonról, vagy deriválással lehet meghatározni:

$$\begin{aligned} P_f &= mg \sin \alpha v_{\max} \left(\frac{v}{v_{\max}} - \left(\frac{v}{v_{\max}} \right)^3 \right), \\ \frac{dP_f}{d\left(\frac{v}{v_{\max}}\right)} &= mg \sin \alpha v_{\max} \left(1 - 3 \left(\frac{v}{v_{\max}} \right)^2 \right) = 0, \\ \left(\frac{v}{v_{\max}} \right)_{\max} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,577, \\ P_{f \max} &= mg \sin \alpha v_{\max} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} mg \sin \alpha v_{\max} \approx 0,385 \cdot mg \sin \alpha v_{\max}. \end{aligned}$$

25 dolgozat érkezett. Helyes 15 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 4, hiányos (1–2 pont) 5, hibás 1 dolgozat.

P. 5717. Dido legendájának egy másik változata szerint a hercegnő hajójával Észak-Afrika egyik egyenesnek tekinthető partvonalán kötött ki. A helyi uralkodótól annyi földet kért, amennyit a 4 km hosszúságú kerítésével le tudott választani. A kerítés kialakításánál azt is figyelembe vette, hogy a parthoz 1 km-nél közelebb az egységnyi nagyságú földterület ára kétszer akkora, mint ennél távolabb. Mekkora és

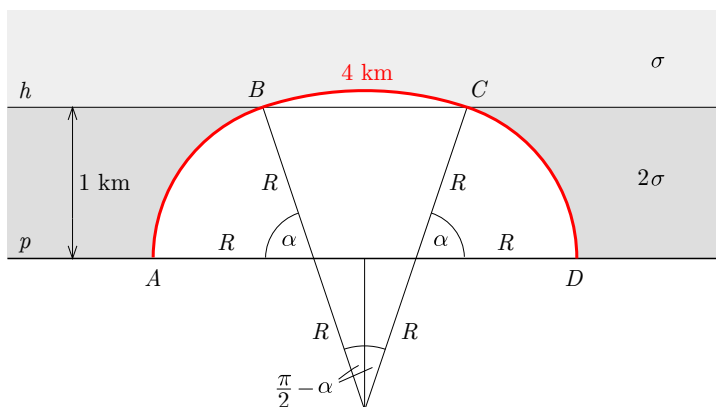
milyen alakú területet különített el magának Dido, ha célja a lehető legértékesebb terület megszerzése volt?

(Lásd a **P. 5700.** feladatot lapunk 2026. januári számában.)

(5 pont)

Közli: Vigh Máté, Herceghalom

Megoldás. Végezzük el a következő gondolat kísérletet: 4 egység hosszúságú fonalat helyezünk egy olyan folyadékhártyába, amelynek felületi feszültsége egy h határvonal két oldalán különböző (σ és 2σ , lásd az ábrát). A fonal A és D végei szabadon elmozdulhatnak a p peremen, amely 1 egység távolságra van a h határvonaltól. Ezután kilyukasztjuk a fonal és a p egyenes által körbevett részt. A megmaradó folyadékhártya összenergiája minimális lesz, amely épp azt jelenti, hogy a körbehatárolt terület értéke (árral súlyozott összterülete) maximális.



A gondolat kísérlet alapján a következő megállapításokat tehetjük.

- Egyensúlyban az A és D pontokban a fonal merőleges a p egyenesre, mert különben elmozdulna.

- A fonal egyes darabjai körívek, mert a felületi feszültségből származó erő mindenhol merőleges a fonálra (a fonálban ható erő nagysága állandó), és az egyes tartományokon belül az egységnyi hosszra ható erő állandó.

- A BC körív sugara kétszer akkora, mint az AB és a CD körívek sugara, hiszen ott fele akkora a felületi feszültség (az egységnyi hosszra ható erő).

- A B és C pontokban a fonálnak törésmentesnek kell lennie, mert nincsen olyan erő, amely ki tudná egyenlíteni a két megtört fonáldarabban ébredő erők eredőjét.

