Áprilisi pótfeladat.[1]

Egy függőleges falú medence a csap kinyitása után T idő múlva telik meg. Ezt a vízmennyiséget a lefolyónyílás megnyitása után $2T$ idő alatt lehet leereszteni. Mennyi idő alatt telik meg a medence, ha nyitott lefolyónyílás mellett szeretnénk a medencét a csap megnyitásával feltölteni?

Közli: *Radnai Márton,* Budapest

Megoldás. Jelöljük x-szel azt az arányt, amely megmutatja, hogy a medence a teljes magasságának hányad részéig van vízzel töltve.

Feltöltéskor x időben egyenletesen növekszik, és mivel T idő alatt éri el az $x = 1$ értéket,

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)_{\text{be}} = \frac{1}{T}.$$

Kifolyáskor a kiáramlási sebesség – és ezzel arányosan x egységnyi idő alatti csökkenése – a Torricelli-törvény szerint a vízszint magasságának (tehát x-nek is) a négyzetgyökével arányos:

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)_{\text{ki}} = -K\sqrt{x}.$$

A K arányossági tényezőt úgy kell megválasztani, hogy x éppen $2T$ idő alatt csökkenjen le 1-ről 0-ra.

Mivel a kiáramlást leíró egyenlet ugyanolyan alakú, mint egy nulla kezdősebességgel induló, állandó a gyorsulású mozgásnál a sebesség és az elmozdulás közötti $v = \sqrt{2ax}$ összefüggés, megállapíthatjuk, hogy a folyadékszint is időben egyenletesen változó sebességgel csökken le nullára.

A kezdeti csökkenési ütem K, a végső nulla, átlagosan tehát $K/2$-vel egyenlő x csökkenésének sebessége. Ez az átlagos csökkenési idő kifejezhető a teljes kiürülési idővel:

$$\frac{K}{2} = \frac{1}{2T}.$$

Ha a töltőcsap is és a lefolyó is nyitva van, akkor a töltésből és a kiürülésből adódó változási sebességek összegződnek:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)_{\text{be}} + \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)_{\text{ki}} = \frac{1-\sqrt{x}}{T}.$$

Látjuk, hogy minél jobban megközelíti x az 1 értéket, annál lassabbá válik a vízszint emelkedése. Kérdés, hogy mikor éri el (ha egyáltalán eléri) x az 1-et. Tegyük fel, hogy bizonyos t_0 idő alatt a medence már majdnem megtelt, vagyis az $x(t) \equiv 1 - \varepsilon(t)$ jelölést használva $\varepsilon(t_0) \ll 1$. A tartályból még hiányzó ε hányad csökkenési sebessége:

$$\frac{\Delta\varepsilon(t)}{\Delta t} = -\frac{\Delta x}{\Delta t} = -\frac{1}{T}\left(1-\sqrt{x}\right) = -\frac{1}{T}\left(1-\sqrt{1-\varepsilon(t)}\right) \approx -\frac{1}{2T}\varepsilon(t).$$

Ez az egyenlet éppen olyan, mint az $1/(2T)$ bomlási állandójú radioaktív bomlás egyenlete, amelynek a megoldása

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(t_0)\,\mathrm{e}^{-(t-t_0)/(2T)}.$$

Innen leolvasható, hogy bármilyen hosszú ideig is várunk, a medence *sosem telik meg* teljesen. Másképpen megfogalmazva: a medence hosszú idő után *gyakorlatilag* teljesen tele lesz, miközben ugyanannyi víz folyik bele, mint amennyi távozik, hiszen $x = 1$ esetében lesz a kifolyási és a beömlési sebességek nagysága egyenlő.

[1] A pótfeladat megoldása beküldhető volt, de nem számít bele a pontversenybe.