Ezeket figyelembe véve az ábra alapján:

$$2 \cdot R\alpha + 2R(\pi - 2\alpha) = 4 \text{ km},$$

$$R \sin \alpha = 1 \text{ km}.$$

Rendezve α -ra a következő transzcendens egyenletet kapjuk:

$$2 \sin \alpha = \pi - \alpha,$$

amelyet numerikusan megoldva:

$$\alpha \approx 1,246 \approx 71,4^\circ.$$

Ebből

$$R \approx 1,055 \text{ km}$$

és a keresett terület nagysága:

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot \frac{R^2 \alpha}{2} + \frac{(2R)^2 (\pi - 2\alpha)}{2} - 2 \cdot \frac{R \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot R \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{2} = \\ &= (2\pi - 3\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) R^2 \approx 2,5 \text{ km}^2. \end{aligned}$$

Kossár Benedek Balázs (Pécsi Leőwey Klára Gimn., 10. évf.)

4 dolgozat érkezett. Helyes 1 megoldás. Hiányos (1–3 pont) 3 dolgozat.

Felhívás a Forráspont Fizikátáborra



Az előző két sikeres tábor után ezen a nyáron

2026. július 26. és július 31. között

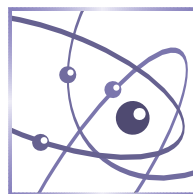
harmadszor is megrendezésre kerül a Forráspont Fizikátábor.

A tábor a Fagyponthoz tartozó Fizikátábor folytatása, egy hatnapos balatoni vakációzás formájában. Célunk a fizikus közösség összehozása és a fizikaversenyek feladatainak népszerűsítése. A táborban lesz sok előadás, elmaradhatatlanok a trükkös és különleges fizikafeladatok, és tervben van sok-sok sport, fürdőzés, zenélés és társasozás. Lesznek még meghívott előadók és meglepetésvendégek is. Helyszín, költségek, további információ és jelentkezés:

<https://sites.google.com/view/forraspontfizika/>

A szervezők

Fizikából kitűzött feladatok



M. 450. Az okostelefonok rendelkeznek mágneses indukció mérésére alkalmas szenzorral. Keressünk az iskolai szertárban, vagy készítsünk saját magunk akkora tekercset, amelybe behelyezhető a telefon. Vessük össze az áramjárta tekercs közepén mért mágneses indukció nagyságát az elméleti várakozással! Térképezzük fel a mágneses mezőt a tekercs tengelye mentén!

(6 pont)

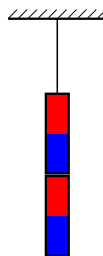
Közli: *Széchenyi Gábor*, Budapest

G. 925. Kerékpárral hosszú lejtőn gurulunk le, amelynek végén meg szeretnénk állni. Mikor és miért kopik kevésbé a kerékpár fékberétege, ha jó nagy sebességre gyorsulunk, és a lejtő végén erősen fékezünk, vagy ha végig fékezünk, és nem engedjük száguldani a járművet? (Tételezzük fel, hogy blokkolás nélkül fékezünk, és a fék kopása a sebességtől függetlenül egyenesen arányos a súrlódási munkával.)
(4 pont)

G. 926. Két egyforma rúd-mágnes mindegyike $0,5\text{ N}$ súlyú. Ha az egymással érintkező mágneseket vízszintes, súrlódásmentes asztalra tesszük, akkor $1,5\text{ N}$ nagyságú, vízszintes erővel tudjuk azokat szétválasztani (1. ábra).



1. ábra



2. ábra

A mágneseket a 2. ábrán látható módon felfüggesztjük.

a) Mekkora a feszítőerő a fonálban, és mekkora a felületi nyomóerő a mágnesek között?

b) Oldjuk meg a feladatot úgy is, hogy az egyik mágnes $0,5\text{ N}$, a másik pedig 1 N súlyú, és a közöttük kialakuló vonzóerő változatlanul $1,5\text{ N}$!

(3 pont)

G. 927. Ha egy szemüveges ember télen a szabadból egy meleg helyiségbe lép, akkor legtöbbször bepárasodik a szemüvege. Ha viszont azonnal megtörli a szemüvegét, akkor az már általában nem párasodik be újra. Magyarázzuk meg a jelenséget!

(4 pont)

G. 928. Síktükörbe nézve a tükörképünket látjuk, ami nem ugyanolyan, ahogy más emberek látnak minket. Két síktükör segítségével hogyan tudjuk elérni, hogy olyannak lássuk az arcunkat, ahogy mások látják?

(3 pont)

P. 5733. Egy fiú kosárlabdapályán gyakorolja a büntetődobásokat. A kosár az eldobás helyétől vízszintesen $d = 4\text{ m}$ távolságban, függőlegesen $H = 1$ méterrel magasabban van. Az eldobott labda kezdősebessége $v_0 = 10\text{ m/s}$.

a) Milyen szögben dobja el a fiú a labdát, hogy az csont nélkül jusson a kosárba?

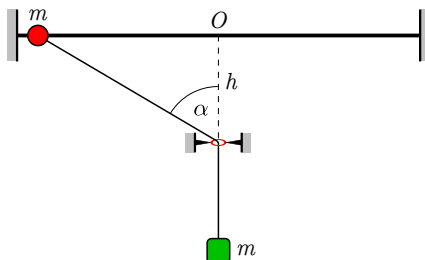
b) Legalább és legfeljebb mekkora v_0 mellett sikerülhet a dobás, ha figyelembe vesszük, hogy a terem mennyezete a labda eldobási magasságától 6 m -re található?

A labdát és a kosarat (a labda és a gyűrű közepét) pontszerűnek tekinthetjük, továbbá a légellenállást elhanyagolhatjuk.

(5 pont)

Közli: Gnädig Péter, Vácduka

P. 5734. Egy pontszerű, m tömegű golyó súrlódásmentesen mozoghat egy hosszú, vízszintes rúdon. A golyóhoz rögzített fonalat egy, a rúd alatt h mélységben lévő apró karikán vezettük át, majd egy ugyancsak m tömegű nehezéket erősítettünk rá. Amikor a ferde fonalszár $\alpha = 60^\circ$ -os szöget zár be a függőlegessel, akkor a golyót lökésmentesen elengedjük.



a) Hányszor nagyobb a fonálban fellépő kötélerő a karika fölött történő áthaladásakor, mint az elengedés utáni pillanatban?

b) Mekkora a golyó egyensúlyi pontja körüli kis rezgésének a periódusideje?

(5 pont)

Közli: Zsigri Ferenc, Budapest

P. 5735. A Földről nézve legalább mennyi idő telik el aközött, hogy a Mars oppozícióban, majd kvadrátúrában van?

A Földről nézve a Mars oppozícióban a Nappal átellenes irányban, kvadrátúrában pedig a Naptól 90° szögtávolságban helyezkedik el. Használjuk azt a közelítést, hogy a Föld 1 CSE, a Mars pedig 1,5 CSE sugarú körpályán, azonos irányban kering az ekliptika síkjában a Nap körül.

(4 pont)

Közli: Varga Vázsony, Genf (Svájc)

P. 5736. A titánfaló kicsi zöld emberkék egyik kutatóúrhajója rátalált egy gömb alakú kisbolygóra, mely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- nincs légköre,
- mindig ugyanazon oldalát fordítja napja felé,
- a bolygón a napállandó a földivel megegyező, 1360 W/m^2 ,
- felszínének abszorpciós együtthatója 0,5.

a) Határozzuk meg a bolygó hőmérsékletét, feltételezve, hogy az (a titán jó hővezetési képessége miatt) mindenhol egyforma.

b) A titánfaló kicsi zöld emberkék a bolygó anyagának külszíni kitermelésébe kezdtek a bolygó felszínének negyedrészen. A „művelt” terület abszolút fekete

testnek tekinthető. Hogyan változik a bolygó hőmérséklete, ha a bánya a bolygó árnyékos, illetve ha a napos oldalán található?

(Feltételezhetjük, hogy a napos oldal esetén a merőleges vetület tekintetében is a napos oldal fele a művelt terület.)

(5 pont)

Közli: *Szentivánszki Soma*, Budapest

P. 5737. Egy jó vezető sík fémlap fölött d távolságban lévő m tömegű és Q nagyságú pontszerű töltést a fémlap síkjával párhuzamos irányban v_0 kezdősebességgel meglökünk. Mennyi idő múlva és hol csapódik be a töltés a fémlapba? (A nehézségi erő az elektromos erők mellett elhanyagolható.)

(5 pont)

Közli: *Cserti József*, Budapest

P. 5738. Vékony huzalból hajlított d sugarú körvezető középpontjában egy jóval kisebb, $r \ll d$ sugarú, R ellenállású vezető gyűrűt helyezünk el úgy, hogy tengelyeik egybe esnek. A körvezetőben I nagyságú stacionárius áram folyik. Mekkora töltés halad át a gyűrű egy adott keresztmetszetén, miközben azt a körvezetőtől nagyon messzire mozgatjuk el? (Az önindukciós effektusoktól tekintünk el.)

(4 pont)

Közli: *Németh Róbert*, Budapest

P. 5739. Régebben a szürkehályogműtét során a beteg szemből eltávolított szemlencse helyett nem ültettek be műlencsét. Az így megoperált beteg +12 dioptriás szemüveggel élesen látta a messze lévő tárgyakat. Hány dioptriás szemüveggel tudott 30 cm távolságra levő könyveket olvasni?

(4 pont)

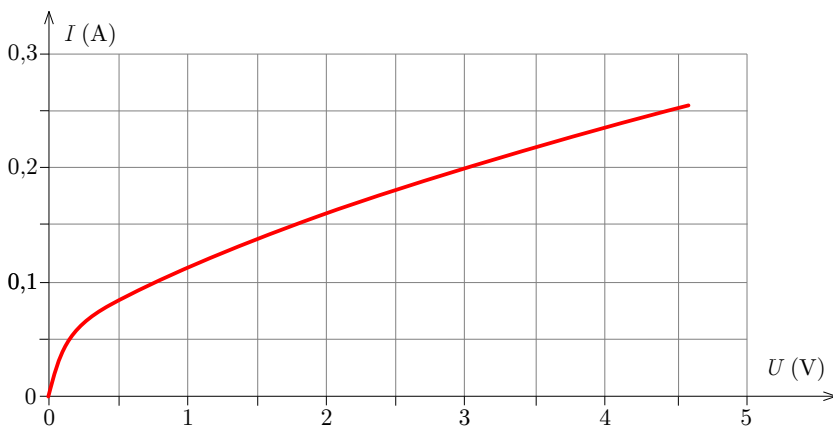
Példatári feladat nyomán

P. 5740. Szobahőmérsékletű és légköri nyomású levegőben a nitrogénmolekulák átlagos szabad úthossza kb. 65 nm. Becsüljük meg, hogy kiindulási pozíciójából átlagosan milyen messzire jut egy nitrogénmolekula 1 óra alatt!

(5 pont)

Közli: *Széchenyi Gábor*, Budapest

P. 5741. Egy izzólámpa $I(U)$ karakterisztikája az ábrán látható.



a) Ábrázoljuk az izzószál hőmérsékletét a felvett teljesítmény függvényében!

Tegyük fel, hogy az izzószál ellenállása arányos az abszolút hőmérséklettel, és a környezet hőmérséklete 27°C .

b) Az izzószál kétféle módon ad le hőt: egyrészt hővezetéssel, másrészt hősugárzással. Határozzuk meg az izzószál effektív sugárzó felületének nagyságát!

Feltehetjük, hogy az izzószál abszolút fekete test.

(6 pont)

Közli: Vankó Péter, Budapest

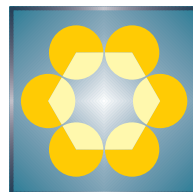


Beküldési határidő: 2026. június 15.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS (Volume 76. No. 5. May 2026)



Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 287): **K. 904.** There are three streets in a village: street T , V and P . People in T street always tell the truth, people in V street always lie, and people P street tell the truth and lie alternately. One day the watchman on duty in the fire tower of the village saw a column of smoke rising from one of the streets. A few seconds later the telephone rang. The caller said only this: ‘There is fire in the street!’ The watchman on duty asked: ‘Which street?’ The caller answered: ‘On P street.’ Which street did the firefighters have to go to? (Estonian Competition Problem)

K. 905. Anna is really looking forward to the summer vacation, so she decided to write down in her notebook all the letter sequences that can be formed from the letters of the word VAKÁCIÓ. At what position does the word VAKÁCIÓ appear on this list, if Anna proceeds in alphabetical order? (Proposed by *Katalin Abigél Kozma*, Győr)

K. 906. One of the diagonals of a rectangle is three times as long as one of the sides, and it is one unit longer than the other side. How long are the sides of the rectangle measured in the given unit? (Proposed by *Mátyás Czett*, Zalaegerszeg)

K/C. 907. During a house renovation, our next task is to tile a rectangular pantry. We have 1×1 square tiles. The side lengths of the pantry are integers (measured in these units). How many tiles are needed if the number of edge tiles (those along the walls or door) is half of the total number of tiles? (Scottish Competition Problem)

K/C. 908. Anna has placed a unit disk on the table, and Boglárka has arranged three identical disks around Anna’s disk. Every disk on the outside is tangent to Anna’s disk and exactly two other disks. Find the radius of Boglárka’s disks. (Proposed by *Katalin Abigél Kozma*, Győr)

New exercises for practice – competition C (see page 288): **Exercises up to grade 10:**
K/C. 908. See the text at Exercises **K.** **K/C. 909.** See the text at Exercises **K.** **Exercises for everyone:** **C. 1903.** The 17 enthusiastic members of a math club would like to get together for a group math session during the summer break, so they collect everyone’s availability: from each person, they receive a time interval consisting of at least two days.

(For example, from July 3 to July 6.) After collecting the data, it turned out that among any three students there are two who have marked a common day. Is it guaranteed that there will be a day such that every student will be available? Is it guaranteed that there will be two days such that every student will be available on at least one of the two days? (Proposed by *Zoltán Paulovics*, Budapest) **C. 1904.** AB is the hypotenuse of right triangle ABC . Let D be the foot of the altitude from C . Let E be the foot of the perpendicular from D to AC , and let F be the foot of the perpendicular from E to AB . Given that F is the midpoint of the hypotenuse, find the lengths of the legs of the triangle. (Proposed by *Márton Ujházy*, Budapest) **C. 1905.** Let a, b, c and d be distinct positive integers. Among the four statement below two are true and two are false: (i) $a < b < c < d$, (ii) $a + b = c + d$, (iii) $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, (iv) $a^3 - b^3 = c^3 - d^3$. Find the smallest possible value of d . (Scottish Competition Problem) **Exercises upwards of grade 11: C. 1906.** We draw all the excircles tangent to the sides of a circumscribed trapezoid. Prove that the sum of the areas of the circles tangent to the bases is at least as big as the sum of the areas of the circles tangent to the legs. (Proposed by *Márton Ujházy*, Budapest) **C. 1907.** We wrote down all the fractions between 0 and 1 that have a denominator of at most 99 in increasing order. Find the fraction right after $\frac{11}{21}$. (Proposed by *György Birkás*, Siófok)

New exercises – competition B (see page 289): **B. 5534.** Solve the equation $\{x\} + \left\{\frac{1}{x}\right\} = 1$ on the set of real numbers, where $\{x\}$ denotes the fractional part of x . (3 points) (Proposed by *Gábor Holló*, Budapest) **B. 5535.** a, b and c are the sides and r is the inradius of a scalene triangle. Let s_a be the length of the median corresponding to side a , and let t_a denote the distance of the incenter from the line of median s_a . Prove that $2t_a s_a = |b - c| \cdot r$. (3 points) (Proposed by *Géza Kiss*, Csömör) **B. 5536.** We have written six non-negative integers with a sum of 2027 at the vertices of a regular hexagon. In a step we replace one of the six numbers with the absolute value of the difference of the numbers at the adjacent vertices. Is it possible that after a sequence of such steps there will be 0 at every vertex? (5 points) (Proposed by *Sándor Róka*, Nyíregyháza) **B. 5537.** In circle k chord CD bisects chord AB . The tangents of k at C and D , respectively intersect line AB at X and Y , respectively. Prove that $XA = YB$. (4 points) (*Crux Mathematicorum*) **B. 5538.** Solve the following equation on the set of real numbers: $\frac{1}{x^2-5x+9} + \frac{1}{y^2-5y+9} + \frac{1}{z^2-5z+9} = \frac{1}{\sqrt{6x-9}} + \frac{1}{\sqrt{6y-9}} + \frac{1}{\sqrt{6z-9}}$. (5 points) (Proposed by *Mihály Bence*, Brassó) **B. 5539.** For any positive integer n prove that $\frac{n! \cdot \left[\frac{n}{30}\right]!}{\left[\frac{n}{2}\right]! \cdot \left[\frac{n}{3}\right]! \cdot \left[\frac{n}{5}\right]!}$ is an integer, and divides the least common multiple of integers 1, 2, ..., n . (5 points) (Proposed by *Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821–1894)*, Saint Petersburg) **B. 5540.** Find the smallest and the largest possible area of the convex polygon K if its orthogonal projections on the x -axis, the y -axis and the line $x = y$ is a line segment of unit length. (6 points) (Based on a Russian problem) **B. 5541.** Let A, B and C be three points of a parabola with focus F , in this order. Let the tangent of the parabola at B intersect the tangent at P in point A , and the tangent at C at point Q . Prove that the point of intersection of circles FAP and FCQ different from F is on line AC . (6 points) (Proposed by *Gábor Holló*, Budapest)

New problems – competition A (see page 291): **A. 935.** A criminal starts at the origin and escapes by moving on the integer lattice points of the plane. At each step, they move to a neighboring lattice point, with the restriction that they never move in the same direction twice consecutively. It is known that their first move is upward, and that their

path visits every lattice point exactly once. An agent also starts at the origin but cannot see the criminal. Fortunately, the headquarters can track the criminal's movement, but they can communicate with the agent only in the following way: a predetermined infinite set $S \subseteq \mathbb{N}$ is given, and for each $s \in S$, after the s -th step of the criminal, a message consisting of either 1 or 2 is sent to the agent. The agent moves only when a message is received, and always makes exactly as many steps as the criminal has taken since the last message. What is the value of $I = \inf_S \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|S \cap \{1, 2, 3, \dots, n\}|}{n} \right)$ taken over all sets S for which the agent can uniquely reconstruct the movement of the criminal? *Both the agent and the headquarters are aware of the rules restricting the criminal's movement.* (Proposed by Márton Németh, Budapest) **A. 936.** Given an acute, scalene triangle ABC in the plane. Denote its symmedian point by K and the center of its Feuerbach circle by N . Construct, using a compass and straightedge, distinct points X, X^*, Y, Y^* such that $\bullet$ the lines XY and X^*Y^* intersect at K ; $\bullet$ the lines XX^* and YY^* intersect at N ; $\bullet$ the points X and X^* , as well as Y and Y^* , are isogonal conjugates with respect to the triangle. (Proposed by Áron Bán-Szabó, Palaiseau) **A. 937.** Let $P \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ be an irreducible complex polynomial of degree at least 2. Assume that there exists an integer $M > 1$ such that $P(x_1, \dots, x_n) \mid P(x_1^M, \dots, x_n^M)$. Prove that there exist a nonzero complex number c , a complex root of unity ζ and non-negative integers $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ such that $P(x_1, \dots, x_n) = c(x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} - \zeta x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n})$. (Proposed by Navid Safaei, Tehran)

Problems in Physics

(see page 313)

M. 450. Smartphones are equipped with sensors capable of measuring magnetic induction. Find in the school laboratory, or construct yourself, a coil large enough to place the phone inside. Compare the magnitude of the magnetic induction measured at the centre of a current-carrying coil with the theoretical expectation. Measure and map the magnetic field along the axis of the coil.

G. 925. We ride a bicycle down a long slope and intend to stop at the bottom. Under which conditions, and why, does the brake pad wear less: if we accelerate to a high speed and brake strongly at the end, or if we brake continuously and do not allow the bicycle to accelerate? (Assume braking without wheel lock, and that brake wear is directly proportional to the work done by friction and independent of speed.) **G. 926.** Two identical bar magnets each have a weight of 0.5 N. If the magnets, placed in contact with each other, are set on a horizontal frictionless table, they can be separated by a horizontal force of 1.5 N (see *figure 1*). The magnets are suspended as shown in *figure 2*. *a)* Determine the tension in the string and the contact force between the magnets. *b)* Solve the problem also for the case in which one magnet has a weight of 0.5 N and the other 1 N, while the attractive force between them remains 1.5 N. **G. 927.** When a person wearing glasses enters a warm room from the cold in winter, the glasses usually fog up. However, if the glasses are wiped immediately, they usually do not fog up again. Explain this phenomenon! **G. 928.** When looking into a plane mirror, we see our mirror image, which is not the same as how other people see us. How can we use two plane mirrors to see our face as others would see it?

P. 5733. A boy practices free throws on a basketball court. The basket is located horizontally at a distance of $d = 4$ m and vertically $H = 1$ m higher than the release point. The initial velocity of the thrown ball is $v_0 = 10$ m/s. *a)* At what angle should the boy throw the ball so that it goes cleanly into the basket? *b)* What are the minimum

and maximum values of v_0 for which the shot is possible, taking into account that the ceiling is located 6 m above the release position of the ball? Assume that the ball and the basket (i.e. the centres of the ball and the rim) are point-like, and neglect air resistance.

P. 5734. A point-like ball of mass m can move without friction along a long horizontal rod. A string attached to the ball passes through a small ring situated at a depth h below the rod, and a weight of mass also m is attached to its free end. When the inclined segment of the string makes an angle $\alpha = 60^\circ$ with the vertical, the ball is released from rest. *a)* By what factor is the tension in the string greater as the ball passes above the ring than at the instant immediately after release? *b)* What is the period of small oscillations of the ball about its equilibrium position?

P. 5735. What is the minimum time interval, as observed from the Earth, between Mars being in opposition and subsequently in quadrature? As seen from the Earth, Mars is in opposition when it lies in the direction opposite to the Sun, and in quadrature when its angular separation from the Sun is 90° . Assume that the Earth and Mars move in circular orbits of radii 1 AU and 1.5 AU, respectively, about the Sun, in the same direction and in the plane of the ecliptic.

P. 5736. A research spacecraft of the small green Titan-eating creatures has discovered a spherical asteroid with the following properties: – it has no atmosphere, – it always keeps the same face towards its star, – the solar constant at the asteroid's surface is equal to that on Earth, 1360 W/m^2 , – the absorption coefficient of its surface is 0.5. *a)* Determine the temperature of the asteroid, assuming that, due to the good thermal conductivity of titanium, the temperature is uniform throughout the asteroid. *b)* The small green Titan-eating creatures began surface mining the material of the asteroid over one quarter of its surface. The “worked” area may be regarded as a perfectly black body. How does the temperature of the asteroid change depending on whether the mine is located on the dark side or on the illuminated side of the asteroid? (It may be assumed that, in the case of the illuminated side, the worked area also covers one half of the illuminated hemisphere, when projected perpendicular to the direction of the incoming radiation.)

P. 5737. A point charge of mass m and charge Q is situated at a distance d above a well-conducting plane metal sheet. It is given an initial velocity v_0 in a direction parallel to the plane of the sheet. After what time, and at what point, does the charge strike the metal sheet? (Gravitational force is negligible compared to electrical forces.)

P. 5738. A circular wire loop of radius d is formed from a thin wire. A small conducting ring of radius r (with $r \ll d$) and resistance R is placed at its centre, with their axes coinciding. A steady current of magnitude I flows in the loop. What total charge passes through a given cross-section of the small ring as it is moved very far away from the loop? (Self-inductive effects may be neglected.)

P. 5739. In the past, during cataract surgery, the natural lens removed from the patient's eye was not replaced by an artificial lens. A patient operated on in this way could see distant objects clearly with spectacles of power +12 dioptres. What power of spectacles would be required for the patient to read a book at a distance of 30 cm?

P. 5740. In air at room temperature and atmospheric pressure, the mean free path of nitrogen molecules is approximately 65 nm. Estimate the average displacement of a nitrogen molecule from its initial position in 1 hour.

P. 5741. The $I(U)$ characteristic of an incandescent lamp is shown in the figure. *a)* Plot the temperature of the filament as a function of the power dissipated. Assume that the resistance of the filament is proportional to the absolute temperature, and that the ambient temperature is 27°C . *b)* The filament loses heat by two mechanisms: thermal conduction and thermal radiation. Determine the effective radiating surface area of the filament. Assume that the filament behaves as a black body.



Homokdűne az óceánparton



KÖZLEMÉNYEK

- A 2025/2026. tanév KöMaL pontversenyek hivatalos végeredménye 2026. augusztus elejétől lesz elérhető a honlapunkon (www.komal.hu).
- A KöMaL Ifjúsági Ankétot idén 2026. október 29–30-án rendezzük meg. Helyszíne Budapest, az ELTE TTK Lágymányosi Campusa. 29-én délután lesz az idei pontversenyek díjátadója, amely hagyományosan az Ankét kiemelt eseménye.
- A KöMaL Nyári Fizika Táborát az idén nem rendezzük meg, de terveink szerint megújulva tér vissza 2027-ben.

A KöMaL ára a következő tanévben:

Előfizetések száma	2026-os ár	ajándék a megrendeltek felül	Előfizetések száma	2026-os ár	ajándék a megrendeltek felül
1–7 db	15 000 Ft	–	30–39 db	13 500 Ft	4 előfizetés
8–14 db	14 500 Ft	1 előfizetés	40–49 db	13 500 Ft	5 előfizetés
15–19 db	14 500 Ft	2 előfizetés	50–59 db	12 500 Ft	6 előfizetés
20–29 db	14 000 Ft	3 előfizetés	60 db-tól	12 500 Ft	7 előfizetés
1 lapszám ára: 1850 Ft					

FELHÍVÁS

Kedves KöMaL Olvasók!

A KöMaL levelezős versenyei azon kevesek közé tartoznak, amelyek ingyenesek. Ez így van immár több mint 130 éve! Szeretnénk is, hogy ingyenes maradjon, ezt nagyon fontosnak tartjuk ahhoz, hogy a lap be tudja tölteni feladatát, küldetését.

Sajnos az ingyenesség az újság előállítására és a versenyek lebonyolítására nem vonatkozik, nyilván senkit nem lep meg, hogy ezek költséggel járnak, aminek a lap előfizetéséből befolyó pénzek csak egy kis részére elegendőek. A fennmaradó részt évről évre az 1%-os felajánlások, magánszemélyek és cégek adományai, ezek mellett pedig nagyrészt állami pályázatokon elnyert összegek fedezik. A Nemzeti Tehetség Program eddigi segítségét ezúton is köszönjük. (NTP-TMV-M-25-A-002, 17 millió Ft, 2025. szeptember 1. – 2026. augusztus 31.)

Azonban a KöMaL állami támogatásának rendszere az elmúlt évben jelentősen átalakult, a következő években az előre látható bevételeink várhatóan nem tudják fedezni a költségeinket.

Ezért kérünk mindenkit, aki szereti a KöMaL-t, létezését fontosnak tartja, hogy lehetőségéhez mérten támogassa a KöMaL-t kiadó MATFUND Alapítványt. Ha teheti, rendelkezzen adója 1%-áról az Alapítvány javára (adószám: 18157444-2-43)! Az 1%-okból befolyó összegek évről évre bár nem túl nagy, de fontos részét képezték az anyagi forrásainknak.

Ezen kívül pedig, ha saját vagy céges lehetőségei megengedik, támogassa a KöMaL kiadását, a KöMaL tudáskincsének gondozását!

Kérjük, hogy ismerősei körében is terjessze felhívásunkat.

Köszönettel:

*A MATFUND Alapítvány kuratóriuma és a
KöMaL szerkesztősége*